

連續樑的一近似解法——切斷法

譚維翰

(北京大學)

一. 緒 言

關於連續樑的解法到現在為止最主要的有兩個,其一即卡斯龍(Castigliano)利用應變能原理解連續樑,另一即 Hardy cross 的力矩分配法(method of moment distribution)。前者在理論上係準確之方法,但要藉助於解多元一次聯立方程式,故實際應用起來頗為繁雜,且易發生錯誤;後者為一近似的方法,較應變能法簡便,近年來工程上多採用之。

在這裏我要提出來的也是一個近似的連續樑的解法,這個方法與力矩法比較起來互有優缺點,關於這一點的討論留在後面。首先,讓我把這一方法的理論根據以及找出它的經過寫下來。

在理論上最準確的解連續樑的方法為三力矩法及應變能法,這兩種方法的來源或根據樑的連續性質或根據能量最小原理,但最後都依靠解一組多元一次聯立方程式。解聯立方程式便要應用到行列式,由此可見連續樑上的作用力與反作用力、作用力矩與反作用力矩之間是以一種行列式的關係聯繫起來的,決不是其他的關係。因此,要想找到一個不用解一次聯立方程式的準確的方法來解決上述問題,如果這是可能的話,那便等於說,作用力與反作用力、作用力矩與反作用力矩之間的行列式的關係,可以用其他的關係來替代,這顯然是不可能的。當我認清楚這點後,便將以前想找到一個準確的不用解聯立一次多元的念頭完全打消。

連續樑最主要之特點即連續而平衡,如果我們不打破這兩個特性之一個,而求其解,即為最準確之法,而非近似。如果我們首先打破這兩個特點中之任何一個,問題即變成簡單,可以用靜力學解決了。然後再想辦法使這個被打破的特性漸漸

恢復到原來的狀態，即恢復其特性，於是我們的問題便得到近似的解答。因此，我便想到連續樑在各支點切斷以打破其連續，再按上述的步驟進行思考，最後這一解法得到證明。

二. 方法及證明

設有一連續樑包括 n 個支點 ($n-1$) 段；各段之剛性係數為 $B_1I_1, B_2I_2, \dots, B_{n-1}I_{n-1}$ ；各段之長為 $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$ ；樑上負荷為已知求支點的反力。

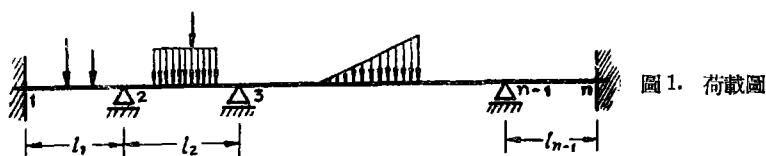


圖 1. 荷載圖

[解] (a) 將樑在各支點 $1, 2, \dots, n$ 切斷，因之 $(n-1)$ 段的連續變成 $(n-1)$ 段簡單支樑，在樑上加載荷，此為靜定問題，故各支點之反作用力及樑在端點之轉角均可決定。

設 θ_{11} 為樑 I 在左支點 1 之轉角，

同樣， θ_{12} 為樑 I 在右支點 2 之轉角，

θ_{ii} 為樑 i 在左支點 i 之轉角，

θ_{ii+1} 為樑 i 在右支點 $i+1$ 之轉角，

又設 $\theta_1 = \theta_{11}$ ； $\theta_2 = \theta_{22} + \theta_{12}$ ， $\dots$ ； $\theta_i = \theta_{ii} + \theta_{i-1, i}$ ， $\dots$ ； $\theta_n = \theta_{n-1, n}$ 。[θ 正負之定法為 (+)

(-)]

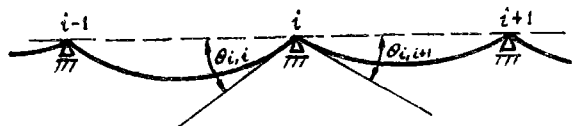


圖 2. 轉角圖

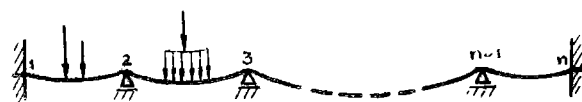


圖 3. 切斷圖

(b) 在支點 1 加力矩 M_1 ，支點 2 加力矩 M_2 ， $\dots$ ，支點 n 加力矩 M_n ，使

$$M_1 = -\frac{\theta_1}{\frac{l_1}{3B_1I_1}}, \quad M_2 = -\frac{\theta_2}{\frac{l_2}{3B_2I_2} + \frac{l_1}{3B_1I_1}}, \quad \dots, \quad M_n = -\frac{\theta_n}{\frac{l_{n-1}}{3B_{n-1}I_{n-1}}}.$$



圖 4. 加力矩圖

(c) 加力矩 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 後，各點之轉角應有改變，而得一組新值。設為 $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n$ ；又在各支點上加力矩 $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ ，使

$$M'_1 = -\frac{\theta'_1}{\frac{l_1}{3E_1 I_1}}, \quad M'_2 = -\frac{\theta'_2}{\frac{l_2}{3E_2 I_2} + \frac{l_1}{3E_1 I_1}}, \quad \dots, \quad M'_n = -\frac{\theta'_n}{\frac{l_{n-1}}{3E_{n-1} I_{n-1}}}.$$

(d) 按照同樣步驟進行，可得出 $M''_1, M''_2, \dots, M''_n; M'''_1, M'''_2, \dots, M'''_n, \dots$ 無窮多組值，將諸組中對應項相加，即得樑在支點應有之轉矩。

$$\Sigma M_1, \Sigma M_2, \Sigma M_3, \dots, \Sigma M_n.$$

$$[\Sigma M_i = M_i + M'_i + M''_i + \dots + M'''_i + \dots]$$

(e) 證：樑在各支點第一次之轉角為 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 絕對值最大者為 θ_m ，

樑在各支點第二次之轉角為 $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n$ 絕對值最大者為 θ'_m ，

樑在各支點第三次之轉角為 $\theta''_1, \theta''_2, \dots, \theta''_n$ 絕對值最大者為 θ''_m 。

如果我們能够證明，當次數無限增多時，所有之轉角均趨近於零，即已達平衡狀態，那末我們的問題便得到證明了。

要證明所有之轉角均趨近於零，只要證明當 $n \rightarrow \infty$ ， $\theta''_m \rightarrow 0$ 可矣。換句話說，只要證明

$$|\theta_m| > |\theta'_m| > |\theta''_m| > \dots > |\theta'''_m| > \dots.$$

要證明這點，首先讓我們考慮 $i-1, i, i+1$ 三支點。未加力矩時，樑在支點 i 的轉角為 θ_i ，第一次加力矩後，在 i 點之轉角為 θ'_i ，試計算 θ'_i 。

$$\begin{aligned} \theta'_i &= \theta_i + M_i \left[\frac{l_i}{3E_i I_i} + \frac{l_{i-1}}{3E_{i-1} I_{i-1}} \right] + \frac{M_{i-1} l_{i-1}}{6E_{i-1} I_{i-1}} + \frac{M_{i+1} l_i}{6E_i I_i} \\ &= \theta_i - \frac{\theta_i}{\frac{l_i}{3E_i I_i} + \frac{l_{i-1}}{3E_{i-1} I_{i-1}}} \left[\frac{l_i}{3E_i I_i} + \frac{l_{i-1}}{3E_{i-1} I_{i-1}} \right] \\ &\quad - \frac{\frac{\theta_{i-1}}{\frac{l_{i-1}}{3E_{i-1} I_{i-1}} + \frac{l_{i-2}}{3E_{i-2} I_{i-2}}}}{\frac{l_{i-1}}{3E_{i-1} I_{i-1}} + \frac{l_{i-2}}{3E_{i-2} I_{i-2}}} \frac{l_{i-1}}{6E_{i-1} I_{i-1}} - \frac{\frac{\theta_{i+1}}{\frac{l_{i+1}}{3E_{i+1} I_{i+1}} + \frac{l_i}{3E_i I_i}}}{\frac{l_{i+1}}{3E_{i+1} I_{i+1}} + \frac{l_i}{3E_i I_i}} \frac{l_i}{6E_i I_i} \\ &= -\frac{\frac{\theta_{i-1}}{\frac{l_{i-1}}{3E_{i-1} I_{i-1}} + \frac{l_{i-2}}{3E_{i-2} I_{i-2}}}}{\frac{l_{i-1}}{3E_{i-1} I_{i-1}} + \frac{l_{i-2}}{3E_{i-2} I_{i-2}}} \frac{l_{i-1}}{6E_{i-1} I_{i-1}} - \frac{\frac{\theta_{i+1}}{\frac{l_{i+1}}{3E_{i+1} I_{i+1}} + \frac{l_i}{3E_i I_i}}}{\frac{l_{i+1}}{3E_{i+1} I_{i+1}} + \frac{l_i}{3E_i I_i}} \frac{l_i}{6E_i I_i}, \end{aligned}$$

$$|\theta'_i| \leq \left| \frac{\frac{\theta_{i-1}}{\frac{l_{i-1}}{3B_{i-1}I_{i-1}} + \frac{l_{i-2}}{3B_{i-2}I_{i-2}}} \cdot \frac{l_{i-1}}{6B_{i-1}I_{i-1}}}{\frac{l_{i+1}}{3B_{i+1}I_{i+1}} + \frac{l_i}{3B_iI_i}} \cdot \frac{l_i}{6B_iI_i} \right| + \left| \frac{\theta_{i+1}}{\frac{l_{i+1}}{3B_{i+1}I_{i+1}} + \frac{l_i}{3B_iI_i}} \cdot \frac{l_i}{6B_iI_i} \right|$$

$$< \left| \frac{\theta_{i-1}}{\frac{l_{i-1}}{3B_{i-1}I_{i-1}}} \cdot \frac{l_{i-1}}{6B_{i-1}I_{i-1}} \right| + \left| \frac{\theta_{i-1}}{\frac{l_i}{3B_iI_i}} \cdot \frac{l_i}{6B_iI_i} \right| = \left| \frac{\theta_{i-1}}{2} \right| + \left| \frac{\theta_{i+1}}{2} \right|.$$

由此得出結論： $|\theta'_i|$ 小於 $|\theta'_{i-1}|$, $|\theta'_{i+1}|$ 中之最大者，故 $|\theta'_m|$ 亦必小於其相鄰兩轉角之絕對值較大者。但相鄰兩轉角之絕對值較大者，亦屬於 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 中之角，故 $|\theta'_m|$ 小於 $|\theta_1|, |\theta_2|, \dots, |\theta_n|$ 中之某一轉角 $|\theta_k|$ 。但 $|\theta_k| \leq |\theta_m|$,

$$\therefore |\theta'_m| < |\theta_k| \leq |\theta_m|, \quad \therefore |\theta'_m| < |\theta_m|.$$

同理可證 $|\theta'_m| > |\theta''_m| > |\theta'''_m| > \dots > |\theta^{u'}_m| > \dots$.

$\therefore$ 當 $u \rightarrow \infty$ $\lim |\theta^{u'}_m| = 0$ 即為所證。

三．應用此方法解決問題時所取之步驟及舉例

1. 設 $3B_1I_1:3B_2I_2:3B_3I_3:\dots:3B_{n-1}I_{n-1}=1:e_2:e_3:\dots:e_{n-1}$.

計算

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\frac{l_1}{1}}, \quad \alpha_2 = \frac{-1}{\frac{l_1}{1} + \frac{l_2}{e_2}}, \quad \alpha_3 = \frac{-1}{\frac{l_3}{e_3} + \frac{l_2}{e_2}} \dots, \quad \alpha_n = \frac{-1}{\frac{l_{n-1}}{e_{n-1}}};$$

$$\beta_1 = \frac{l_1}{2 \times 1}, \quad \beta_2 = \frac{l_2}{2e_2}, \quad \beta_3 = \frac{l_3}{2e_3} \dots, \quad \beta_{n-1} = \frac{l_{n-1}}{2e_{n-1}};$$

$$\gamma_1 = 3B_1I_1\theta_1, \quad \gamma_2 = 3B_1I_1\theta_2, \quad \gamma_3 = 3B_1I_1\theta_3 \dots, \quad \gamma_n = 3B_1I_1\theta_n.$$

計算好後，列入下表。

α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	$\beta_3 \dots$	α_n
M_1	γ_1	M_2	γ_2	M_3	$\gamma_3 \dots$	M_n
M'_1	γ'_1	M'_2	γ'_2	M'_3	$\gamma'_3 \dots$	M'_n
M''_1	γ''_1	M''_2	γ''_2	M''_3	$\gamma''_3 \dots$	M''_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

表1. 演算表

表中

$$M_1 = \alpha_1 \gamma_1, M_2 = \alpha_2 \gamma_2, \dots, M_n = \alpha_n \gamma_n,$$

$$\gamma'_1 = \beta_1 M_2, \gamma'_2 = \beta_1 M_1 + \beta_2 M_3,$$

$$\gamma'_3 = \beta_2 M_2 + \beta_3 M_4, \dots, \gamma'_n = \beta_{n-1} M_{n-1}.$$

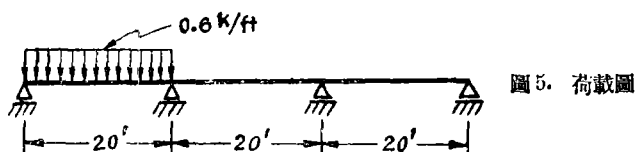
同樣可推及其他

$$\Sigma M_1, \Sigma M_2, \dots, \Sigma M_n,$$

即在支點 1, 2, 3, …… n 之力矩。

2. 舉例

例 1. 一連續樑其支持及負載之情形如圖 5 所示，求每一支點所產生之力矩。



[解] 因兩端為自由端，又因

$$EI_1 = EI_2 = EI_3,$$

故

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{1}{40},$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{20}{2} = 10, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 3EI \frac{0.6 \times 20^3}{24EI} = 600.$$

	0	10	$-\frac{1}{40}$	10	$-\frac{1}{40}$	10	0
0	600	-15	600	0	0	0	0
0	0	0	0	3.75	-150	0	0
0	0	-0.94	37.5	0	0	0	0
0	0	0	0	0.24	-94	0	0
0	0	-0.06	2.4	0	0	0	0
ΣM_0		-16.0		3.99		0	

表 2. 演算表

此題亦可應用力矩分配法解之。

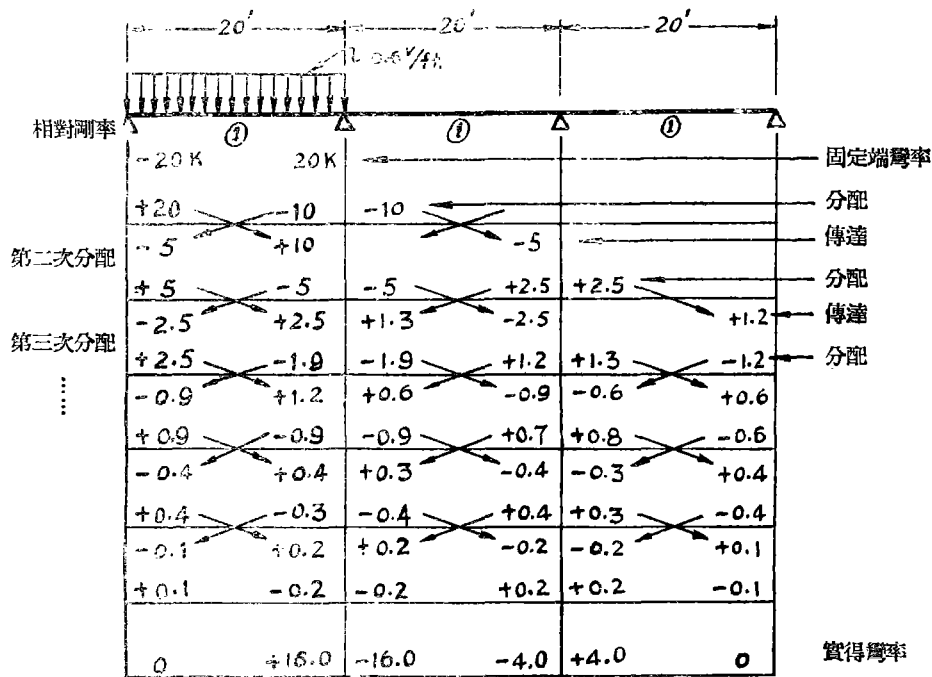


圖 6. 荷載及演算圖

例 2. 一連續樑其負載及支持之情形如圖 7, 求每一支點所產生的力矩。

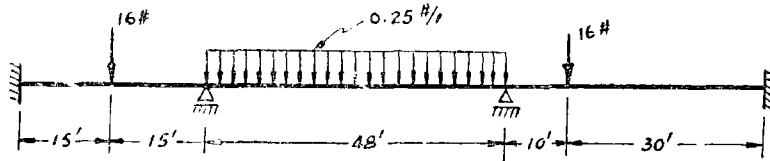


圖 7. 荷載圖

[解] 因 $B_1 I_1 = B_2 I_2 = B_3 I_3$,

$$\therefore 1 = e_2 = e_3;$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{30}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{78}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{88}, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{40};$$

$$\beta_1 = 15, \quad \beta_2 = 24, \quad \beta_3 = 20;$$

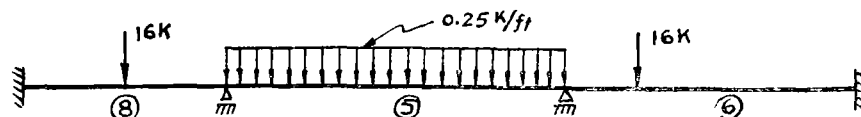
$$\gamma_1 = 2700, \quad \gamma_2 = 6150, \quad \gamma_3 = 7650, \quad \gamma_4 = 3000.$$

	$-\frac{1}{30}$	15	$-\frac{1}{78}$	24	$-\frac{1}{88}$	20	$-\frac{1}{40}$
- 90	+2700		+6150		+7650		+3000
+ 40	-1260	+44.6	-3435	+38.8	-3420	+43.5	-1740
-22.3	+670	-19.6	+1530	-22.03	+1940	-19.4	+776
+ 9.8	-294	+11.1	-865	+9.75	-858	+11	-440.6
- 55	+66	-6.67	+481	-5.43	+478	-4.86	195
+ 3.0	-92.5	+2.73	-213	+2.78	-245	+2.72	109.6
ΣM	-65.80		-47.34		-63.13		-42.04

表3. 演算表

此題用力矩分配法解之如下：

圖8. 荷載圖



	$\frac{8}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$
+60	-60	+48	-48	+90
	+7.4	+4.6	-19.1	-22.9
+3.9		-9.6	+2.3	
	5.9	+3.7	-1.0	-1.3
+3.0		-0.5	+1.8	
	+0.3	+0.2	-0.8	-10
+0.1		-0.4	+0.1	
	+0.2	+0.2	-0.0	-0.1
+	+66.8	-46.2	+46.2	-64.7
				+64.7
				-42.6

表4. 演算表

3. 對於兩固定端 α 因子之改正

這個方法應用到固定端時，殊覺麻煩，如上題即一例。如果我們將 α 因子修正一下，做起來省事得多。如圖8，左端 A 固定，右端自由支於 B 點，我們如果在 B 點加 $-M$ 力矩，則 B 點樑之轉角不難由面矩法求得為

$$\theta = \frac{Ml}{4EI}.$$

如果我們讓固定端 A , 自始至終保持連續, 即不在 A 點切斷, 顯然

$$\alpha_A = 0, \quad \alpha_B = -\frac{1}{\frac{3l_A}{4} + \frac{l_B}{e_B}}.$$

[式中 l_B, e_B 爲 B 點右段連續樑之長度及常數, e_B 之定義如前。]

將這個原理應用到 n 段兩端固定之連續樑, 便有

$$\alpha_1 = \alpha_n = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\frac{3l_1}{4} + \frac{l_2}{e_2}}, \quad \alpha_{n-1} = -\frac{1}{\frac{l_{n-2}}{e_{n-2}} + \frac{3l_{n-1}}{4}},$$

$$\gamma_1 = \gamma_n = 0.$$

其他的常數, 仍舊不變。

我們現在試用這個改正的方法來解例題 2。

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\frac{3 \times 30}{4} + \frac{48}{1}} = -\frac{1}{70.5}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{\frac{48}{1} + \frac{3 \times 40}{4}} = -\frac{1}{78},$$

$$\gamma_2 = 3 \times \frac{0.25 \times 48^3}{24EI} \times EI + 3EI \times \left[\frac{16 \times 15^3}{4 \times 30} (2 \times 30 + 15) - \frac{16 \times 15^2}{2} \right] = 4800,$$

$$\gamma_3 = 3EI \times \frac{0.25 \times 48^3}{24EI} + 3EI \times \left[\frac{16 \times 30^3}{4 \times 40} (2 \times 40 + 10) - \frac{16 \times 30^2}{2} \right] = 6150$$

$$\left\{ \gamma = 3EI \times \frac{\omega l^3}{24EI} + 3EI \times \left[\frac{Pa^2}{4l'} (l' + b) - \frac{Pa^2}{2} \right] \right\}.$$

$$\beta'_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = 24, \quad \beta'_3 = \frac{1}{2}, \quad M_1 = 90, \quad M_4 = 75.$$

	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10.5}$	24	$-\frac{1}{78}$	$\frac{1}{2}$
90	- 68	4800	- 79.6	6150	75
- 34	26.8	- 189	20.9	- 1630	- 39.8
+ 13.4	- 7.1	502	- 8.2	645	10.4
- 3.5	2.8	- 197	2.18	- 170	- 4.1
1.4	- 0.67	52.5	- 0.86	67.0	1.09
- 0.33	0.29	- 20.6	0.16	- 12.6	- 0.43
ΣM 67	- 48		- 66		+ 42.2

表 5. 演 算 表

[式中 $\beta'_1 \times M_2 = M'_1$, $\beta'_3 \times M_3 = M'_3$, $\beta'_1 \times M'_2 = M''_1$, $\beta'_3 \times M'_3 = M''_3$, 餘類推。]

M_1, M_4 為連續樑最初在端點所有之轉矩; β'_1, β'_3 之來源係根據在樑 B 點加力矩 M 。

在固定端係產生 $\frac{1}{2}M$, 其證法甚簡單, 可直接用面矩法證之:

$$\frac{Ml^2}{2} - R_1 \frac{l^2}{2} - \frac{2l}{3} = 0, \quad R_1 = \frac{3M}{2l}, \quad M' = \frac{3M}{2l} l - M = \frac{1}{2}M.$$

四. 方法應用之推廣

這個方法不但可以用來解連續樑, 並且可以推廣到解決一般的木行架或靜不定結構。當然, 我們應該注意到證明這個方法時是由一連續樑出發的, 不過這個證明也同樣的可以推廣到靜不定結構問題上面去。現在首先讓這個證明被推廣罷。

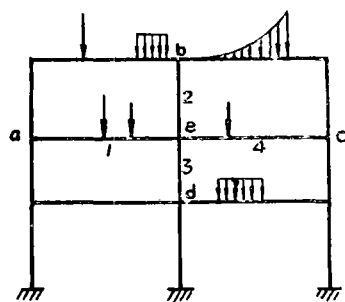


圖 9. 荷載圖

圖 9. 為靜不定結構中任意取出之一部份, 荷載之情形如圖; ae, ec 部份因受有荷載, 故在兩端點各有轉角。又因 a, b, c, d, e 各結點均用鉸代替, 故諸轉角是靜定的。今用 1, 2, 3, 4 表示 ae, eb, ed, ec 四桿; 並用 l_1, l_2, l_3, l_4 ; $E_1 I_1, E_2 I_2, E_3 I_3, E_4 I_4$ 表示各桿的長度及剛性係數。今僅考慮第 4 桿, 即 ec 桿, 其左端之轉角為 θ_e , 右端之轉角為 θ_c 。

在 1, 2, 3, 4 桿各加力矩 M_1, M_2, M_3, M_4 , 方向如圖所示。令

$$M_1 + M_2 + M_3 = M_4,$$

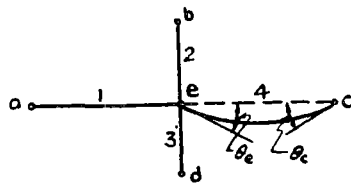


圖 10. 轉角圖

$$\frac{M_1 l_1}{3E_1 I_1} = \frac{M_2 l_2}{3E_2 I_2} = \frac{M_3 l_3}{3E_3 I_3} = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{\frac{3E_1 I_1}{l_1} + \frac{3E_2 I_2}{l_2} + \frac{3E_3 I_3}{l_3}} = \frac{M_{41}}{\frac{3E_1 I_1}{l_1} + \frac{3E_2 I_2}{l_2} + \frac{3E_3 I_3}{l_3}},$$

$$M_{41} = - \frac{\theta_e}{\frac{1}{\frac{3E_4 I_4}{l_4}} + \frac{1}{\frac{3E_1 I_1}{l_1} + \frac{3E_2 I_2}{l_2} + \frac{3E_3 I_3}{l_3}}}.$$

假若在 c 結點相鄰之四桿爲第 4, 5, 6, 7, 則在 c 桿右端 U 點加 M_{42}, M_5, M_6, M_7 , 使 $M_5 + M_6 + M_7 = M_{42}$, 方向如圖所示。

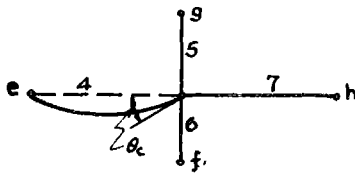


圖11.

$$\frac{M_5 l_5}{3E_5 I_5} = \frac{M_6 l_6}{3E_6 I_6} = \frac{M_7 l_7}{3E_7 I_7},$$

$$M_{42} = - \frac{\theta_e}{\frac{1}{\frac{3E_4 I_4}{l_4}} + \frac{1}{\frac{3E_5 I_5}{l_5} + \frac{3E_6 I_6}{l_6} + \frac{3E_7 I_7}{l_7}}}.$$

[式中 $M_1, M_2, M_3, M_{42}; E_4 I_4, E_5 I_5, E_6 I_6, E_7 I_7, l_5, l_6, l_7$.]

所代表之意與結點 c 所有者同。

經過加力矩這樣一個處理後, 我們再來計算 ec 桿在 e, c 兩點之轉角 θ'_e, θ'_c .

$$\begin{aligned} \theta'_e &= \theta_e + \frac{M_{41} l_4}{3E_4 I_4} + \frac{M_1 l_1}{3E_1 I_1} + \frac{M_{42} l_4}{6E_4 I_4} \\ &= \theta_e + \frac{M_{41} l_4}{3E_4 I_4} + \frac{M_{41}}{\frac{3E_1 I_1}{l_1} + \frac{3E_2 I_2}{l_2} + \frac{3E_3 I_3}{l_3}} + \frac{M_{42} l_4}{6E_4 I_4} \\ &= \theta_e - \frac{\frac{1}{\frac{3E_4 I_4}{l_4}} + \frac{1}{\frac{3E_1 I_1}{l_1} + \frac{3E_2 I_2}{l_2} + \frac{3E_3 I_3}{l_3}}}{\frac{1}{\frac{3E_4 I_4}{l_4}} + \frac{1}{\frac{3E_5 I_5}{l_5} + \frac{3E_6 I_6}{l_6} + \frac{3E_7 I_7}{l_7}}} \left[\frac{1}{\frac{3E_4 I_4}{l_4}} + \frac{1}{\frac{3E_1 I_1}{l_1} + \frac{3E_2 I_2}{l_2} + \frac{3E_3 I_3}{l_3}} \right] \\ &\quad - \frac{\theta_e}{\frac{1}{\frac{3E_4 I_4}{l_4}} + \frac{1}{\frac{3E_5 I_5}{l_5} + \frac{3E_6 I_6}{l_6} + \frac{3E_7 I_7}{l_7}}} \frac{l_4}{6E_4 I_4} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\theta_c}{\frac{1}{\frac{3E_4I_4}{l_4}} + \frac{1}{\frac{3E_5I_5}{l_5} + \frac{3E_6I_6}{l_6} + \frac{3E_7I_7}{l_7}}} \frac{l_4}{6E_4I_4},$$

$$|\theta_e| = \left| -\frac{\theta_c}{\frac{1}{\frac{3E_4I_4}{l_4}} + \frac{1}{\frac{3E_5I_5}{l_5} + \frac{3E_6I_6}{l_6} + \frac{3E_7I_7}{l_7}}} \frac{l_4}{6E_4I_4} \right|$$

$$< \left| \frac{\theta_c}{\frac{1}{\frac{3E_4I_4}{l_4}}} \frac{l_4}{6E_4I_4} \right| = \left| \frac{\theta_c}{2} \right|.$$

同理可以證明：

$$|\theta_e| < \left| \frac{\theta_c}{2} \right|.$$

因此我們得出結論： $|\theta'_c|$, $|\theta''|$ 中之較大者，必小於 $|\theta_e|$, $|\theta_c|$ 中之絕對值較大者。

用類似於證明連續樑時所用之方法，不難知道當加力矩的次數趨於無限多時，所有之轉角均趨近於零，即桁架達於連續的狀態。

現在證明既已得到推廣，下面將討論應如何地應用這個方法去解決實際問題，並舉出具體的例子，以資測驗。

根據上面所設

$$M_{41} = -\frac{\theta_e}{\frac{1}{\frac{3E_4I_4}{l_4}} + \frac{1}{\frac{3E_1I_1}{l_1} + \frac{3E_2I_2}{l_2} + \frac{3E_3I_3}{l_3}}} = -\frac{3E_1I_1\theta_e}{\frac{l_4}{e_4} + \frac{1}{\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}}}$$

$$[\text{式中 } e_2 = \frac{E_2I_2}{E_1I_1}; e_3 = \frac{E_3I_3}{E_1I_1}; e_4 = \frac{E_4I_4}{E_1I_1}].$$

如果我們令

$$3E_1I_1\theta_e = \gamma_{41}, \quad \frac{e_4}{l_4} = D_4, \quad \frac{e_1}{l_1} = D_1, \quad \frac{e_2}{l_2} = D_2, \quad \frac{e_3}{l_3} = D_3,$$

上面的式子便可以簡化為

$$M_{41} = -\frac{\gamma_{41}}{\frac{1}{D_4} + \frac{1}{D_1 + D_2 + D_3}}.$$

又由前面證明中所設

$$\frac{M_1l_1}{3E_1I_1} = \frac{M_{41}}{\frac{3E_1I_1}{l_1} + \frac{3E_2I_2}{l_2} + \frac{3E_3I_3}{l_3}}, \quad \therefore M_1 = \frac{D_1}{D_1 + D_2 + D_3} M_{41}.$$

我們又設

$$\alpha_{41} = -\frac{1}{\frac{1}{D_4} + \frac{1}{D_1 + D_2 + D_3}}, \quad \alpha_1 = \frac{D_1}{D_1 + D_2 + D_3}, \quad \alpha_2 = \frac{D_2}{D_1 + D_2 + D_3},$$

$$\alpha_3 = \frac{D_3}{D_1 + D_2 + D_3},$$

則諸關係更可簡單地表示出來，

$$M_{41} = \alpha_{41} \gamma_{41}, \quad M_1 = \alpha_1 M_{41}, \quad M_2 = \alpha_2 M_{41}, \quad M_3 = \alpha_3 M_{41}.$$

同理可推及

$$M_{42} = \alpha_{42} \gamma_{42}, \quad M_5 = \alpha_5 M_{42}, \quad M_6 = \alpha_6 M_{42}, \quad M_7 = \alpha_7 M_{42}.$$

我再引用前面的 β 常數，便可解決下述問題了。

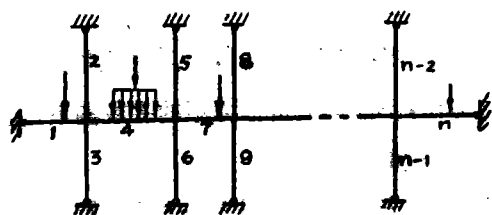


圖12. 荷載圖

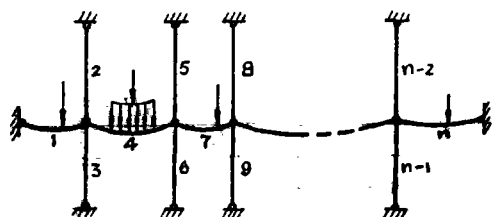


圖13. 切斷圖

β'_1	β_1	α_{12}	α'_{12}	α_2	α'_2	α_3	α'_3	α'_{41}	α_{41}	β'_4	β_4	α_{42}	α'_{42}	α_5	α'_5
γ_1^2	M_{12}	(M'_{12})	M_2	(M'_2)	M_3	(M'_3)	M_{41}	(M'_{41})	γ_{41}	γ_{42}	M_{42}	(M'_{42})	M_5	(M'_5)	...
γ'_1	M'_{12}	$(M''_{12})'$	M'_2	$(M''_2)'$	M'_3	$(M''_3)'$	M'_{41}	$(M''_{41})'$	γ'_{41}	γ'_{42}	M'_{42}	$(M''_{42})'$	M'_5	$(M''_5)'$	...
γ''_1	M''_{12}	$(M'''_{12})''$	M''_2	$(M'''_2)''$	M''_3	$(M'''_3)''$	M''_{41}	$(M'''_{41})''$	γ''_{41}	γ''_{42}	M''_{42}	$(M'''_{42})''$	M''_5	$(M'''_5)''$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

表6. 演算表

式中 $\beta_4 = \frac{l_4}{2e_4}$, $\beta'_4 = \frac{l_4}{e_4}$. 同理可推及其他 $\beta_i = \frac{l_i}{2e_i}$, $\beta'_i = \frac{l_i}{e_i}$.

$$\alpha'_{12} = \frac{D_1}{D_1 + D_2 + D_3}, \quad \alpha_{12} = -\frac{1}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2 + D_3 + D_4}}, \quad \alpha'_2 = \frac{D_2}{D_1 + D_2 + D_3},$$

$$\alpha_2 = \frac{D_2}{D_2 + D_3 + D_4}, \quad \alpha'_3 = \frac{D_3}{D_1 + D_2 + D_3}, \quad \alpha_3 = \frac{D_3}{D_2 + D_3 + D_4},$$

$$\alpha'_{41} = \frac{-1}{\frac{1}{D_4} + \frac{1}{D_1 + D_2 + D_3}}, \quad \alpha_{41} = \frac{D_4}{D_2 + D_3 + D_4} \dots\dots$$

由上面諸常數及最初條件 $\gamma_{12}, \gamma_{41}, \gamma_{42}, \dots\dots$ 所得之關係式如下：

$$M_{12} = \gamma_{12}\alpha_{12}, \quad M_2 = \alpha_2 M_{12}, \quad M_3 = \alpha_3 M_{12}, \quad M_{41} = \alpha_4 M_{12}, \dots\dots;$$

$$(M'_{41}) = \gamma_{41}\alpha'_{41}, \quad (M'_{12}) = (M'_{41})\alpha'_{12}, \quad (M'_2) = (M'_{41})\alpha_2, \quad (M'_3) = (M'_{41})\alpha_3, \dots\dots;$$

$$\gamma'_{12} = (M'_{12})\beta'_1, \quad \gamma'_{41} = \beta_4 M_{42} + \beta'_4 (M'_{41})', \quad \gamma_{42} = \beta_4 M_{41} + \beta'_4 (M'_{42}) \dots\dots$$

$\Sigma M_{12} + \Sigma (M'_{12})$ 即樑 1 在右端之力矩； $\Sigma M_{41} + \Sigma (M'_{41})'$ 即樑 4 在左端所產生的轉矩。

$\Sigma M_{42} + \Sigma (M'_{42})$ 即樑 4 在右端所生之轉矩，同理可推及其他（樑 7, 10, ……）。

$\Sigma M_2 + \Sigma (M'_2)$ 即樑 2 在結點所生之轉矩，同理可推及樑 3, 5, 6, ……。

例 3. 荷載之情形如圖 14，各桿之剛性係數相等，求其解。

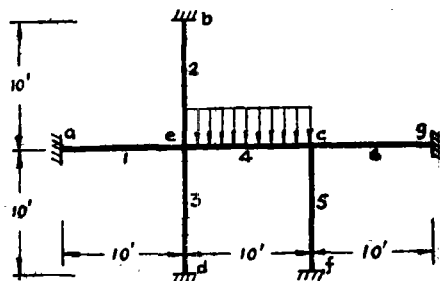


圖 14. 荷載圖

[解] 1, 2, 3, 5, 6 桿端為固定，其係數 D' ，須用 $\frac{4}{3}$ 乘桿端自由時所有之係數 D 而求得。

$$D'_1 = D'_2 = D'_3 = D'_5 = D'_6 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{10}, \quad D_4 = \frac{1}{10},$$

$$\alpha_{41} = \frac{-1}{10 + \frac{1}{\frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right)}} = \frac{-1}{10 + \frac{10}{4}} = -0.08,$$

$$\alpha_{42} = \frac{1}{10 + \frac{1}{\frac{4}{3} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right)}} = -0.073; \quad \beta_4 = \frac{10}{2}.$$

1, 2, 3 桿在結點所產生之轉矩為

$$M_1 = M_2 = M_3 = -89.2 \times \frac{1}{3} = -29.7 Kft.$$

5, 6, 桿在結點所產生之力矩為

$$M_5 = M_6 = -77 \times \frac{1}{2} = 38.5 Kft.$$

	-0.08	5	-0.073
- 120	1500	1500	- 109
+ 43.5	- 545	- 600	43.8
- 17.9	224	222	- 16.4
6.5	- 82	- 80	5.8
- 2.3	29	32.5	- 2.4
0.95	- 12	- 11.5	0.85
- 89.2			- 77

表7. 演算表

今用力矩分配法解之如下:

ea	eb	ed	ec		ec	ef	eg
0.25	0.25	0.25	0.25		0.33	0.33	0.33
			100		- 100		
- 25	- 25	- 25	- 25		33.3	33.3	33.3
			16.6		- 12.5		
- 4.1	- 4.1	- 4.1	- 4.1		+ 4.1	+ 4.2	+ 4.2
			2.0		- 2		
- 0.5	- 0.5	- 0.5	- 0.5		0.7	0.7	0.7
			0.35		- 0.25		
- 0.09	- 0.09	- 0.09	- 0.09		+ 0.08	+ 0.08	+ 0.08
ΣM	- 29.7	- 29.7	- 29.7	+ 89.7	- 76.5	+ 38.1	+ 38.1

表8. 演算表

五. 討 論

前節所討論的那個解連續結構的通式, 理論上雖屬完善, 但在實際問題中應用起來, 仍覺麻煩, 現在更進一步來討論這個問題。

我們已知

$$\frac{M_1 l_1}{3E_1 I_1} = \frac{M_2 l_2}{3E_2 I_2} = \frac{M_3 l_3}{3E_3 I_3} = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{\frac{3E_1 I_1}{l_1} + \frac{3E_2 I_2}{l_2} + \frac{3E_3 I_3}{l_3}} = \theta,$$

即

$$\frac{M_{41}}{D_1 + D_2 + D_3} = 3E_1 I_1 \theta,$$

或

$$\frac{-3E_1 I_1 \theta_e}{\frac{1}{D_4} + \frac{1}{D_1 + D_2 + D_3}} \cdot \frac{1}{D_1 + D_2 + D_3} = 3E_1 I_1 \theta, \quad \theta = \frac{-D_4}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4} \theta_e.$$

這個式子表明加 M_{41} 後，1, 2, 3 桿之轉角均等於 θ_e 之 $\frac{-D_4}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4}$ 倍。我們再看第 4 桿，因加 M_{41} 後所轉之角度為何。很顯然的，加上 M_{41} 後，其轉角之大小應為 $\frac{M_{41} l_4}{3E_4 I_4}$ ；但

$$\frac{M_{41} l_4}{3E_4 I_4} = \frac{-3E_1 I_1 \theta_e}{\frac{1}{D_4} + \frac{1}{D_1 + D_2 + D_3}} \cdot \frac{1}{D_4} \cdot \frac{1}{3E_1 I_1} = \frac{-(D_1 + D_2 + D_3)\theta_e}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4}.$$

上面的

$$\frac{-D_4}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4}, \quad \frac{-(D_1 + D_2 + D_3)}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4}$$

均為常數，只 θ_e 已定，1, 2, 3, 4 桿之轉角便決定了。

這裏又得到一新的概念，即轉角 θ_e 按一定比例分予 1, 2, 3, 4 桿，此點與力矩分配法甚為近似，也許就是兩個方法殊途而同歸的地方。

這裏首先讓這個概念充分予以引伸。用分配的看法來解決靜不定問題，無論如何這是可能的，因為我們如果曉得在連續的極限情形下各段樑兩端之轉角，便能求得兩端之轉矩。

今設樑 1 左端之 γ 因子為 γ_1 ，右端之 γ 因子為 γ_2 ，並設樑 1 之最初條件為 γ_{11} ， γ_{21} ；則有

$$M_1 + \frac{M_2}{2} = \gamma_1 - \gamma_{11}, \quad \frac{1}{2}M_1 + M_2 = \gamma_2 - \gamma_{21}.$$

$$\therefore M_1 = \frac{4}{3} \left[(\gamma_1 - \gamma_{11}) - \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_{21}) \right],$$

$$M_2 = \frac{4}{3} \left[(\gamma_2 - \gamma_{21}) - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_{11}) \right].$$

例 4. 若用轉角的分配觀點來解也可以。

[解] 各分配的比例常數， $K_1, K_2, K_3, K_{41}, K_{42}, K_5, K_6$ 可先求出。

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{-1}{1 + \frac{4}{3}(1+1+1)} = -0.2,$$

$$K_{41} = -(1-0.2) = -0.8,$$

$$K_5 = K_6 = \frac{1}{1 + \frac{4}{3}(1+1)} = \frac{3}{11} = -0.27,$$

$$K_{42} = -(1-0.27) = -0.73.$$

第 1, 2, 3, 桿之轉矩為 $221.2 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{10} = 29.5K'$,

第 4 桿左端之轉矩為 $29.5 \times 3 = 88.5K'$ [第 4 桿之轉矩恰為第 1, 2, 3 桿之轉矩和, 因 $M_{41} = M_1 + M_2 + M_3$ (見前) 故也], 第 4 桿右端之轉矩為 $38 \times 2 = 76K'$,

第 5, 6 桿之轉矩為 $285 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{10} = 38K'$.

- 0.2	- 0.8	- 0.73	- 0.27
	1500	1500	
- 300	- 1200	- 1095	- 405
	- 547	- 600	
+ 110	+ 437	436	162
	+ 218	218	
- 43.6	- 174.4	- 159	- 59
	- 79.5	- 87.2	
+ 15.9	+ 63.5	+ 63.7	+ 23.6
	+ 32.0	+ 32.0	
+ 6.37	- 22.4	- 23.4	- 8.6
	- 11.7	- 11.2	
+ 2.4	- 9.36	+ 8.2	+ 2.58
- 221.2		- 285	

表 9. 演算表

例 5. 解下題, 其荷載及支持之情形如圖所示 [各桿之 B 均相等]。

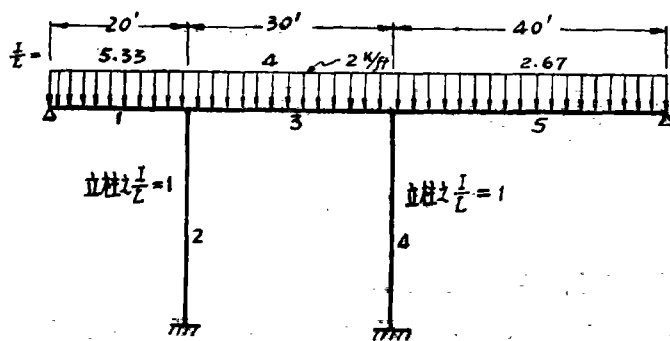


圖15. 荷載圖

相對的 $D_1, D_2, \dots$ 如下：

$$D_1:D_2:D_3:\dots = \frac{1}{L_1} : \frac{e_2}{L_2} : \frac{e_3}{L_3} \dots$$

但

$$e_2 = \frac{3E_2 I_2}{3E_1 I_1}.$$

今所有的 E 均相等，即 $E_1 = E_2 = E_3 = \dots$,

$$\therefore e_2 = \frac{I_2}{I_1}. \quad \text{同理 } e_3 = \frac{I_3}{I_1}.$$

$$\therefore D_1:D_2:D_3:\dots = \frac{1}{L_1} : \frac{I_2}{I_1 L_2} : \frac{I_3}{I_1 L_3} : \dots = \frac{I_1}{L_1} : \frac{I_2}{L_2} : \frac{I_3}{L_3} : \dots$$

$$\therefore \text{相對的 } D_1, D_2, \dots \text{ 爲 } D_1 = \frac{I_1}{L_1}, D_2 = \frac{I_2}{L_2}, \dots$$

$$[\text{解}] \quad D_1 = 5.33, D_2 = \frac{4}{3} \times 1 = 1.33, D_3 = 4, D_4 = \frac{4}{3} = 1.33, D_5 = 2.67.$$

$$\gamma_{12} = 3E_1 I_1 \frac{2 \times 20^3}{24E_1 I_1} = 2000,$$

$$\gamma_{31} = 3E_1 I_1 \frac{2 \times 30^3}{24E_3 I_3} = 6000 = \gamma_{32} \left[\frac{I_1}{I_3} = \frac{5.33 \times 20}{4 \times 30} = \frac{10.66}{12} \right],$$

$$\gamma_{51} = 3E_1 I_1 \frac{2 \times 40^3}{24E_5 I_5} = 16000 \left[\frac{I_1}{I_5} = \frac{5.33 \times 20}{2.67 \times 40} = 1 \right].$$

$-\frac{4+1.333}{5.33+4+1.33}$ = -0.5	$-\frac{5.33+1.33}{4+5.33+1.33}$ = -0.625	$-\frac{2.67+1.33}{4+2.67+1.33}$ = -0.5	$-\frac{1.33+4}{4+2.67+1.33}$ = -0.665
+2000 -1000 -2250	+6000 -3750 -1000	+6000 -3000 -5350	+16000 -10650 3000
	-4175	-2375	
+1575	+2600 +549	+1187 +1300	+1187
-222	-372 -325	-650 -186	-650
+124	+201 +46	+93 +100	+93
-17	-29 -25	-50 -14	-50
+10	+15	+7	+7
$\Sigma \gamma$ -1780	-2335	-7763	-13063

表10. 演算表

$$M_{12} = -1780 \times \frac{1}{20} = -89'; M_{11} = 0; M_{31} = -2235 \times \frac{12}{10.66} \times \frac{1}{30} = -87.3';$$

$$M_{32} = -7763 \times \frac{12}{10.66} \times \frac{1}{30} = 290.7'; M_{51} = -13063 \times \frac{1}{40} = -328';$$

$$M_{52} = 0.$$

[注意: γ 求和時最初條件之 γ 及分配之 γ 如 2000, 4175, 不在求和之例, 故由 γ 求 M 時不用 539 頁之公式而用

$$M = -\frac{\theta}{\frac{1}{3EI}} = -\frac{3EI\theta}{1} = -\frac{\gamma}{l}.$$

$$\begin{aligned} \therefore M_{12} &= -\frac{3E_1 I_1 \theta_{12}}{l_1} = -\frac{\gamma_{12}}{l_1}, M_{31} = -\frac{3E_3 I_3 \theta_{31}}{l_3} = -\frac{3E_1 I_1 \theta_{21}}{l_3} \frac{I_3}{I_1} \\ &= -\frac{\gamma_{31}}{l_3} \frac{I_3}{I_1} \quad (\text{因 } E_1 = E_2 = E_3 = \dots). \end{aligned}$$

M_{32}, M_{51} 等亦可按同樣方法推求。]

六. 總 結

這個方法與 Hardy cross 的力矩分配法主要不同的地方, 即前者保持樑之平衡, 打破樑之連續性質, 然後再用趨近法求得樑在接近於連續時, 在各支點之轉矩; 後者則係維持樑之連續狀態, 打破其平衡狀態, 然後求得樑在極限情形下接近於平衡時, 在各支點應有之轉矩。故雖同係一種近似法, 然而在原則上是完全區別的。現在將此法的特點總結如下:

1. 決定常數問題: 在力矩分配法中, 有兩個待決定的常數, 即分配因子與傳達因子。本文所討論的也有兩個常數, 即 α, β , 在 α 法中常數之決定均甚容易, 故不詳加討論。

2. 找最初條件: 在力矩分配法中, 最初條件為固定彎率 (fixed moment), 本文所需之最初條件為初轉角 (angular deflection)。荷載之情形複雜時, 決定彎率較決定初轉角為易, 在簡單情形下, 固無難易之別。

3. 方法系統化問題: 應用這方法解決問題非常簡便, 因 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 之間互不影響, 僅由 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 決定; $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n$ 亦僅由左右之 M 決定, 彼此間互不影響。故求 M 時, 可循序漸進, 先求出 $M_1, M_2, \dots, M_n$, 再求 $M'_1, M'_2, \dots, M'_n; M''_1, M''_2$ 。用力矩分配法解決問題亦甚簡便, 不過 M 之間相互影響, 不能逐步推求罷了。

本文圖形承方鵬君同學繪製, 謹致謝忱。