



论文

可控的高度规整三角网格生成算法

黄劲, 张沐阳, 裴文杰, 华炜*, 鲍虎军

浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310058

* 通信作者. E-mail: huawei@cad.zju.edu.cn

收稿日期: 2010-07-07; 接受日期: 2011-01-14

国家自然科学基金 (批准号: 60703039, 60933007)、国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2009CB320801) 和中央高校基本科研业务费专项资金资助项目

摘要 本文提出了一种新的用户可控的高度规整三角网格生成算法. 通过在网格表面上构造 3 个标量场, 利用其等值线相交生成高度规整的三角网格. 算法借助 N -对称方向场来指导生成网格的边方向, 在网格表面指定密度场来控制采样密度, 同时还提供了特征对齐和对带边界模型的处理能力. 所有的控制需求都被纳入标量场求解框架中统一优化. 实验表明, 本文的方法能够满足多种用户控制需求, 生成高度规整的三角网格.

关键词 三角网格生成 高度规整网格 半规整网格 N -对称方向场 特征对齐 自适应采样 方向控制

1 引言

三角网格是数字几何处理中最基本, 使用也最广泛的几何表达形式, 具有结构简单、易于获取、表达能力丰富等特点. 现有三角网格大多通过交互式建模软件或者 3D 扫描工具获得, 这些网格虽然已经能够很好地表示几何信息, 但是其质量往往不能令人满意, 常见的问题有几何采样不合理, 存在大量狭长或者退化的三角形等. 网格质量的好坏严重影响三角网格在很多领域的应用. 比如在有限元计算中, 高质量的网格能够有效降低系统的条件数, 减少数值误差, 提高收敛速度^[1]. 在图形学的许多应用中, 规整的网格结构意味着更加有效的压缩、编辑和显示^[2,3].

网格重剖是在输入网格的基础上, 在保持拓扑信息不变的前提下对网格的顶点采样、连接关系、面片形状等进行重构, 从而获得满足用户需求 (如奇异点少、面片尽量是等边三角形等) 或者能够更好地表示几何细节 (在保持面片数量不变的前提下) 的结果. 三角网格的质量主要可以从以下几方面评价:

- 1) 面片质量: 面片形状将严重影响数值计算的稳定性和鲁棒性, 因此需要尽量保证面片是等边三角形.
- 2) 方向保持: 网格边需要沿着特征、曲率或者用户指定的方向, 以便更自然地表示几何特征.
- 3) 特征对齐: 模型上的特征需要被正确地表示为连续的网格边, 以尽量减少和原模型之间的 Hausdorff 距离.

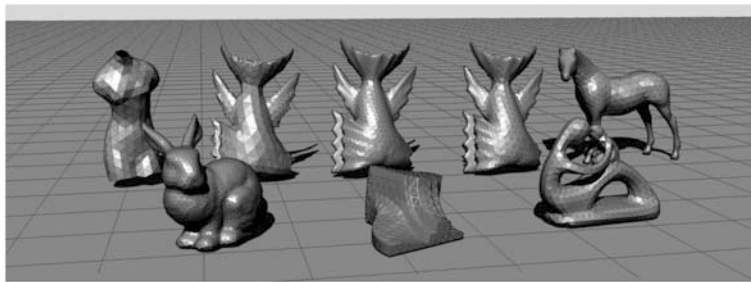


图 1 本文算法生成的部分模型

Figure 1 Some generated models in our paper

4) 奇异点分布: 奇异点 (入度不为 6 的顶点) 的数量和位置会严重影响网格的结构和质量, 因此需要被仔细安放.

已有算法中许多关注在面片质量或特征对齐上, 如文献 [4~6] 等. 关注奇异点分布的算法主要集中在半规整 (semi-regular) 和高度规整 (highly regular) 的网格生成上. 奇异点的分布需要考虑全局信息, 而现有方法往往通过一些贪心策略来优化, 难以得到令人满意的结果.

本文提出了一种用户可控的高度规整三角网格生成算法, 在保持面片质量的同时, 用户可以直接对网格的边方向、采样密度、特征对齐等进行控制. 算法将所有的用户需求纳入一个优化问题中整体求解, 从而自动得到优化的奇异点分布 (本文算法生成的部分模型见图 1). 本文算法的主要贡献在于:

- 1) 能够生成高度规整的三角网格.
- 2) 能够对边方向、网格密度、特征对齐等进行有效控制.

本文将在第 2 节介绍相关工作; 第 3 节介绍方向场的设计; 标量场的构造和三角网格的生成将在第 4 节和第 5 节阐述. 在第 6 节展示实验结果, 第 7 节总结本文工作, 并讨论未来的研究方向.

2 相关工作

过去的几十年里, 研究者提出了非常多的三角网格生成算法. 详细的内容可以关注综述文献 [7]. 这里我们主要关注半规整和高度规整网格 [7]. 这两类网格的共同特点在于只含有少量的奇异点.

半规整网格是通过基网格细分生成: 构造和原网格拓扑一致的基三角网格, 然后建立基网格参数化, 最后对基网格进行细分. 这类算法最早由 Eck 等 [8] 提出, 通过构造 Voronoi 图来得到一个对原网格的 Delaunay 三角剖分, 使用这个三角剖分作为基网格, 通过带边界约束的调和映射 (harmonic mapping) 来计算基网格内部顶点的参数化坐标. Aaron 等 [9] 提出了一种自适应多分辨率的参数化方法 (MAPS). 该算法首次采用基于顶点删除的网格简化方法来生成基网格, 在简化的过程中同时将移除顶点映射到基网格的平面上. Khodakovsky 等 [10] 也是通过简化方法 [11,12] 来生成基网格, 在简化过程中同时考虑了网格形状和逼近误差. 在生成基网格后, 通过迭代对其顶点和边界进行松弛来得到更加光顺的参数化结果. Hormann 等 [13] 针对和圆盘同拓扑的模型, 在参数化后平面网格上根据边界信息来构造基网格. Wood 等 [14] 根据体内等值面信息提取出拓扑正确的基网格. 由于基网格正确保留了原网格的拓扑信息, 这类算法能够适应高规格模型, 同时奇异点仅会出现在基网格上, 所以能够生成半规整的三角网格. 这类算法的主要问题在于生成结果严重依赖于基网格的质量, 然而如何构造一个好的基网格仍然是非常困难的问题, 现有基于简化的方法难以控制基网格质量.

高度规整网格的生成算法不依赖于对基网格的参数化和细分. 文献 [15] 提出一种分片构造规整网格的算法. 首先基于法向将面片聚为 6 类, 然后投影到相应的平面上规整采样 (如 x 方向的聚类面片投影到 $y-z$ 平面), 最后将重采样后的分片连接成有效的网格. 这样生成的结果只会在接缝的地方出现奇异点. 文献 [16] 直接在网格上通过局部修改来得到高度规整网格, 算法首先使用一系列的局部参数化来代替全局参数化, 使得二维网格优化算法可以快速准确地三维上操作, 然后提出了一种局部规整化操作 (边塌缩和边翻转) 来改善连接关系, 减少奇异点. 高度规整网格很难仅仅通过局部修改的策略来得到, 因此算法还提出了一种近似全局的操作 —— 移动漂移边 (drifting edge) 来改善结果. 这类方法同样很难对结果进行控制. 本文的算法属于高度规整网格的生成算法, 但是引入了丰富的用户控制.

四边形网格剖分在近几年得到了较大的发展. Ray 等 [17] 提出周期全局参数化 (PGP) 的方法, 将输入模型参数化并保证参数化坐标轴和用户指定的方向一致. 本文的算法受到文献 [17] 的启发, 将其扩展到三角形网格生成上. 与文献 [17] 相比, 存在以下关键区别: 1) 文献 [17] 处理的是四边形剖分, 本文处理的三角剖分, 有着不同的需求和评价标准. 2) 四边形剖分对应着正交的参数化坐标轴, 而三角剖分需要在非正交 (60°) 框架下完成. 3) 本文加入了特征控制和对带边界模型的处理.

本文的算法流程包含如下 3 步:

- 1) 为输入模型指定方向场和密度场, 用来指导生成网格的边方向和边长.
- 2) 在输入模型上构造 3 个标量场, 使得标量场等值线的方向和间隔符合给定方向场和密度场要求.
- 3) 抽取标量场的等值线, 等值线相交构成三角网格.

3 方向场和密度场

为了方便表示, 先引入如下符号: 令 M 为输入三角网格模型 $M = \{P, E, T\}$, 其中 $P = \{p_i\}_{i=1}^n$ 是网格顶点, E 表示网格上的边, T 表示网格的三角面片. 在三角网格生成中, 用户期望得到等边三角形, 即要求任意两条相邻边方向的夹角都是 60° , 这恰好和 6-对称方向场相符. 因此我们使用 6-对称方向场来指导生成网格的边方向. N -对称方向场由文献 [18] 提出, 定义如下:

$$K_N = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{N}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{N}\right) \end{pmatrix} \middle| 0 \leq k < N \right\}. \quad (1)$$

一个 6-对称方向场可以表示为 $K_6 = \{U, -U, V, -V, W, -W\}$, 其中 U, V 和 W 都是单位向量, 且两两之间的夹角均为 $\frac{\pi}{3}$, 分别对应于生成三角形中三条边的方向. 用户只需要指定 U 方向, 然后将其在切平面上按逆时针方向分别旋转 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$, 就可以获得对应的另外两个方向 V 与 W .

本文使用文献 [18] 中的方法来生成光顺的 6-对称方向场, 用户首先在网格的兴趣区域上指定期望方向, 然后通过一个光顺过程扩散到整个网格. 如图 2 和 3 所示, 输入网格的每个面 T 上都将定义有一个 6-对称方向场.

我们同时指定密度场 μ 来控制生成网格的边长. 密度场 μ 定义在输入网格每条边的中点上, 表示该边上的采样密度.

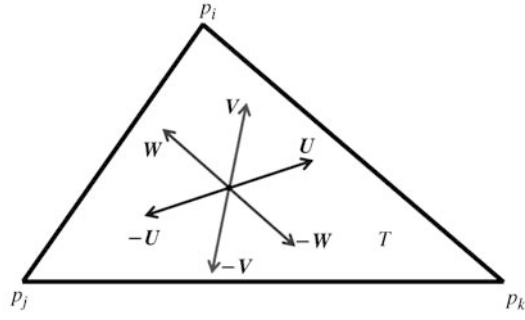


图 2 三角形 T 内的 6-对称方向场 U, V 和 W 方向分别对应图中箭头

Figure 2 6-symmetry direction field on triangle face T , U, V , and W correspond to these arrows

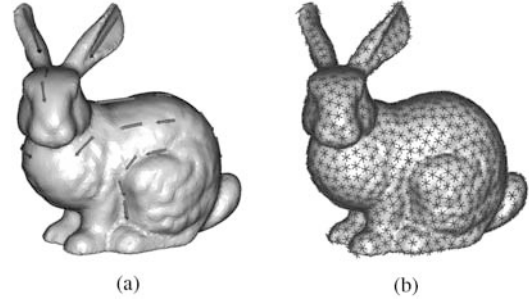


图 3 模型 bunny 上的 6-对称方向场

Figure 3 6-symmetry direction field on the bunny model. (a) The arrow denotes the user specified direction in the interested area; (b) 6-symmetry direction field generated by a smoothly diffused operation from (a). Here we only display the direction fields on some faces for the sake of simplicity

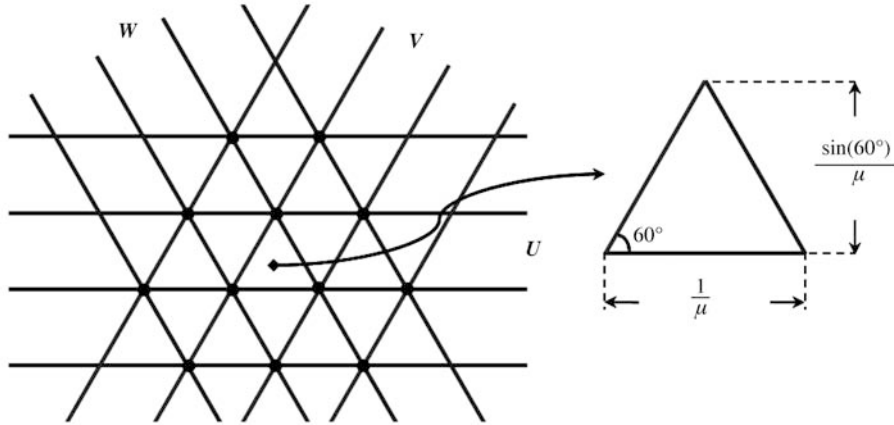


图 4 标量场 f_U, f_V 和 f_W 的等值线相交构成了三角网格, 图中标明了三角形边长以及标量场梯度和密度 μ 的关系

Figure 4 The isocontours (black lines) of scalar fields (f_U, f_V and f_W) intersect one another to construct the triangle mesh. The triangle's edge length and the relationship between the gradient of the scalar field and density μ are indicated in the right diagram

4 标量场构造

给定网格上方向场和密度场后, 我们期望构造满足用户需求的三角网格. 在基于全局参数化的四边形算法中 [17,19], 如果将参数坐标值 (u, v) 看成两个标量场, 四边形网格就是由这两个标量场的等值线相交组成. 同理, 针对三角形, 我们希望构造三个标量场, 其等值线方向和方向场一致, 相邻等值线间隔符合密度场要求, 从而相交得到满足需求的三角网格 (如图 4 所示), 具体描述如下: 对于方向 $(\psi | \psi \in \{U, V, W\})$, 构造标量场 f_ψ , 使得其等值线 $f_\psi = n : n \in \mathbb{Z}$ 和 ψ 方向平行, 且相邻等值线之间在 M 上的测地距离为 $\frac{1}{\mu}$.

为了使得 f_ψ 的等值线的方向和 ψ 平行, 其梯度方向必须和 ψ 垂直. 为了使得等值线之间的沿网格表面的测地距离为 $\frac{1}{\mu}$, f_ψ 的梯度大小 $g(\mu)$ 应该满足 $g(\mu) = \frac{\mu}{\sin(60^\circ)}$.

因此标量场的梯度 ∇f_ψ 需要满足如下条件:

$$\nabla f_\psi = g(\mu)\psi^\perp, \quad (2)$$

其中 $\psi^\perp$ 表示将向量 ψ 在其切平面上逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$.

注意到 $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ 两两之间夹角均为 $\frac{\pi}{3}$, 标量场 $(f_{\mathbf{V}} - f_{\mathbf{U}})$ 的梯度为

$$\nabla(f_{\mathbf{V}} - f_{\mathbf{U}}) = \nabla f_{\mathbf{V}} - \nabla f_{\mathbf{U}} = g(\mu)(\mathbf{V}^\perp - \mathbf{U}^\perp) = g(\mu)\mathbf{W}^\perp.$$

这表明标量场 $(f_{\mathbf{V}} - f_{\mathbf{U}})$ 满足 $f_{\mathbf{W}}$ 的梯度要求, 故令 $f_{\mathbf{W}} = (f_{\mathbf{V}} - f_{\mathbf{U}})$, 因此只需求解 $f_{\mathbf{U}}$ 和 $f_{\mathbf{V}}$.

在离散的三角网格 M 上, 对于面片 $T = (p_i, p_j, p_k)$, 其方向场为 $(\mathbf{U}_T, \mathbf{V}_T)$. 考虑其中一条边 $e_{ij} = \langle p_i, p_j \rangle$, 我们定义如下能量来衡量边 e_{ij} 上梯度条件 (2) 的满足程度:

$$E_{e_{ij}} = \left\| \begin{bmatrix} f_{\mathbf{U}}(p_j) \\ f_{\mathbf{V}}(p_j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{\mathbf{U}}(p_i) \\ f_{\mathbf{V}}(p_i) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_{\mathbf{U}} \\ \Delta_{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \right\|^2, \quad (3)$$

其中 $\mu_{e_{ij}}$ 表示边 e_{ij} 对应的密度值, $(f_{\mathbf{U}}(p_i), f_{\mathbf{V}}(p_i))$ 代表点 p_i 上的标量值,

$$\begin{bmatrix} \Delta_{\mathbf{U}} \\ \Delta_{\mathbf{V}} \end{bmatrix} = g(\mu_{e_{ij}}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_T^\perp \\ \mathbf{V}_T^\perp \end{bmatrix} (p_j - p_i).$$

面片 T 上梯度的满足程度可以近似为其 3 条边上能量 $E_{e_{ij}}$ 之和:

$$E_T = \sum_{e_{ij} \in T} E_{e_{ij}}. \quad (4)$$

整个网格 M 上的能量可以定义为 E_T 在网格表面上的积分:

$$E_M = \sum_{T \in M} E_T A_T, \quad (5)$$

其中 A_T 表示面片 T 的面积.

4.1 方向对齐

当用户输入的 6-对称方向场中存在奇异点时, 方向场 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 都是不可能全局一致对齐的. 这表明此时我们不可能在原网格上获得一个全局一致的标量场 $f_{\mathbf{U}}$ 和 $f_{\mathbf{V}}$. 为了解决这个问题, 我们首先找到方向场中的奇异点, 然后沿奇异点将网格割开, 使得: 1) 割开后的网格与圆盘同拓扑; 2) 奇异点都分布在割边上. 接着在割开后的网格上, 通过一个简单的扩散方法就可以获得全局一致对齐的方向场. 此方法由文献 [19] 推广而来.

本文使用文献 [18] 中的方法来识别 6-对称方向场的奇异点. 获得奇异点之后, 我们首先构造割边将网格切开, 称其和圆盘同拓扑. 这个构造过程很简单: 从网格上任一面片出发, 按广度优先的顺序不断地通过相邻边把面片加入进来, 每次加入都保证当前面片集合和圆盘同拓扑, 这样直到所有面片都

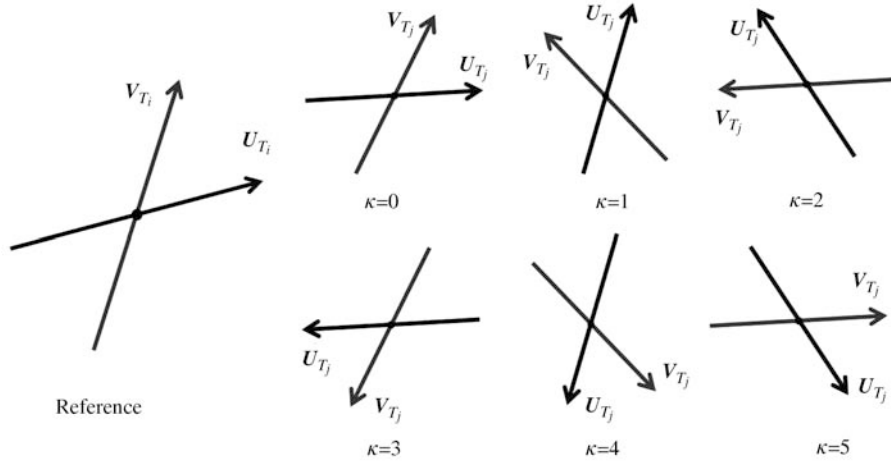

 图 5 方向场 U_{T_j} 与 U_{T_i} 对齐的 6 种情况

 Figure 5 Six cases in which the direction field U_{T_j} is aligned with U_{T_i}

被加入. 这时没有被遍历过的边就形成了割边, 注意到这个割边可以通过不断地移除其非闭合路径而大大简化. 此时, 对于不在割边上的每个奇异点, 我们寻找离其最近的边界点, 然后将它们之间的连线加入上面的割边中. 这样就获得了符合要求的割边.

令割开后的网格为 M_{cut} , 在 M_{cut} 上任选一面片 T_i , 将其方向 U_{T_i} 做为参考方向, 通过一个点乘操作来确定如何对齐其相邻面片 T_j 上的方向 U_{T_j} :

$$\kappa = \arg \max_{r \in \{0,1,2,3,4,5\}} \{U_{T_i} \cdot R_{ji}(R_{60}^r U_{T_j})\}, \quad (6)$$

其中 R_{ji} 表示将面片 T_j 法向转到和 T_i 法向一致的旋转, R_{60}^r 表示沿面片 T_j 的法向进行 r 次 60° 的旋转^[17,20]. 如图 5 所示, $\kappa \neq 0$ 表示 U_{T_j} 和 U_{T_i} 没有对齐, 通过将 U_{T_j} 旋转成为 $R_{60}^\kappa U_{T_j}$ 来完成对齐. 方向 V 的对齐方式与 U 一致. 使用广度优先的策略, 不断地利用对齐后的面片作为参考来对齐相邻面片, 直到遍历完网格上所有面片, 这样我们在割开后的网格上就获得了全局一致的方向场. 完成方向对齐之后, 我们在割开的网格上通过最小化能量方程 (5) 来求解标量场 f_U 和 f_V .

4.2 边界约束

直接在割开的网格上求得的标量场无法保证其等值线在穿过割开边界时的正确性, 我们需要在边界上添加额外的约束. 保证边界上的正确性需要考虑两个因素: 1) 边界两侧的方向场需要对齐; 2) 标量场是一个周期函数, 标量值在穿过边界时会发生整数周期的跳变.

对于处在割开边界上的任一条边 e 来说, 首先考虑该边两侧面片 T_i 和 T_j 方向场的对齐关系. 假设面片 T_j 上的方向为了和 T_i 对齐而发生 κ 次旋转, 当 $\kappa = 1$ 时, 说明 T_i 的标量场 (f_U, f_V) 和 T_j 的标量场 (f_V, f_W) 对应

$$\begin{bmatrix} f_U^{T_i} \\ f_V^{T_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_V^{T_j} \\ f_W^{T_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_V^{T_j} \\ f_V^{T_j} - f_U^{T_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_U^{T_j} \\ f_V^{T_j} \end{bmatrix}.$$

其他 κ 不为 0 的情况可以类推, 再加上对整数周期跳变的考虑, T_i 和 T_j 上的标量场需要满足如下条件:

$$\begin{bmatrix} f_U^{T_i} \\ f_V^{T_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{\kappa} \begin{bmatrix} f_U^{T_j} \\ f_V^{T_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_e \\ k_e \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中 j_e 和 k_e 是整数, $(f_U^{T_i}, f_V^{T_i})$ 表示面片 T_i 上的标量场.

4.3 整数问题的处理

由于在边界约束里引入了整数约束, 我们借助三角函数 $\sin, \cos$ 将整数问题转化为一个非线性的能量优化问题. 首先将标量场乘以 2π , 将约束 (7) 中的整数周期由 (j_e, k_e) 变为 $(2j_e\pi, 2k_e\pi)$, 借助三角函数性质 $\sin(x + 2j_e\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2j_e\pi) = \cos(x)$, 则上述约束 (7) 可以写成

$$\begin{bmatrix} \cos(f_U^{T_i}) \\ \sin(f_U^{T_i}) \\ \cos(f_V^{T_i}) \\ \sin(f_V^{T_i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{f}_U^{T_j}) \\ \sin(\tilde{f}_U^{T_j}) \\ \cos(\tilde{f}_V^{T_j}) \\ \sin(\tilde{f}_V^{T_j}) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_U^{T_j} \\ \tilde{f}_V^{T_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{\kappa} \begin{bmatrix} f_U^{T_j} \\ f_V^{T_j} \end{bmatrix}.$$

同理, 梯度能量 E_{ij} (3) 可以写成

$$E_{e_{ij}} \approx \left\| \begin{bmatrix} \cos(f_U(p_j)) \\ \sin(f_U(p_j)) \\ \cos(f_V(p_j)) \\ \sin(f_V(p_j)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos((f_U(p_i) + \Delta_U)) \\ \sin((f_U(p_i) + \Delta_U)) \\ \cos((f_V(p_i) + \Delta_V)) \\ \sin((f_V(p_i) + \Delta_V)) \end{bmatrix} \right\|^2. \quad (9)$$

上述等式 (8) 和 (9) 都可以利用和差化积展开. 这里的 $f_U, f_V, \Delta_U, \Delta_V$ 都已经被放大了 2π 倍. 此时求解变量也已经由标量场 (f_U, f_V) 变换成它们的三角函数值, 令 $C_U = \cos(f_U)$, $S_U = \sin(f_U)$, $C_V = \cos(f_V)$, $S_V = \sin(f_V)$.

为了保证三角函数值的有效性, 我们还需要额外添加约束条件 $\sin^2 + \cos^2 = 1$, 使用如下能量描述变量 C_U, S_U 上的约束:

$$E_{\text{amp}}^U = \sum_{p \in M_{\text{cut}}} \|C_U(p)^2 + S_U(p)^2 - 1\|^2. \quad (10)$$

同理可得关于变量 C_V, S_V 的能量 E_{amp}^V . 将能量方程 (5) 和 (10) 组合起来得到

$$\min_{\{C_U, S_U, C_V, S_V\}} E_M + \omega(E_{\text{amp}}^U + E_{\text{amp}}^V), \quad (11)$$

其中 ω 是权因子, 在本文的实验中 $\omega = 0.15A_{\text{avg}}$. 其中 A_{avg} 为输入网格面片的平均面积, 这样使得 ω 与模型的尺度无关.

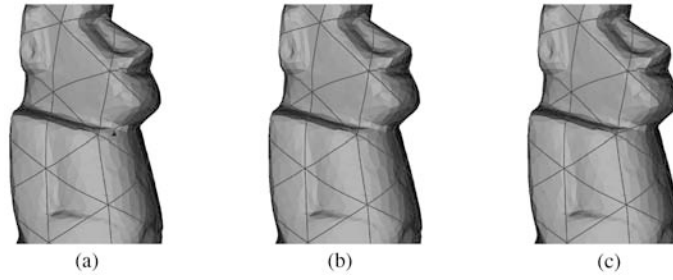


图 6 模型 moai 的三角网格构造过程

Figure 6 Construction process of a triangle mesh for the moai model. (a) The lines are isocontours of the scalar field, with the arrow pointing to an over-hanging edge; (b) after deleting the over-hanging edge, a quadrangle is obtained; (c) the quadrangle is subdivided into triangles

表 1 网格质量和计算时间 ^{a)}

Table 1 Mesh quality and computing time

Model	Number of vertices (in/out)	Singularities (in/out)	(50° ~ 70°)% (in/out)	T_s (s)	T_t (s)
Fertility (Figure 7)	13971/829	3126/114	88.5/91.9	12.5	1.9
Fandisk (Figure 9)	6500/370	1303/91	17.0/70.2	4.9	1.0
Rockarm (Figure 10)	9405/147	2055/38	79.6/75.4	10.5	0.6
Venus (Figure 11)	2758/303	450/32	42.2/89.9	2.4	0.4
Horse (Figure 12)	6798/3078	1347/553	85.3/79.5	6.4	8.5
Bunny (Figure 13)	11660/2930	2079/57	86.4/82.1	10.9	0.9
Fish (Figure 8-c2)	12502/674	8110/145	29.0/85.3	11.0	1.6

a) (in/out) 分别代表输入和输出网格, (50° ~ 70°) 一列表示角度在 (50° ~ 70°) 范围内的比例, T_s 是标量场的计算时间, T_t 是从标量场中构造三角网格的时间 (bunny 一栏的 T_s, T_t 对应其基网格时间).

这是一个非线性的能量优化问题, 共有 $4n$ 个变量 (n 是输入网格的顶点数). 本文使用 Gaussian-Newton 法迭代求解. 为了避免全零解, 我们随机选择一个点, 将其对应变量 (C_U, S_U, C_V, S_V) 的初值设置为 (1, 0, 1, 0), 其他点上的变量初值都被设置为 0.

4.4 特征对齐和带边界的模型

对于带有特征边的模型 (如 CAD 模型), 我们期望生成网格的边能够和这些特征边对齐. 对齐首先要求方向一致, 我们在方向场生成时加入硬约束, 使得特征边方向对应于 $\mathbf{U}$ 方向. 为了让特征边被等值线 ($f_U = 2n\pi$) 正确表示, 对于特征边上的任意一点 p , 我们加入如下硬约束

$$C_U(p) = 1; \quad S_U(p) = 0. \quad (12)$$

带有边界的模型在几何处理中是非常常见的, 文献 [17] 中的算法框架是无法处理这类模型的. 在本文的框架里, 只需要把边界标记为特征, 利用特征对齐就可以处理带边界的模型.

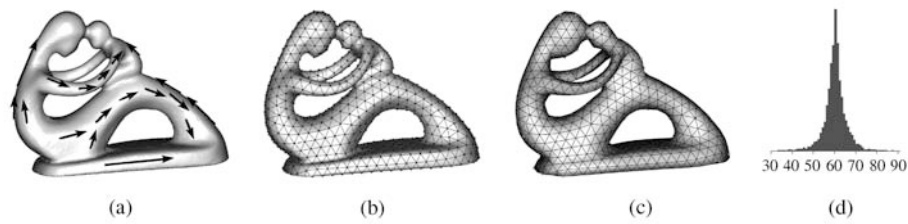


图 7 模型 fertility 的结果

Figure 7 Results of the fertility model. (a) Arrows depict the user specified directions in the interested area; (b) lines denote the isocontours of the scalar field, with black points marking the intersection points; (c) generated triangle mesh. The black points are singularities; (d) angle distribution diagram of the generated mesh. The horizontal axis is from 30° to 90°

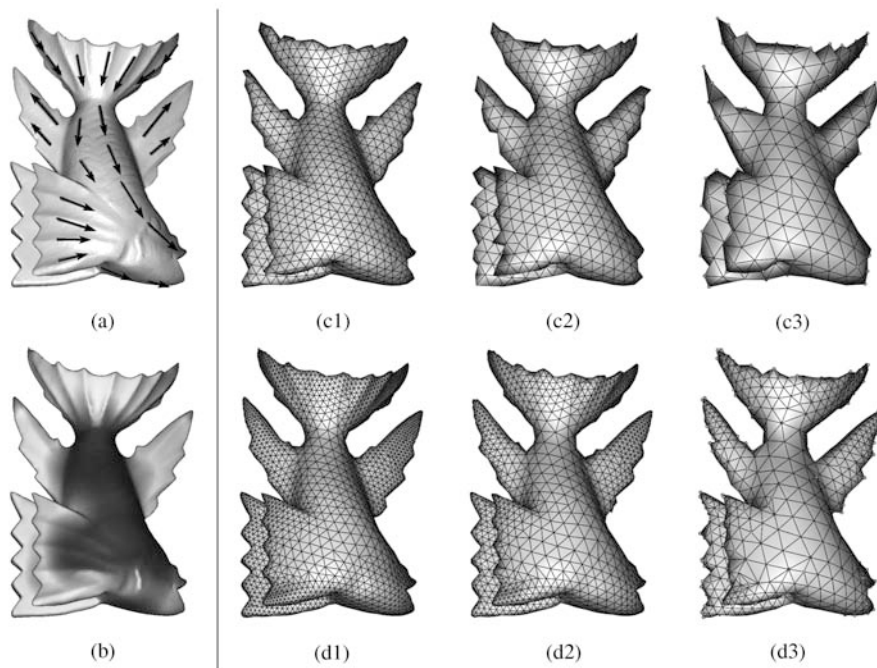


图 8 模型 wooden fish 一系列的网格生成结果

Figure 8 A series of generated mesh results for the wooden fish model. (a) The arrows depict user specified directions in the interested area; (b) density field computed according to curvature. The black area denotes a relatively large value, while the white area denotes a small value. (c1)–(c3) Results generated with no density field. the number of vertices are 1223, 674 and 297 respectively. (d1)–(d3) Results generated with a density field. the number of vertices are 3795, 2174 and 962 respectively

5 等值线抽取和三角网格构造

一旦标量场计算完成, 等值线的抽取和三角网格构造就和文献 [17] 中的四边形网格构造非常类似: 在割开后的网格上, 我们首先从每个顶点的三角函数值中反求出对应的标量值 (注意此时的标量值已经被放大了 2π 倍), 然后找出每个面片内满足 $f_U = 2n\pi, f_V = 2n\pi, f_V - f_U = 2n\pi$ 条件的等值

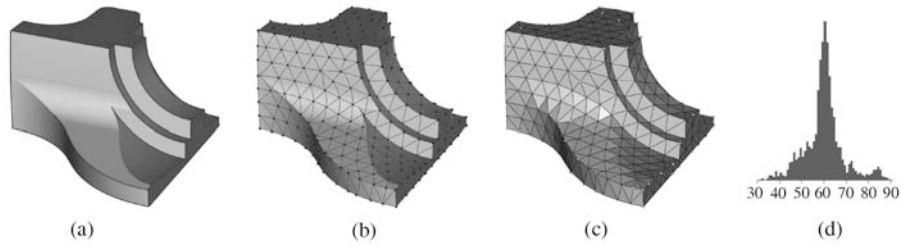


图 9 模型 fandisk 的结果

Figure 9 Results of the fandisk model. (a) The lines depict the automatically extracted feature lines; (b) isocontours of the scalar field; (c) generated triangle mesh; (d) angle distribution diagram of the generated mesh

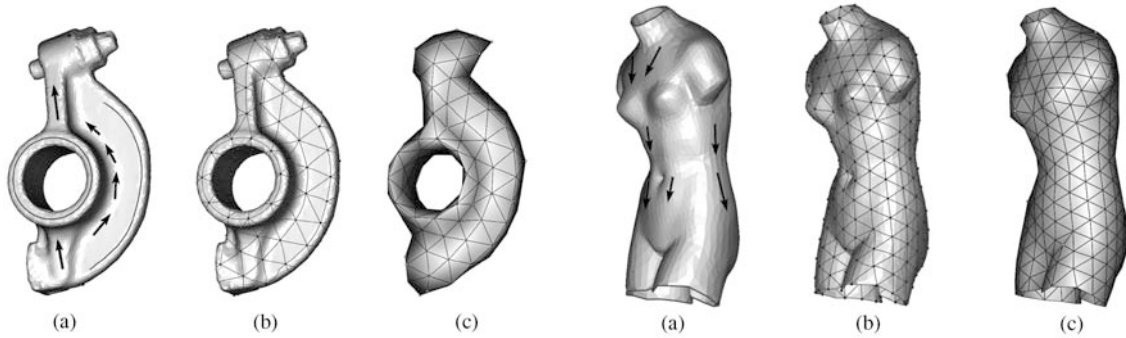


图 10 模型 rockarm 的结果

Figure 10 Results of the rockarm model. (a) The lines denote the user specified feature lines, while the arrows depict user specified directions in the interested area; (b) isocontours of the scalar field; (c) generated triangle mesh

图 11 带边界模型 venus 的结果

Figure 11 Results of the venus model with boundaries. (a) The lines represent the boundaries of the mesh, while the arrows depict user specified directions in the interested area; (b) isocontours of the scalar field; (c) generated triangle mesh

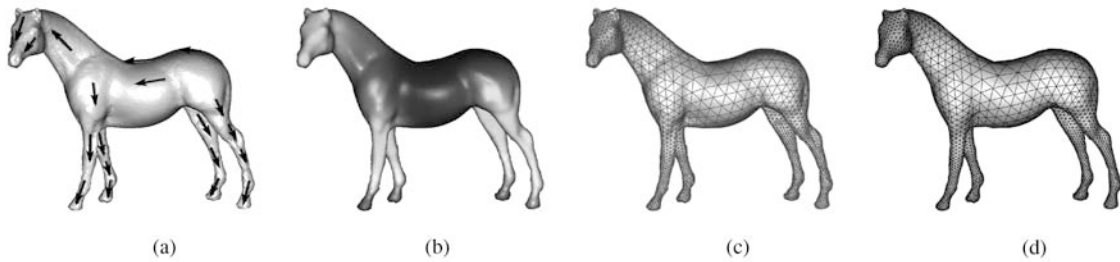


图 12 模型 horse 的结果

Figure 12 Results of the horse model. (a) The arrows depict user specified directions in the interested area; (b) density field computed according to the curvature. The black area denotes a relatively large value, while the white area denotes a small value; (c) isocontours of the scalar field; (d) generated triangle mesh

线, 最后将相邻面片之间的等值线组合起来就构成了生成三角形的边, 等值线的交点就构成了生成三角形的顶点.

与文献 [17] 一样, 在抽取等值线时会遇到奇异点, 边和面, 它们造成了悬空边 (度为 1 的边) 的出现 (图 6). 移除所有的悬空边后会导致生成网格中存在一些多边形. 本文改进了文献 [17] 中的策略, 使得它可以将这些多边形逐一转换成三角形, 步骤如下:

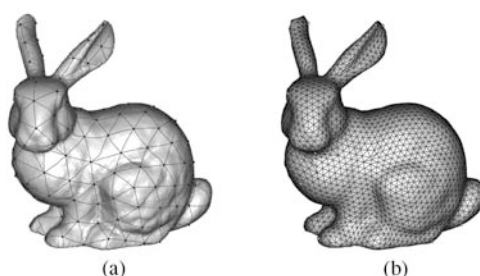


图 13 模型 bunny 的基网格以及细分结果 (由图 3 的方向场构造得到)

Figure 13 The base mesh and subdivision result of the bunny model (constructed based on the direction field in Figure 3). (a) Isocontour mesh under sparse sampling; (b) semi-regular mesh generated by subdivision of the result in (a)

- 1) 将多边形区域参数化到平面上.
- 2) 如果多边形存在小于 90° 的内角, 选择其中最接近 60° 的, 组合该内角两侧的边形成三角形, 更新当前多边形, 若当前多边形仍非三角形, 继续步骤 2). 如果不存在小于 90° 的内角, 转步骤 3).
- 3) 在多边形中心插入一个新的顶点, 将多边形上的所有顶点都连接到这个新顶点上. 在我们的实验中出现悬空边的几率很小, 大约在 $2\%\sim 4\%$, 这个比例结果和文献 [17] 相符.

6 实验结果

我们在一台 Intel Core2 E6300 1.8 GHz, 2 GB 内存的微机上进行了实验. 实验中只使用了其中一个核 (core). 表 1 中显示了生成网格的质量和计算时间. 所有的稀疏矩阵求解都使用 UMFPACK^[21].

1) 方向控制. 算法使用 6- 对称方向场来指导生成网格的边方向. 在当前的实现中, 用户首先在网格的兴趣区域指定方向 (图中的箭头), 然后光顺扩散到整个网格. 例子 (图 7) 显示生成网格的边方向很好地符合了用户要求. 我们同时还在例子 (图 8) 显示了在不同的剖分密度下, 生成网格都能很好地符合方向要求.

2) 特征对齐. 对于给定 CAD 模型, 算法首先检测特征线并引入特征约束. 在当前的实现中, 二面角大于 45° 的边会被标记为特征. 例子 fandisk (图 9) 很好地说明了本文算法处理特征约束的能力: 所有的特征边都被等值线准确地经过. 同时, 用户也可以在网格上自由指定特征线和方向, 如例子 rockarm (图 10) 所示, 结果不仅正确保持了特征, 而且边方向也符合要求.

3) 带边界的模型. 算法能够自动检测模型的边界并标记为特征, 借助特征约束来处理带边界的模型. 例子 venus (图 11) 展示了算法对带边界的模型的处理结果.

4) 密度控制. 算法使用网格上平均曲率的倒数作为初始密度, 光顺后作为输入密度场. 例子 horse (图 12) 显示了使用这样的密度控制获得自适应采样的效果, 同时边方向也符合要求.

5) 半规整网格. 当使用稀疏的采样密度时, 算法生成的网格可以用做基网格, 通过细分来生成半规整网格. 例子 bunny (图 13) 显示了这样产生的半规整网格.

6) 结果比较. 我们同时和文献 [16] 的结果做了比较. 在例子 horse (见图 12) 中, 文献 [16] 的结果中含有 586 个奇异点, 本文在方向控制的约束下产生了 553 个奇异点, 满足用户需求的同时仍然保持了规整性. 在例子 fandisk (见图 9) 中, 文献 [11] 的结果中含有 432 个奇异点, 本文的结果只有 91 个.

7 结论和未来的工作

本文提出了一个可控的高度规整三角网格生成算法, 能够有效地对生成网格的边方向, 采样密度, 特征对齐进行控制, 同时还提供了对带边界模型的处理能力. 算法还可以为半规整网格生成方向特征可控的基网格. 目前算法中, 奇异点的分布是自动优化出来的, 我们希望对奇异点的位置和类型做更加显式的控制. 如何生成具有对应关系的层次结构 (LOD) 网格也是值得尝试的方向.

参考文献

- 1 Shewchuk J R. What is a Good Linear Finite Element? Interpolation, Conditioning, Anisotropy, and Quality Measures (Preprint). In: Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, 2002. 115–126
- 2 Zorin D, Schröder P, Sweldens W. Interactive multiresolution mesh editing. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH 97. Citeseer, 1997. 259–268
- 3 Khodakovsky A, Schroder P, Sweldens W. Progressive geometry compression. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH 2000. Citeseer, 2000. 271–278
- 4 Alliez P, Meyer M, Desbrun M. Interactive geometry remeshing. ACM Trans Graph (Special Issue for SIGGRAPH Conference), 2002, 21: 347–354
- 5 Alliez P, de Verdière É C, Olivier D, et al. Isotropic surface remeshing. In: Proceedings of Shape Modeling International, Seoul, 2003. 49–58
- 6 Surazhsky V, Alliez P, Gotsman C. Isotropic remeshing of surfaces: a local parameterization approach. In: Proceedings of 12th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, 2003. 215–224
- 7 Alliez P, Ucelli G, Gotsman C, et al. Recent advances in remeshing of surfaces. In: de Floriani L, Spagnuolo M, eds. Shape Analysis and Structuring, Mathematics and Visualization. Berlin: Springer, 2008. 53–82
- 8 Eck M, DeRose T, Duchamp T, et al. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In: Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, Los Angeles, 1995. 173–182
- 9 Aaron W, Lee F, Sweldens W, et al. Maps: multiresolution adaptive parameterization of surfaces. In: Proceedings of SIGGRAPH, Orlando, 1998. 95–104
- 10 Khodakovsky A, Litke N, Schroder P. Globally smooth parameterizations with low distortion. ACM Trans Graph, 2003, 22: 350–357
- 11 Hoppe H. Progressive meshes. In: Proceedings of Computer Graphics (SIG-GRAPH '96), New York, 1996. 99–108
- 12 Garland M, Heckbert P S. Surface simplification using quadric error metrics. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH 1997, Los Angeles, 1997. 209–216
- 13 Hormann K, Labsik U, Günther G. Remeshing triangulated surfaces with optimal parameterizations. Comput-Aid Des, 2001, 33: 779–788
- 14 Wood Z J, Schröder P, Breen D, et al. Semi-regular mesh extraction from volumes. In: Proceedings of the conference on Visualization'00. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2000. 275–282
- 15 Szymczak A, Rossignac J, King D. Piecewise regular meshes: construction and compression. Graph Models, 2002, 64: 183–198
- 16 Surazhsky V, Gotsman C. Explicit surface remeshing. In: Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing, Aachen, 2003. 17–28
- 17 Ray N, Li W C, Lévy B. Periodic global parameterization. ACM Trans Graph, 2006, 25: 1460–1485
- 18 Palacios J, Zhang E. Rotational symmetry field design on surfaces. ACM Trans Graph, 2007, 26: 1–55
- 19 Bommes D, Zimmer H, Kobbelt L. Mixed-integer quadrangulation. ACM Trans Graph, 2009, 28: 1–10

- 20 Ray N, Vallet B, Li W C, et al. N -symmetry direction field design. *ACM Trans Graph*, 2008, 27: 1–13
- 21 Davis T A. A column pre-ordering strategy for the unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans Math Softw*, 2004, 30: 165–195

Controllable highly regular triangulation

HUANG Jin, ZHANG MuYang, PEI WenJie, HUA Wei* & BAO HuJun

CAD&CG State Key Lab of Zhejiang University, Hangzhou 310058, China

*E-mail: huawei@cad.zju.edu.cn

Abstract This paper presents a novel algorithm for generating a highly regular triangle mesh under various user requirements. Three scalar fields are first computed on the input mesh. Then, the intersections of their isocontours with one another are used to construct the highly regular mesh result. The proposed algorithm uses the N -symmetry direction field to guide the edge orientation. Size control is achieved by using a density function on the surface. All user requirements are incorporated into an energy optimization framework of the scalar fields, and then the isocontours of the generated scalar fields are used to construct a high quality result that satisfies all requirements. The experimental results show that the proposed method can successfully handle various user requirements and complex shapes.

Keywords triangulation, semi-regular mesh, highly regular mesh, N -symmetry direction field, feature alignment, adaptive sampling, orientation control



HUANG Jin was born in 1978. He is an associate professor in the State Key Laboratory of CAD&CG at Zhejiang University. He received his Ph.D. degree in Computer Science Department from Zhejiang University in 2007 with Excellent Doctoral Dissertation Award of CCF (China Computer Federation). His research interests include geometry processing and physically-based simulation. He has served as a reviewer for

ACM SIGGRAPH, EuroGraphics, Pacific Graphics, TVCG, etc.



HUA Wei is an associate professor in the State Key Laboratory of CAD&CG at Zhejiang University. He received his Ph.D. degree in Applied Mathematics Department from Zhejiang University in 2002. His research interests include real-time rendering and virtual reality.