中国科学

1987 年 8 月　　A 辑　　第 8 期

关于矩阵典型域 Poisson 方程的基本解

陈广晓

(中山大学数学系，广州)

摘　要

本文讨论 n 阶矩阵典型域 $I-Z\bar{Z}'>0$ 的 Laplace-Beltrami 不变微分算子 $\mathrm{tr}\Delta_Z$ 的 Poisson 方程

$$\sum_{i,j}\sum_{k,l}(I-Z\bar{Z}')_{ij}(I-\bar{Z}'Z)_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial z_{il}\partial \bar{z}_{jk}}=f(Z)$$

的基本解的积分表达式（径向形式）。利用迭加原理和调和函数的 Poisson 积分公式[1]，我们还能得到 Poisson 方程 Dirichlet 型边值问题的解的公式。

一、$SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ 的 Harish 积分变换

在解析对应 $w(z)=i(1-z)(1+z)^{-1}$，$z(w)=(1+iw)(1-iw)^{-1}$ 之下，单位圆 $D_1(|z|<1)$ 被一一地映为上半平面 $\mathrm{H}^2(\mathrm{Im}\ w>0)$。后者常被看成 $SL_2(\mathbb{R})$ 的左-齐性空 $SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$。

设 $G=SL_2(\mathbb{R}),K=SO(2),A=\{h_t=[e^t,e^{-t}],t\in\mathbb{R}\}$ 为对角子群，N 为幂单上三角矩阵子群。G 的 Iwasawa 分解为 $x=\mathrm{nak}$ 或

$$x=\begin{pmatrix}1&u\\ &1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&\\ &e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\ -\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

如文献[2]用 $C_c^\infty(G/\!/K)$ 表 G 上的 C^∞（无穷次连续可微），适合 $f_G(k_1xk_2)=f_G(x)$，并有紧致支集的函数所成的空间，那末 Harish 积分变换定义为[2,3]：

$$(Hf)(h_t)=F_f(h_t)=e^t\int_{-\infty}^{\infty}f(h_t\cdot n_u)du, \tag{1.1$_1$}$$

$$\left(=e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}(n_u\cdot h_t)du\right) \tag{1.1$_2$}$$

由于

$$f_G(x)=\tilde{f}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}xx'\right),$$

只与 xx' 的特征值有关，故可算出

$$F_f(h_t)=e^t\int_{-\infty}^{\infty}f_G\begin{pmatrix}e^t&e^tu\\ &e^{-t}\end{pmatrix}du=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}u^2\right)e^tdu$$

本文 1986 年 8 月 25 日收到。

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\mathrm{ch}2t + \frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi. \tag{1.2}$$

今把 $f_G(x)$ 看作定义在上半平面的函数 $f(w)$，则它是“K 不变”的，故它在 $SO(2)$ 轨道 $|w - i\mathrm{ch}2t| = |\mathrm{sh}2t|$（或同心圆 $|z| = |\mathrm{th}t|$）的每一点有相同值，记为 $\tilde{f}(\mathrm{ch}2t)$.

先令 $F_f(n \cdot h_t \cdot k) = F_f(h_t)$，使 F_f 成为 G 上定义的函数，把它看作上半平面定义的函数 $F(w)$，则它是“N 不变”的，故它在 N 轨道 $\mathrm{Im}w = e^{\pm 2t}$ 的各点有相同值，其值记为 $\tilde{F}(\mathrm{ch}2t)$. 由于 $(1.1)_2$ 式，则 Harish 积分变换可实现为 $f(w) \to F(w)$:

$$F(w) = (\mathrm{Im}w)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w + x)dx. \tag{1.3}$$

设 Δ_w 记 $SL_2(\mathbb{R})$-不变 Laplace-Beltrami 算子:

$$\Delta_w = 16(\mathrm{Im}w)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \left(\equiv \Delta_z = 4(1 - z\bar{z})^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\right).$$

它在“K 不变”函数空间的分量（径向分量）为:

$$\mathscr{L}_t = \frac{1}{\mathrm{sh}2t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{sh}2t \frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{1.4}$$

Δ_w 在“N 不变”函数空间的分量为:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial}{\partial t} \equiv e^t \circ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1\right) \circ e^{-t}. \tag{1.5}$$

积分号下求 Δ_w，得

$$\Delta_w((\mathrm{Im}w)^{\frac{1}{2}} F(w)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(w + x)dx,$$

其中，$f_1(w) = \Delta_w f$ 亦为 K 不变的．设

$$F_1(w) = (\mathrm{Im}w)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(w + x)dx,$$

它是 N 不变函数，用 $\tilde{F}_1(\mathrm{ch}2t)$ 表它在 N 轨道 $\mathrm{Im}w = e^{\pm 2t}$ 处的值，用 $\tilde{f}_1(\mathrm{ch}2t)$ 表 $f_1(w)$ 在 K 轨道上的值，则

$$\tilde{F}_1(\mathrm{ch}2t) = \mathscr{M}_t[\tilde{F}(\mathrm{ch}2t)], \quad \mathscr{M}_t = \frac{d^2}{dt^2} - 1. \text{ 故得}$$

定理 1.1. Harish 积分变换(1.3)式把(1.4)式转换成常系数算子 $\mathscr{M}_t$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f}(\mathrm{ch}2t) & \xrightarrow{H} & \tilde{F}(\mathrm{ch}2t) \\ \downarrow \mathscr{L}_t & & \downarrow \mathscr{M}_t \\ \tilde{f}(\mathrm{ch}2t) & \xrightarrow{H} & \tilde{F}_1(\mathrm{ch}2t) \end{array}$$

(1.2) 式等价于

$$\tilde{F}(\mathrm{ch}2t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\mathrm{ch}2t + \frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi.$$

利用文献 [2]73 页的引理或文献 [3]340 页的计算，其逆变换为:

$$\tilde{f}(\mathrm{ch}2t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}\left(\mathrm{ch}2t + \frac{1}{2}\eta^2\right) d\eta^2$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{|t|}^{\infty} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\tau) - \varphi(t)}} \tag{1.6}$$

$(\varphi(\tau) = \mathrm{sh}^2\tau)$.

一般地，把积分，

$$F(t) \to f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{|t|}^{\infty} \frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\tau) - \varphi(t)}} \tag{1.7}$$

变换简记为：

$$f(t) = (H_\varphi F)(t) = H_{\varphi(t)}F(t).$$

它是文献[3]写出的 Abel 积分变换的反演．这里，常设 $\varphi(t)$ 为偶函数，而使映射 $t^2 \longmapsto \varphi(t)$ 是实轴正半轴 $(x \geqslant 0)$ 到自身的 Jocobian 元处为零的一对一的解析对应，而设 $F(t)$ 为偶函数，且当 $t \to \infty$ 时适合

$$\lim_{t\to\infty} t^{m_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_2} F(t) = 0$$

(速降条件)．本文常设 $\varphi(t)$为 $\mathrm{sh}^2 t$, $\left(\frac{1}{R}\,\mathrm{sh}Rt\right)^2$ 及 t^2.

对于变换(1.7)式，不难验证

$$H_\varphi H_\varphi f = \left(-\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\varphi}\right)^t.$$

定理 1.2. 设 $f(t) \equiv E(\varphi(t)) = E(y) \quad (y = \varphi(t))$，则

$$\left[Q\left(\frac{d}{dy}\right) \circ H_y\right] E = \left[H_y \circ Q\left(\frac{d}{dy}\right)\right] E,$$

$$\left[Q\left(y\frac{d}{dy}\right) \circ H_y\right] E = \left[H_y \circ Q\left(y\frac{d}{dy} - \frac{1}{2}\right)\right] E.$$

这儿 $Q(\xi)$ 为 ξ 的多项式．

证．这只需在 $Q(\xi) \equiv \xi$ 时证明，即证

$$y\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} E'(y+\xi^2)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d}{dx}\left(x\frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}E\right)\right]_{x=y+\xi^2} \cdot d\xi,$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty} yE''(y+\xi^2)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\left[(y+\xi^2)E''(y+\xi^2) + \frac{1}{2}E'(y+\xi^2)\right]d\xi.$$

这不难利用分部积分法证得．

由这定理不难给出定理 1.1 另一个证明．

定理 1.3. 设 $\mathscr{L}_t$, $\mathscr{M}_t$ 等仍如定理 1.1，则

$$\mathscr{L}_t \circ H_{\mathrm{sh}^2 t} = H_{\mathrm{sh}^2 t} \circ \mathscr{M}_t, \tag{1.8}$$

即

$$(\mathrm{sh}2t)^{-1}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{sh}2t\frac{d}{dt}\right)\int_{|t|}^{\infty}\frac{\partial f(\tau)}{\partial\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\tau - \mathrm{sh}^2 t}}$$

$$= \int_{|t|}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - 1\right)f(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\tau - \mathrm{sh}^2 t}}. \tag{1.8$_1$}$$

证．换变数，设 $y = \mathrm{sh}^2 t$，则算得：

$$\mathscr{L}_t = Q_1\left(y\frac{d}{dy}\right) + Q_2\left(y\frac{d}{dy}\right)\circ\frac{d}{dy},$$

$$\mathscr{M}_t = Q_1\left(y\frac{d}{dy}-\frac{1}{2}\right) + Q_2\left(y\frac{d}{dy}-\frac{1}{2}\right)\circ\frac{d}{dy}.$$

而且 $Q_1(\xi)=4(\xi+1)\xi$，$Q_2(\xi)=4(\xi+1)$；因此 $(1.8)_1$ 式可由定理 1.2 推出.

附记. 在 $(1.8)_1$ 式中，用 Rt 代 t，$R\tau$ 代 τ，可得

$$\left(\frac{1}{R}\operatorname{sh}(2Rt)^{-1}\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{1}{R}\operatorname{sh}(2Rt)\right)\frac{d}{dt}\right)\right)\int_{|t|}^{\infty}\frac{df}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\operatorname{sh}R\tau\right)^2-\left(\frac{1}{R}\operatorname{sh}Rt\right)^2}}$$

$$=\int_{|t|}^{\infty}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}-\frac{1}{R^2}\right)f\cdot\frac{d\tau}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\operatorname{sh}R\tau\right)^2-\left(\frac{1}{R}\operatorname{sh}Rt\right)^2}}.$$

令 $R\to\infty$，形式上可得

$$t^{-1}\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}\right)\int_{|t|}^{\infty}\frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-t^2}}=\int_{|t|}^{\infty}\frac{d^3f}{d\tau^3}\cdot\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-t^2}}, \tag{1.9}$$

或一般的

$$Q\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}\right)\right)\circ H_{(t^2)}=H_{(t^2)}\circ Q\left(\frac{d^2}{dt^2}\right). \tag*{$(1.9)_1$}$$

它们亦能用定理 1.2 推出.

二、Poisson 方程的基本解：多圆柱场合

上节的 Harish 积分变换可建立多圆柱广义的 Poisson 方程的基本解与 $\mathbb{R}^n$ 的常系数 Poisson 方程的基本解的联系. 先考虑 $\mathbb{R}^n$ 的广义 Poisson 方程

$$\sum_1^n\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\alpha^2 u=f(x) \tag{2.1}$$

$(\alpha>0)$，并设

$$G^{(1,\alpha)}(r)=\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha r},\quad G^{(2k+1,\alpha)}(r)=\left(-\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dr}\right)^k G^{(1,\alpha)}, \tag*{$(2.2)_1$}$$

$$\begin{aligned}G^{(2k,\alpha)}(r)&=H_{(r^2)}G^{(2k-1,\alpha)}(r)\\&=-\frac{1}{\pi}\int_r^{\infty}\frac{\partial G^{(2k-1,\alpha)}(R)}{\partial R}\frac{dR}{\sqrt{R^2-r^2}}.\end{aligned} \tag*{$(2.2)_2$}$$

利用定理 1.2 不难建立

$$G^{(n,\alpha)}(r)=(H_{(r^2)})^{n-1}G^{(1,\alpha)}(r),$$

$$G^{(2k,\alpha)}(r)=\left(-\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}G^{(2,\alpha)}(r).$$

而 $G^{(2,\alpha)}(r)$ 与虚宗量的零阶柱函数[4]：

$$K_0(x)=\int_0^{\infty}e^{-x\operatorname{ch}\xi}d\xi=\int_x^{\infty}e^{-\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}.$$

有下述关系：

$$G^{(2,\alpha)}(r) = K_0(\alpha r). \tag{2.2}$$

定理 2.1. 设 $f(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，则(2.1)式有下述 C^∞ 解：

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} f(y) G^{(n,\alpha)}(|x-y|)(dy). \tag{2.3}$$

函数(2.2)式有下述三性质：

i) 当 $r>0$ 时，

$$\left[r^{1-n}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d}{dr}\right)-\alpha^2\right]G^{(n,\alpha)}(r) = 0; \tag{2.4$_1$}$$

ii) 当 $r\to 0$ 时，$G^{(n,\alpha)}$ 以 $G^{(n,0)}$ 为“渐近主部”：

$$G^{(n,\alpha)}(r) \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Big/(4\pi^{n/2}r^{n-2}) \quad (n\geqslant 3);$$

$$G^{(2,\alpha)}(r) \sim \frac{1}{2\pi}\ln r; \tag{2.4$_2$}$$

iii) 当 $r\to\infty$ 时，

$$G^{(n,\alpha)} = O(r^{\frac{1-n}{2}}e^{-\alpha r}), \tag{2.4$_3$}$$

故定理 2.1 当 $n\geqslant 4$ 的场合也不难按文献[4]中讨论牛顿引力势类似的经典步骤证得.

现考虑多圆柱 $D_n(|z_j|<1,\ j=1,2,\cdots,n)$ 的广义 Poisson 方程：

$$4\sum_1^n (1-z_j\bar{z}_j)^2\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_j} - \beta^2 u = f(z) \tag{2.5}$$

$(\beta\geqslant 0)$，同时考虑函数

$$G_{(n,\beta)}(t_1,\cdots,t_n) = (H_{\mathrm{sh}^2 t_1}\circ\cdots\circ H_{\mathrm{sh}^2 t_n})\left(G^{(n,\alpha)}\left(\sqrt{\sum_1^n t_j^2}\right)\right), \tag{2.6}$$

这里 $\alpha^2=\beta^2+n$，$t_j=\frac{1}{2}\ln((1+|z_j|)/(1-|z_j|))$. (2.6)式不难化为：

$$\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n\int_{|t_1|}^\infty\cdots\int_{|t_n|}^\infty \frac{\partial^n G^{(n,\alpha)}(r)}{\partial\tau_1\cdots\partial\tau_n}\cdot\prod_1^n\left(\frac{d\tau_j}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\tau_j-\mathrm{sh}^2 t_j}}\right)$$
$$= \int_{|t_1|}^\infty\cdots\int_{|t_n|}^\infty G^{(3n,\alpha)}(r)\cdot\prod_1^n\left(\frac{2\tau_j d\tau_j}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\tau_j-\mathrm{sh}^2 t_j}}\right), \tag{2.7}$$

其中 $r=\sqrt{\sum\tau_j^2}$，$R=\sqrt{\sum t_j^2}\neq 0$.

利用 $G^{(n,\alpha)}(r)$ 在无穷远处的速降条件，由第一节的定理不难推出，当 $R\neq 0$ 时，

$$\left(\sum_1^n \mathscr{L}_{t_j}-\beta^2\right)G_{(n,\beta)}(t_1,\cdots,t_n) = 0, \tag{2.8$_1$}$$

这儿 $\left(\sum_1^n\mathscr{L}_{t_j}-\beta^2\right)$ 是(2.5)式左边算子的径向分量.

今往证，当 $R^2=\left(\sum_1^n t_j^2\right)\to 0$ 时，

$$G_{(n,\beta)}(t_1,\cdots,t_n) = (\Gamma(n-1)/(4\pi^n R^{2n-2}))\cdot(1+O(R^2)). \tag{2.8$_2$}$$

为此设 $\frac{1}{R}(t_1, \cdots, t_n) = (a_1, \cdots, a_n)$ 为固定的单位向量，并置 $\mathrm{sh}_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{sh}(\varepsilon u)$。在(2.7)式中置 $t_j = Ra_j$，$\tau_j = Rb_j$，易得

$$R^{2n-2}G_{(n,\beta)}(Ra_1, \cdots, Ra_n) = \int_{|a_1|}^{\infty}\cdots\int_{|a_n|}^{\infty} G^{(3n,R\alpha)}\left(\sqrt{\sum b_j^2}\right)\cdot\prod_1^n\left(\frac{2b_j db_j}{\sqrt{\mathrm{sh}_R^2(b_j) - \mathrm{sh}_R^2(a_j)}}\right). \tag{2.9}$$

利用等式

$$\int_{|t_1|}^{\infty}\cdots\int_{|t_n|}^{\infty}\frac{\partial^n G^{(n,\alpha)}\left(\sqrt{\sum\tau_j^2}\right)}{\partial\tau_1\cdots\partial\tau_n}\cdot\prod_1^n\left(\frac{d\tau_j}{\sqrt{\tau_j^2 - t_j^2}}\right) = G^{(2n,\alpha)}(R) \tag{2.10}$$

$(\alpha \geqslant 0)$知，当 $R\to 0$ 时，(2.9) 式具有极限 $G^{(2n,0)}\left(\left(\sum a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \Gamma(n-1)/(4\pi^2)$，故得 $(2.8)_2$ 式。

利用中值定理：$1 \leqslant \frac{\mathrm{sh}(2t)}{2t} < \frac{\mathrm{sh}^2\tau - \mathrm{sh}^2 t}{\tau^2 - t^2} < \frac{\mathrm{sh}(2\tau)}{2\tau}$，及等式 (2.10)，不难得到，当 $R\to\infty$ 时，

$$G_{(n,\beta)}(t_1, \cdots, t_n) = O\left(\left(\prod_1^n\sqrt{\frac{2t_j}{\mathrm{sh}^2 t_j}}\right)e^{-\alpha R}\cdot R^{\frac{1}{2}-n}\right) \quad (\alpha^2 = \beta^2 + n). \tag{2.8$_3$}$$

定理 2.2. 设 $n \geqslant 2$，$f(z)\in C_c^\infty(D_n)$. 则(2.5)式有下述 C^∞ 解：

$$u(z) = -\int_{\zeta\in D_n} f(\zeta)G_{(n,\beta)}(t_1(z,\zeta), \cdots, t_n(z,\zeta))(d\zeta). \tag{2.11}$$

这儿 $(d\zeta) = \prod_1^n (1 - \zeta_j\bar{\zeta}_j)^{-2}d\xi_j d\eta_j$ 为 D_n 的非欧体积元素，

$$\mathrm{th}(t_j) = |(z_j - \zeta_j)/(1 - \bar{\zeta}_j z_j)| \quad (\zeta_j = \xi_j + i\eta_j).$$

当 $\mathrm{dist}(z, 0) = R\to\infty$ 时，(2.11) 式亦有估计 $(2.8)_3$ 式.

注. 若在(2.11)式中把 $f(\zeta)$ 换为 $f^K(\zeta)$：

$$f^K(\zeta) = (2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi}\cdots\int f(\zeta_1 e^{i\theta_1}, \cdots, \zeta_n e^{i\theta_n})(d\theta),$$

那末 $u(z)$ 将变成 $u^K(z)$。又当 $f(\zeta) = f^K(\zeta)$ 时，(2.11)式还可表为另一形式

$$u(z) = -\int_{\zeta\in D_n} G_{(n,\beta)}(\zeta)f\left(\frac{z_1 - \zeta_1}{1 - \bar{\zeta}z_1}, \cdots, \frac{z_n - \zeta_n}{1 - \bar{\zeta}_n z_n}\right)(d\zeta). \tag{2.11$_1$}$$

定理 2.2 的证明. 把(2.11)式代入(2.5)式，往证(2.5)式变为恒等式. 不失一般性，只需证等号在原点成立：

$$\left(\sum_1^n\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_j} - \beta^2 u\right)(0) = f(0). \tag{2.12$_1$}$$

由于上述注记，不失一般性，可在 $f(\zeta) = f^K(\zeta)$ 的条件下证明 $(2.11)_1$ 式.

由于 $(2.8)_3$ 式，可对 $(2.11)_1$ 式在积分号下求 Laplace(令 $z = 0$，并把 ζ 改写为 z)，故知 $(2.12)_1$ 式等价于证明

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_n - B_\varepsilon} G_{(n,\beta)}(z)\left[\left(\sum_1^n(1 - z_j\bar{z}_j)^2\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial\bar{z}_j} - \beta^2\right)f\right](z)\cdot(dz) = f(0), \tag{2.12$_2$}$$

其中

$$B_\varepsilon = \left\{ z \in D_n :\ \mathrm{dist}^2(z, 0) = \sum_1^n \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{1 + |z_j|}{|1 - |z_j||} \right) < \varepsilon^2 \right\}.$$

设M为m维 Riemann 流形，φ: $q \to (x_1(q), \cdots, x_m(q))$ 为局部坐标系，g 为 Riemann 结构. 按下面诸式定义量 g_{ij}, g^{ij}, $\bar{g}$:

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad \sum_j g_{ij} g^{ik} = \delta_{ik}, \bar{g} = |\det(g_{ij})|.$$

由于

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (f \in C^\infty(M)), \quad \mathrm{div} X = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\bar{g}} X^i),$$

故

$$\Delta f \equiv \mathrm{div}\ \mathrm{grad} f = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \sum_k \partial_k (\sum g^{ik} \sqrt{\bar{g}}\, \partial_i f).$$

设区域Ω包含在坐标邻域中(边界 $\partial\Omega$ 足够光滑)，设 $u, v \in C^\infty(M)$，则 Green 定理可表为:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \sqrt{\bar{g}}\, (dx) = \oint_{\partial\Omega} (\sqrt{\bar{g}}\, (dx), u\,\mathrm{grad} v - v\,\mathrm{grad} u).$$

这儿，若 $X = \sum X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$，则沿着 $\partial\Omega$，被积式

$$\langle \sqrt{\bar{g}}\, dx_1 \cdots dx_n,\ X \rangle = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sqrt{\bar{g}}\, X^j (dx_1 \cdots \hat{dx_j} \cdots dx_m)^{[5]}.$$

由于 $(2.8)_1$ 式，则 $(2.12)_2$ 式左边等于

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_n - B_\varepsilon} \left(\sum_1^n (1 - z_j \bar{z}_j)^2 \left(G_{(n,\beta)}(z) \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} - f(z) \frac{\partial^2 G_{(n,\beta)}}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) (dz) \right).$$

由上述 Green 定理及 $(2.8)_2$ 式，知 $(2.12)_2$ 式的证明等价于证

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{\partial B_\varepsilon} \langle (dz),\ \mathrm{grad} G_{(n,\beta)} \rangle = 1. \tag{2.12$_3$}$$

若用 $I_R(a_1, \cdots, a_n)$ 表(2.9)式右边的积分，易见上式中的面积分可表为:

$$[\Gamma(n)/(2\pi^n)] \oint_{\sum w_j \bar{w}_j = 1} \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} I_\varepsilon - (2n - 2) I_\varepsilon \right] d\sigma_1, \tag{2.13}$$

其中 $d\sigma_1$ 为单位球面 $\sum w_j \bar{w}_j = 1$ 上的面积元素，

$$I_\varepsilon = I_\varepsilon(|w_1|, \cdots, |w_n|).$$

由于当 $\varepsilon \to 0$, I_ε 及 $\dfrac{1}{\varepsilon} \dfrac{d}{d\varepsilon} I_\varepsilon$ 都有有限的极限，故易得 $(2.12)_3$ 式. 定理证毕.

三、Poisson 方程的基本解：典型域场合

文献[6]中给出了典型域 R_I 的调和算子 ($4\mathrm{tr}\Delta_Z$) 的径向分量.

设 $Z\bar{Z}'$ 的特征值为 $\mathrm{th}^2 t_1, \cdots, \mathrm{th}^2 t_n$ ($t_1 \geqslant \cdots t_n \geqslant 0$)，则存在酉方阵$U$和 V，使[1]

$$UZV^{-1} = [\mathrm{th} t_1, \cdots, \mathrm{th} t_n], \tag{3.1}$$

而且 R_I 上任一"K不变函数"(即适合 $f(UZV^{-1}) = f(Z)$ 者)完全由它在对角形(3.1)式上

的值唯一地确定. 依文献 [6]72 页,则 $4\mathrm{tr}\Delta_Z$ 的径向分量为:

$$\left[\omega^2(t)\prod_1^n(\mathrm{sh}2t_j)\right]^{-1}\sum_1^n\frac{\partial}{\partial t_k}\left[\left(\omega^2(t)\prod_1^n(\mathrm{sh}2t_j)\cdot\frac{\partial}{\partial t_k}\right]\right.$$

$$=\omega(t)^{-1}\left[\sum_1^n\mathscr{L}_{t_k}\circ\omega(t)-\sum_1^n\mathscr{L}_{t_k}(\omega(t))\right]$$

$$=\omega(t)^{-1}\left(\sum_1^n\mathscr{L}_{t_k}-\frac{4}{3}n(n^2-1)\right)\circ\omega(t). \tag{3.2}$$

这儿 $\omega^2(t)\prod_1^n(\mathrm{sh}2t_jdt_j)$ 为"极坐标形式"的积分元素, $\omega(t)$ 为:

$$2^{-\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{p<q}(\mathrm{ch}2t_p-\mathrm{ch}2t_q)=\prod_{p<q}(\mathrm{sh}^2t_p-\mathrm{sh}^2t_q). \tag{3.3}$$

方程(2.5), 当 $\beta^2=\frac{4}{3}n(n^2-1)$ 时的基本解的求得,使得 $R_I(n)$ 的调和算子的基本解的"径向形式"的求解成为可能. 为说明这些,需要进一步讨论多圆柱和典型域 R_I 的球变换、Harish 积分变换 (及 Divac 序列等) 的关系. 我们把这些关系留到第四节讨论. 我们先用(2.6)和(2.7)式表出 $R_I(n)$ 的解,讨论它们的性质,再建立相应的定理.

令

$$\widetilde{G}(t_1,\cdots,t_n)=(2\pi)^{-n(n-1)}\omega(t)^{-1}\prod_{j<k}(\mathscr{L}_{t_j}-\mathscr{L}_{t_k})G_{(n,\beta)}(t), \tag{3.4}$$

其中 $\beta^2=\frac{4}{3}n(n^2-1)$. 由于 $G_{(n,\beta)}$ 是 $t_1^2,\cdots,t_n^2$ 的对称解析函数,以原点为唯一的极点,易见(3.4)式亦有同样的性质. 设 $G_0(Z)$ 是在(3.1)式上取值为 (3.4) 式的"K 不变"函数. 则 $G_0(Z)$ 是以原点为唯一极点的调和函数:

$$4\mathrm{tr}\Delta_Z G_0(Z)=0 \tag{3.5$_1$}$$

($Z\neq 0$ 时).

今往证,当 $R^2=\sum_1^n t_j^2\to 0$ 时,(3.4) 式的渐近主部为:

$$\widetilde{G}(t_1,\cdots,t_n)=(\Gamma(n^2-1)/4\pi^{n^2}R^{2n^2-2})\cdot(1+O(R^2)). \tag{3.5$_2$}$$

实际上,由(2.6)和(2.7)式及定理 1.3,(3.4)式还可表为:

$$\widetilde{G}(t_1,\cdots,t_n)\times\omega(t_1,\cdots,t_n)$$

$$=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n\int_{|t_1|}^{\infty}\cdots\int_{|t_n|}^{\infty}\prod_{j<k}\frac{1}{4\pi^2}(\mathscr{M}_{\tau_j}-\mathscr{M}_{\tau_k})\circ\prod_1^n\left(\frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)\circ G^{(n,\alpha)}\cdot\prod_1^n\frac{d\tau_j}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\tau_j-\mathrm{sh}^2t_j}}$$

$$=\int_{|t_1|}^{\infty}\cdots\int_{|t_n|}^{\infty}G^{(2n^2+n,\alpha)}(r)\prod_{j<k}(\tau_j^2-\tau_k^2)\cdot\prod_1^n\frac{2\tau_jd\tau_j}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\tau_j-\mathrm{sh}^2t_j}}. \tag{3.6}$$

(利用文献 [7]255 页的定理完成高阶微分运算).

设 $(a_1,\cdots,a_n)=\frac{1}{R}(t_1,\cdots,t_n)\left(R^2=\sum_1^n t_j^2\right)$, 和得到(2.9)式相同的计算,可知 $R^{2n^2-2}\cdot\widetilde{G}(t_1,\cdots,t_n)$ 等于

$$\left(\prod_{j<k}(\mathrm{sh}_R^2(a_j)-\mathrm{sh}_R^2(a_k))\right)^{-1}\int_{|a_1|}^{\infty}\cdots\int_{|a_n|}^{\infty}G^{(2n^2+n,R\alpha)}(r)\prod_{j<k}(b_j^2-b_k^2)$$
$$\times\prod_1^n\left(\frac{2b_jdb_j}{\sqrt{\mathrm{sh}_R^2(b_j)-\mathrm{sh}_R^2(a_j)}}\right) \tag{3.7}$$

$\left(r^2=\sum b_j^2,\ \mathrm{sh}_\varepsilon(a)=\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{sh}(\varepsilon a)\right)$. 先证

引理 3.1. 设 $f(\xi)\in C^\infty([0,\infty))$，则

$$\prod_{j<k}\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\left(t_j\frac{\partial}{\partial t_j}\right)-\frac{1}{t_k}\frac{\partial}{\partial t_k}\left(t_k\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\right)f\left(\frac{1}{2}\sum_1^n t_j^2\right)$$
$$=\prod_{j<k}(t_j^2-t_k^2)\cdot f^{(n(n-1))}\left(\frac{1}{2}\sum_1^n t_j^2\right). \tag{3.8}$$

这儿，$f^{(n(n-1))}(\xi)$ 为 $f(\xi)$ 的 $n(n-1)$ 阶导数.

这可用证文献 [7]255 页的公式的类似方法证之. 设 $\xi=\frac{1}{2}\sum_1^n t_i^2$，易见 (3.8) 式左边等于

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant N}P_k(t_1^2,\cdots,t_n^2)\cdot f^{(k)}(\xi)$$

$(N=n(n-1))$，而 P_k 为 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 次多项式. 由(3.8)式关于 $t_1^2,\cdots,t_n^2$ 的完全反对称性，知 P_k 为反对称多项式，故当 $1\leqslant k\leqslant N-1$ 时，$P_k=0$. 显然有 $P_N=\prod_{j<k}(t_j^2-t_k^2)$，故得引理.

又证等式

$$\int_{|t_1|}^{\infty}\cdots\int_{|t_n|}^{\infty}G^{(2n^2+n,\alpha)}(\sqrt{\sum\tau_j^2})\cdot\prod_{j<k}(\tau_j^4-\tau_k^2)\cdot\prod_1^n\left(\frac{2\tau_jd\tau_j}{\sqrt{\tau_j^2-t_j^2}}\right)$$
$$=\prod_{j<k}(t_j^2-t_k^2)\cdot G^{(2n^2,\alpha)}(R), \tag{3.9}$$

左边可写成

$$\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n(2\pi)^{-n(n-1)}\int_{|t_1|}^{\infty}\cdots\int_{|t_n|}^{\infty}\prod_{j<k}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau_j^2}-\frac{\partial^2}{\partial\tau_k^2}\right)\prod_1^n\left(\frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)G^{(n,\alpha)}\cdot\prod_1^n\left(\frac{d\tau_j}{\sqrt{\tau_j^4-t_j^2}}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n\frac{1}{(2\pi)^{n(n-1)}}\prod_{j<k}\left(\frac{1}{t_j}\frac{\partial}{\partial t_j}\left(t_j\frac{\partial}{\partial t_j}\right)-\frac{1}{t_k}\frac{\partial}{\partial t_k}\left(t_k\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\right)\cdot G^{(2n,\alpha)}(\sqrt{\sum t_i^2})$$

(这儿利用了第一节的定理及等式(2.10)). 因此(3.9)式可从引理 3.1 推出.

若把(3.7)式记为 $J_R(a_1,\cdots,a_n)$，则容易算出

$$\lim_{R\to 0}J_R=G^{(2n^2,0)}(\sqrt{\sum a_j^2})=\Gamma(n^2-1)/(4\pi^{n^2})$$

以及

$$\lim_{R\to 0}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}J_R\right)=\mathrm{const.}\ G^{(2n^2-2,0)} \tag{1}$$

(后者的计算不赘). 因此得到 $(3.5)_2$ 式.

当 $R = \sqrt{\sum t_i^2} \to \infty$ 时，相应的讨论给出：

$$\tilde{G}(t_1, \cdots, t_n) = O\left(\prod_{j<k}\left(\frac{t_j^2 - t_k^2}{\mathrm{sh}^2 t_j - \mathrm{sh}^2 t_k}\right) \cdot \prod_1^n \left(\sqrt{\frac{2t_j}{\mathrm{sh}\, 2t_j}}\right) \cdot e^{-\alpha R} \cdot R^{\frac{1}{2}-n^2}\right) \qquad (3.5)_3$$

$\left(\alpha^2 = \frac{4}{3} n\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\right)$.

利用(3.4)式等，不难作出双变元的 Green 函数如下：若 g_{Z_0}: $R_I(n) \to R_I(n)$ 是把 Z_0 变为原点的解析自同胚[8]，若它把W变为 Z，则置

$$G(Z_0, W) = G_0(Z). \qquad (3.10)$$

易见，$G(Z, W) = G(W, Z)$.

设 $\phi(U)$ 为特征边界（酉流形）$\mathscr{L}_I$ 上定义的连续函数，$P_I(Z, U)$ 表 R_I 的 Poisson 核[8]. 类似于定理 2.1, 2.2, 我们可证得：

定理 3.1. Poisson 方程

$$4\sum_{i,j}\sum_{k,l}(I - Z\bar{Z}')_{ij}(I - \bar{Z}'Z)_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial z_{il}\partial \bar{z}_{jk}} = f(Z) \qquad (3.11)$$

$(f(Z) \in C_c^\infty(R_I))$ 的，在闭包 $\overline{R_I(n)}$ 上连续，且在特征边界 $\mathscr{L}_I$ 上取指定值 $\phi(U)$ 的解为：

$$u(Z) = -\int_{R_I} f(W) G(Z, W)(dW) + \int_{\mathscr{L}_I} P_I(Z, U)\phi(U)(dU). \qquad (3.12)$$

显然，适合定理条件的解是唯一的.

四、关于 R_I 的 Harish 反变换的一个附记

由文献[2]还知道，Harish 积分变换(1.2)式（记为 H: $f \to F_f$）与 Fourier 球变换

$$\mathscr{S}: f(x) \to \hat{f}(v) = \int_G f(x)\varphi_v(x)dx$$

有下述关系：

$$\mathscr{S} = \mathscr{F} \circ H,$$

其中 $\mathscr{F}$ 表示 Fourier-Mellin 积分变换[3]：

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F_f(t)e^{i\nu t}dt \left(= 2\int_0^\infty F_f(t)\cos(\nu t)dt\right)$$

一般地(如文献[5] p. 427 等)，设G为连通半单 Lie 群（具有有限中心），$G = KA_pN^+$ 为G的 Iwasawa 分解. G, K, A_P, N^+ 的 Lie 代数分别记为 ζ, $\mathfrak{k}$, η_p, n^+. 设Σ为 (ζ, η_ρ) 的根系，W为 (ζ, η_ρ) 的Weyl 群，ρ 为全体正根之和之半. 由文献[3]及文献[5]知，Harish-Chandra 的球函数公式为：

$$\phi_\nu(x) = \int_K \exp((i\nu - \rho)(H(xk))) \cdot (dk), \qquad (4.1)$$

其中 $H(x)$ 由 $x = k \cdot \exp H(x) \cdot n$ 唯一地决定，且 $\phi_{s\nu}(x) = \phi_\nu(x)$, $s \in W$. Fourier 球变换 $\mathscr{S}$(: $f(x) \to \hat{f}(\nu)$) 为：

$$\begin{aligned}\hat{f}(\nu) &= \int_G f(x)\phi_\nu(x)d_G(x)\\ &= \int_{A_P}\exp(i\nu(\log a))F_f(a)da\end{aligned}$$

$$= \int_{\eta_\rho} \exp(i\nu(H)) F_f(\exp H)(dH). \tag{4.2}$$

$f(x) \in C_c^\infty(G/\!/K)$ 的 Harish 积分变换为：

$$F_f(\exp H) = \exp(\rho(H)) \int_N f(\exp H \cdot n) dn \tag{4.3$_1$}$$

$$= \exp(-\rho(H)) \int_N f(n \cdot \exp H) dn$$

$$= \int_{\eta_\rho^*} \exp(-i\nu(H)) \hat{f}(\nu) d\nu, \tag{4.3$_2$}$$

(η_ρ^* 为 η_ρ 的对偶空间),可抽象实现为：

$$H = \mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{S}:\ f(x) \to F_f(\exp H)(H \in \eta_\rho). \tag{4.3$_3$}$$

本节利用文献 [6] 中证明的，关于球函数的 Berezin-Karpelevič 型定理，建立起多圆柱 D_n 和典型域 $R_I(n)$ 的 Fourier 球变换(径向形式)间的联系．具有这种联系的原因之一，是 D_n 在下述映射下成为 $R_I(n)$ 的嵌入子流形：

$$D_n \ni (z_1, \cdots, z_n) \hookrightarrow [z_1, \cdots, z_n] \in R_I(n)\ .$$

定理 4.1 (Berezin-Karpelevič)[6]．设 $G = SU(n, m)$, $K = S(U(n) \times U(m))$, $A_P = \exp\ \eta_p$, η_p 由矩阵 H_T 组成[6]：

$$H_T = \begin{pmatrix} O^{(n\times n)} & T \\ T & O^{(m\times m)} \end{pmatrix},\quad T = [t_1, \cdots, t_n],\quad m - n = k \geqslant 0.$$

则 $G/K = SU(n, m)/S(U(n) \times U(m))$ 的球函数(4.1)式，在 $x = \exp H_T$ 处的值为[6]：

$$\phi_\nu(\exp H_T)$$

$$= \frac{A \cdot \det\left({}_2F_1\left(\frac{k+1+i\nu_p}{2}\ \frac{k+1-i\nu_p}{2}, k+1; -\mathrm{sh}^2 t_q\right)\right)}{\prod\limits_{p<q} (\nu_p^2 - \nu_q^2) \prod\limits_{p<q} (\mathrm{sh}^2 t_p - \mathrm{sh}^2 t_q)}, \tag{4.4}$$

A 为归一化常数．

先给出这定理的函数论形式．

如文献[5]用 π: $G \ni x \to xK \in G/K$ (或 $x \to x(0) \in G/K$) 表 G 到对称空间 G/K 的自然投影．在定理 4.1 场合，$\exp H_T$ 的象为 R_I 中的点 $[\mathrm{th} t_1, \cdots, \mathrm{th} t_n]$，令

$$\varphi_\nu([\mathrm{th} t_1, \cdots, \mathrm{th} t_n] = \phi_\nu(H_T)),$$

故(4.4)式等于 R_I 的球函数在 $[\mathrm{th} t_1, \cdots, \mathrm{th} t_n]$ 处的值．特别，当 $n = 1$, $m = 1 + k$, 知超球的球函数

$$\varphi_{\nu_\rho}(z) = \int_{\zeta\bar{\zeta}'=1} (P_I(z, \zeta))^{\frac{1}{2}(1+k+i\nu_\rho)} (d\zeta)$$

($P_I(z,\zeta)$ 为超球的 Poisson 核[9])．在 $z\bar{z}' = \mathrm{th}^2 t$ 时的值等于超几何级数

$${}_2F_1\left(\frac{k+1+i\nu_p}{2} \frac{k+1+i\nu_p}{2}, k+1; \mathrm{sh}^2 t\right),$$

因而公式(4.4)实际上建立起 $SU(n, n+k)/S(U(n) \times U(n+k))$ 与超球 $SU(1, 1+k)/S(U(1) \times U(1+k))$ 的球函数间的关系．

单位圆的球函数(4.1)式可表为：

$$\varphi_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z} - 2|z|e^{i\theta}}\right)^{\frac{1}{2}(1+i\nu)} d\theta, \tag{4.1)$_1$}$$

球变换可表为:

$$\hat{f}(\nu) = \pi\int_0^1 f(r)\varphi_\nu(r)\frac{2rdr}{(1-r^2)^2} = \pi\int_0^\infty f(\mathrm{th}t)\varphi_\nu(\mathrm{th}t)\cdot \mathrm{sh}2t\,dt. \tag{4.2)$_1$}$$

这儿 $f(z) = f(|z|) = f(r) = f(\mathrm{th}t)$. 由定理 4.1 知, $R_I(n)$ 的球函数为:

$$\varphi_\nu^I([\mathrm{th}t_1, \cdots, \mathrm{th}t_n]) = \frac{\mathrm{const.}\ \det(\varphi_{\nu_p}(\mathrm{th}t_q))_{1\le p,q\le n}}{\prod\limits_{p<q}(\nu_p - \nu_q^2)\prod\limits_{p<q}(\mathrm{sh}^2t_p - \mathrm{sh}^2t_q)}. \tag{4.1)$_3$}$$

用 $f(\mathrm{th}T)$ 记"K 不变函数" $f(Z) = f(UZV^{-1})$ 在 $[\mathrm{th}t_1, \cdots, \mathrm{th}t_n]$ 的值,则 $R_I(n)$ 的球变换为:

$$\hat{f}(\nu_1, \cdots, \nu_n) = \frac{\pi^n}{n!}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty f(\mathrm{th}T)\varphi_\nu^I(\mathrm{th}T)\omega^2(T), \quad \prod_1^n(\mathrm{sh}\,2t_j dt_j), \tag{4.2)$_3$}$$

其中 $\omega(T)$ 为(3.3)式, $\omega^2(T)\prod\limits_1^n(\mathrm{sh}2t_j dt_j)$ 为极坐标形式的积分元素. 设

$$u(\mathrm{th}t_1, \cdots, \mathrm{th}t_n) = f(\mathrm{th}T)\cdot\omega(T), \tag{4.5}$$

$$\check{u}(\nu_1, \cdots, \nu_n) = \hat{f}(\nu_1, \cdots, \nu_n)\prod_{p<q}(\nu_p^2 - \nu_q^2). \tag{4.6}$$

反对称函数 $u(\mathrm{th}t_1, \cdots, \mathrm{th}t_n)$ 在多圆柱上唯一地确定一个反对称的"K 不变"函数 $u(z)$,易见除了差某一个常因子, $\check{u}(\nu_1, \cdots, \nu_n)$ 则是反对称函数 $u(z)$ 的 Fourier 球变换,把 $R_I(n)$ 与 D_n 的 Fourier 球变换分别记为 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{S}_n$, 那末上述叙说可写为:

$$\prod_{p<q}(\nu_p^2 - \nu_q^2)\circ\mathscr{S} = \mathscr{S}_n\circ\omega(t_1, \cdots, t_n) \tag{4.2)$_4$}$$

(不计某一个常因子).

现讨论 $R_I(n)$ 与 D_n 的 Harish 变换的形式联系. 设

$$(H_n u)(t_1, \cdots, t_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^\infty\cdots\int\check{u}(\nu_1, \cdots, \nu_n)e^{i\Sigma\nu_p t_p}(d\nu),$$

则从(4.6)式得出

$$(H_n u)(t) = \prod_{p<q}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_q^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_p^2}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^\infty\cdots\int\hat{f}(\nu)e^{i\Sigma\nu_p t_p}(d\nu),$$

其中

$$F_f(t_1, \cdots, t_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int\cdots\int_{-\infty}^\infty\hat{f}(\nu_1, \cdots, \nu_n)e^{i\Sigma\nu_p t_p}(d\nu) \tag{4.3)$_4$}$$

是 (4.3)$_3$ 式在 $\exp(H_T)$ 处的值. 易见, $u\to H_n u$ 是多圆柱 D_n 的 Harish 积分变换(不计某一常因子),且其逆变换 H_n^{-1} 为 $H_{\mathrm{sh}^2t_1}\circ\cdots\circ H_{\mathrm{sh}^2t_n}$. 因此, $R_I(n)$ 的 Harish 积分变换 (4.3)$_3$ 式的逆 $(F_f(\exp H_T)\to f(Z)\in C_c^\infty(G/\!/K))$ 可实现为:

$$f(\mathrm{th}T) = \omega(T)^{-1}(H_{\mathrm{sh}^2t_1}\circ\cdots\circ H_{\mathrm{sh}^2t_n})\left(\prod_{p<q}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_q^2}\right)\right)(F_f(\exp H_T)) \tag{4.7)$_1$}$$

(不计一常因子). 利用定理 1.3,又有

$$f(\mathrm{th}T)=\omega(T)^{-1}\left(\prod_{p<q}(\mathscr{L}_{t_p}-\mathscr{L}_{t_q})\right)(H_{\mathrm{sh}^2t_1}\circ\cdots\circ H_{\mathrm{sh}^2t_n}(F_f(\exp H_T))). \qquad (4.7)_2$$

这从另一角度解释了 $\mathbb{R}^n$，D_n 及 $R_I(n)$ 的 Green 函数存在内在联系的原因。

本文是在导师华罗庚和龚昇先生的关注下完成的，与数学研究所陆启铿、钟家庆、许以超先生的讨论亦使作者得益非浅，作者谨表示衷心的感谢。

参　考　文　献

[1] 华罗庚，多复变数函数论中的典型域的调和分析，科学出版社，北京，1958.
[2] Lang S., $SL_2(\mathbb{R})$, New Haven. Connecticut, 1974, 49, 73.
[3] Warner G., *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups.*, II, Springer-Verlag. Berlin, 1972, 339, 340.
[4] 吉洪诺夫，A. H. 等，数学物理方程(黄克欧等译)，高等教育出版社，北京，1957，631.
[5] Helgason S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, N. Y. & London, 1962, 428.
[6] Hoogenboom B., *Arkiv för matematik*, 20(1982), 1: 69—85.
[7] 龚昇，典型群上的调和分析，科学出版社，北京，1983，255.
[8] 陆启铿，典型流形与典型域，上海科技出版社，1963.
[9] Rudin W., Function Theory in the Unit Ball of C^n Springer-Verlag, Berlin, 1980, 50.