



复空间之间的逆紧全纯映照

献给史济怀教授 80 华诞

李震乾^①, 张会平^{②*}

① 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190;

① 现地址: 北京大学数学科学学院, 北京 100871;

② 中国人民大学信息学院数学系, 北京 100872

E-mail: lizhenqian@amss.ac.cn, huipingzhang@ruc.edu.cn

收稿日期: 2015-05-21; 接受日期: 2015-07-23; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371025) 资助项目

摘要 本文首先回顾单位圆盘到复平面之间不存在逆紧全纯映照的证明, 然后给出这一经典结果在高维情形下的推广, 例如, 在 n 维全纯可分离流形的一个相对紧域到 $\mathbb{C}^n$ 之间不存在逆紧全纯映照. 本文还研究复空间的某些解析性质在逆紧全纯映照下保持不变, 如双曲性、测度双曲性、有界全纯函数的存在性及有界多次调和函数的存在性等.

关键词 复空间 Stein 空间 逆紧映照

MSC (2010) 主题分类 32C15, 32E10, 32H20, 32H35

1 引言

多复变函数论中, 复空间之间逆紧全纯映照的研究是一个重要课题.

一方面, 从一个复空间到另一个复空间的非平凡逆紧全纯映照的存在, 通常会对这些空间产生很强的限制, 例如:

(1) 设 X 和 Y 是紧 Riemann 面, 若存在一个非常数的全纯映照 $\pi: X \rightarrow Y$, 则 $g(Y) \leq g(X)$, 其中 $g(X)$ 和 $g(Y)$ 分别是 X 和 Y 的亏格.

(2) 令 $\pi: X \rightarrow Y$ 为一个逆紧全纯映照, 如果 X 是一个 Stein 空间, 则 $\pi(X)$ 亦为 Stein 空间; 反之, 如果 Y 是 Stein 空间, 则 X 是全纯凸的.

我们也有下面具体的例子:

例 1.1 单位圆盘 Δ 到复平面 $\mathbb{C}$ 之间不存在逆紧全纯映照.

证明 用反证法可以证明该结果. 假若 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ 是逆紧全纯映照, 则 f 非常数, 而且 $f^{-1}(0)$ 或者为空集或者为有限集.

(1) 若 $f^{-1}(0)$ 为空集, 即 f 没有零点, 则由最大模原理可知, $\frac{1}{f}$ 为常值映照, 这与 f 非常数矛盾;

(2) 若 $f^{-1}(0)$ 为有限集 $\{a_1, \dots, a_k\}$, 则 $g := \frac{f}{(z-a_1)^{n_1} \cdots (z-a_k)^{n_k}}$ 也是从 Δ 到 $\mathbb{C}$ 的逆紧全纯映照 (其中 n_i 是 f 在 a_i 的零点阶数, $1 \leq i \leq k$). 易知 $g^{-1}(0)$ 为空集, 由 (1) 可知, 它是一个常值映照, 从而得到矛盾. $\square$

另一方面, 如果逆紧全纯映照存在, 有时它们会有一些刚性, 例如: (1) 如果 X 和 Y 为紧 Riemann 面且 $g(X) = g(Y) \geq 2$, 那么, 从 X 到 Y 的任一非常数的全纯映照都是双全纯的; (2) $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) 中单位球到自身的每一个逆紧全纯映照都是全纯自同构. 一般地, 对于 $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) 中一个带有 C^2 边界的强拟凸域 X , 从 X 到它自身的逆紧全纯映照一定是双全纯的.

本文将考虑复空间之间逆紧全纯映照的存在性, 同时也讨论一些特殊情形下逆紧全纯映照的不变性质. 我们将使用多复变函数论中的一般术语, 对于复空间的一般概念及结果, 可以参见文献 [1–3], 关于逆紧全纯映照可参见文献 [4].

作为本文的主要结果, 我们证明了以下几个结论:

定理 1.1 设 X 为一个纯 n 维复空间, 其上每一个紧复解析集都是有限集, 且 X 上存在一个非常数的有界全纯函数; 设 Y 为一个 n 维正规复空间, 且存在连通复 Lie 群可递作用在 Y 上, 那么不存在从 X 到 Y 的逆紧全纯映照.

由定理 1.1 我们可以得到下面的推论:

推论 1.1 设 X 为纯 n 维全纯可分离空间中的一个相对紧域, 则不存在从 X 到 $(\mathbb{C}^*)^n$ 或复 Euclid 空间 $\mathbb{C}^n$ 的逆紧全纯映照.

此处, 全纯可分离空间 X 是指对于 X 中任给的两个不同点 x 和 y , 总存在 X 上的全纯函数 f , 使得 $f(x) \neq f(y)$. 并且习知全纯可分离空间中的每一个紧复解析集都是有限集.

定理 1.2 令 X 和 Y 为纯 n 维复空间, 且 Y 局部不可约, X 上的每一个紧复解析集都是有限的, 令 $\pi: X \rightarrow Y$ 为一个逆紧全纯映照, 那么, $\pi: X \rightarrow Y$ 是 Y 的一个解析覆盖, 并且有

(1) 如果 Y 是正规的且 $\pi|_{X \setminus \pi^{-1}(A)}: X \setminus \pi^{-1}(A) \rightarrow Y \setminus A$ 是一个正则覆盖映照, 即

$$\pi_*(\pi_1(X \setminus \pi^{-1}(A))) \subset \pi_1(Y \setminus A)$$

是一个正规子群, 那么, X 上每一个有界多次调和函数诱导出 Y 上的一个有界多次调和函数, 其中 A 是 π 的临界点集;

(2) 在 (1) 的假设下, X 上每一个有界全纯函数诱导出 Y 上的一个有界全纯函数;

(3) 如果 X 是 Ψ_X^h -测度双曲的, 则 Y 亦是 Ψ_Y^h -测度双曲的.

2 预备知识

首先, 我们回顾几个定义与定理.

定义 2.1 [5, 定义 1.4] 设 X 为一个复空间, $\varphi: X \rightarrow [-\infty, \infty)$ 为 X 上的一个函数, 如果 φ 满足下面的条件, 则称其为 (强) 多次调和函数: 对于每一个 $x \in X$, 都存在 x 的一个开邻域 U 和双全纯映照 $h: U \rightarrow V$ (其中 V 为 $\mathbb{C}^m$ 中某域 G 的一个闭的复子空间), 并且存在 (强) 多次调和函数 $\tilde{\varphi}: G \rightarrow [-\infty, \infty)$ 使得 $\varphi|_U = \tilde{\varphi} \circ h$.

Fornæss 和 Narasimhan [6] 证明了下面的定理 2.1, 由此我们可以得到定义 2.1 与文献 [7] 中给出的多次调和的定义等价.

定理 2.1 设 X 为一个复空间, $\varphi: X \rightarrow [-\infty, \infty)$ 是一个上半连续函数. 如果对于所有的全纯映照 $f: \Delta \rightarrow X$, 都有 $\varphi \circ f$ 是次调和的 (或 $-\infty$), 那么, φ 为多次调和函数.

令 B^n 为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球, 其中心在 0 点, 并设 $\mu = \mu_{B^n}$ 是由

$$\mu_{B^n} = \frac{2^n}{(1 - \|z\|^2)^{n+1}} \prod_{j=1}^n \mathrm{id}z^j \wedge d\bar{z}^j$$

定义的不变体积形式 (关于 $\mathbb{C}^n$ 中的自然坐标系 $z = (z^1, \dots, z^n)$).

设 X 为一个 n 维复空间. 给定一个 Borel 集 $A \subset X$, 并选择全纯映照 $f_i: B^n \rightarrow X$ 和 Borel 集 $E_i \subset B^n$ ($i = 1, 2, \dots$) 使得 $A \subset \cup f_i(E_i)$, 那么, 测度 Ψ_X^h (其中上标 h 意指全纯) 定义为 $\Psi_X^h[A] = \inf \sum_i \mu(E_i)$, 其中下确界取遍 f_i 和 E_i 的所有可能.

定义 2.2 [8] 如果一个复空间 X 的 Kobayashi 拟距离为其距离, 则称 X 是双曲的.

定义 2.3 [8] 设 X 为一复空间, 如果对于任一非空开子集 $B \subset X$ 都有 $\Psi_X^h[B] > 0$, 则称 X 为 Ψ_X^h -测度双曲的.

本文主要结果的证明还将用到下面的两个定理.

定理 2.2 [9, 定理 1.1] 设 X 是一个复空间, 其上连通复 Lie 群的作用是可递的, 设 Y 是一个双曲复空间, 则任何全纯映照 $\pi: X \rightarrow Y$ 都是常值映照.

定理 2.3 [7, 定理 3] 设 X 是一个正规复空间, $A \subset X$ 是一个无处稠密复解析集, 又知映照 $\varphi: X \setminus A \rightarrow [-\infty, \infty)$ 是一个多次调和函数, 若 φ 是有界的, 则 φ 能够唯一延拓为 X 上的多次调和函数.

3 主要结论的证明

本节将给出本文主要结果 (定理 1.1 和 1.2) 的证明.

定理 1.1 的证明 若 $\pi: X \rightarrow Y$ 是一个逆紧全纯映照, 则 π 是一个有限开全纯映照, 因此, π 是 Y 的一个解析覆盖. 这说明 X 上的任一全纯函数 f 满足方程 $f^m + a_1(y)f^{m-1} + \dots + a_m(y) = 0$, 其中 $a_1(y), \dots, a_m(y), y \in Y$ 在 Y 上全纯.

设 f 为 X 上的非常值有界全纯函数, 则 $a_i(y)$ ($1 \leq i \leq m$) 在 Y 上有界且由定理 2.2 知其均为常数. 因此, f 为常值函数, 从而矛盾. 所以不存在从 X 到 Y 的逆紧全纯映照. $\square$

这可以看成是引言中例子的一个推广, 因为 $\mathbb{C}$ 是连通复 Lie 群.

定理 1.2 的证明 由于 Y 局部不可约, 且 $\dim_x X = \dim_{\pi(x)} Y + \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$, 所以, $\pi: X \rightarrow Y$ 是 Y 的一个解析覆盖, 其中 x 为 X 内任意一点, π 是有限开的全纯映照.

(1) 因为 $\pi|_{X \setminus \pi^{-1}(A)}: X \setminus \pi^{-1}(A) \rightarrow Y \setminus A$ 是一个有限正则覆盖映照, 所以存在一个有限变换群 $G = \{g_0 = e, g_1, \dots, g_m\}$ 和一个同构 $\phi: (X \setminus \pi^{-1}(A))/G \rightarrow Y \setminus A$. 令 f 是 X 上的一个有界多次调和函数, 则 $\tilde{f}(x) := \sum_{i=0}^m f(g_i \cdot x)$, $x \in X \setminus \pi^{-1}(A)$ 是 $X \setminus \pi^{-1}(A)$ 上的 G -不变有界多次调和函数, 这诱导出自 $Y \setminus A$ 上的一个有界多次调和函数 F . 由定理 2.3, Y 上存在一个多次调和函数 $\tilde{F}$ 使得 $\tilde{F}|_{Y \setminus A} = F$.

(2) 由正规复空间上的 Riemann 延拓定理可知, 证明方法与 (1) 中证明类似, 不再赘述.

(3) 只需证明在稠密开集 $Y \setminus A$ 中 $\Psi_Y^h > 0$ 即可.

令 $V \subset Y \setminus A$ 是一个非空开集. 对于任意的 $y_0 \in V$, 存在 $x_0 \in X \setminus \pi^{-1}(A)$ 以及 x_0 的一个开邻域 U_0 (其中 $U_0 \subset X \setminus \pi^{-1}(A)$) 和 y_0 的开邻域 V_0 (其中 $V_0 \subset V \subset Y \setminus A$) 使得 $\pi|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ 是双全纯的. 由于 $\pi|_{X \setminus \pi^{-1}(A)}: X \setminus \pi^{-1}(A) \rightarrow Y \setminus A$ 是一个覆盖映照, 我们有 $\Psi_Y^h(V) \geq \Psi_Y^h(V_0) = \Psi_X^h(U_0) > 0$, 亦即 Y 是 Ψ_Y^h -测度双曲的. $\square$

注 3.1 (1) 在逆紧全纯映照下, 复空间的双曲性将不被保持, 在文献 [8] 中有一个例子, 即一个非双曲的复空间 X 的正规化空间 $\hat{X}$ 可以是双曲的.

(2) 类似于定理 1.2(3) 的证明, 我们可以看到, 如果 π 是一个从 X 到 Y 的局部双全纯映照, 那么, X 是 Ψ_X^h -测度双曲的当且仅当 Y 是 Ψ_Y^h -测度双曲的.

(3) 在定理 1.2(1) 的假设下, 我们考虑定理 1.1 的证明中用到的关于函数 f 的所有初等对称多项式, 则有

- (a) X 上存在非常数的全纯函数当且仅当 Y 上也存在非常数的全纯函数;
 (b) X 上存在非常数的多次调和函数当且仅当 Y 上也存在非常数的多次调和函数.

作为引言中例子的另一推广, 我们有下述命题:

命题 3.1 设 B^n 为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球, Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, 若存在逆紧全纯映照 $f: B^n \rightarrow \Omega$, 则有

- (1) Ω 为双曲的;
 (2) Ω 上存在有界全纯函数;
 (3) Ω 上存在非常数的有界 (强) 多次调和函数.

众所周知, 一个复空间的覆盖空间是双曲的当且仅当该空间是双曲的 (参见文献 [8]). 上述命题的证明可结合定理 1.2 与下述 Rudin 的定理 (参见文献 [10]) 得到.

定理 3.1 ^[10] 若 $f: B^n \rightarrow \Omega$ 是一个逆紧全纯映照, 其中 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) 中的区域, 则存在有限反射群 $\Gamma \subset U(n)$ 和 B^n 的一个自同构 ϕ 使得 $f = \eta \circ Q \circ \phi$, 其中 $Q: B^n \rightarrow B^n/\Gamma$ 是商投影, $\eta: B^n/\Gamma \rightarrow \Omega$ 是一个双全纯映照.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Grauert H, Remmert R. Coherent Analytic Sheaves. Berlin: Springer-Verlag, 1984, 113–187
- 2 Grauert H, Remmert R. Theory of Stein Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 2004, 100–185
- 3 Fischer G. Complex Analytic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1976, 108–130
- 4 Bell S R, Narasimhan R. Proper holomorphic mappings of complex spaces. In: Several Complex Variables VI. Encyclopaedia Math Sci, vol. 69. Berlin: Springer-Verlag, 1990, 1–38
- 5 Peternell T. Pseudoconvexity, the Levi problem and vanishing theorem. In: Several Complex Variables VII. Encyclopaedia Math Sci, vol. 74. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 225–225
- 6 Fornæss J E, Narasimhan R. The Levi problem on complex spaces with singularities. Math Ann, 1980, 248: 47–72
- 7 Grauert H, Remmert R. Plurisubharmonische functionen komplexen räumen. Math Z, 1956, 65: 175–194
- 8 Kobayashi S. Hyperbolic Complex Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1998, 343–359
- 9 Kobayashi S. Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings. 2nd ed. Singapore: World Scientific Publ, 2005
- 10 Forstnerič F. Proper holomorphic mappings: A survey. In: Several Complex Variables: Proceedings of the Mittag-Leffler Institute (1987–1988). Princeton: Princeton University Press, 1993, 347–347

Proper holomorphic mappings between complex spaces

LI ZhenQian & ZHANG HuiPing

Abstract In the present paper, we first recall the proof of the nonexistence of proper holomorphic mappings from the unit disc to the complex plane. Then, we generalize this classical result to the cases of higher dimension. We also study that some analytic properties keep unchanged under proper holomorphic mappings, such as the properties of hyperbolic, measure hyperbolic, the existence of bounded holomorphic functions and the existence of plurisubharmonic functions.

Keywords complex spaces, Stein spaces, proper mappings

MSC(2010) 32C15, 32E10, 32H20, 32H35

doi: 10.1360/N012015-00194