迁移理论中一类参数方程的解

喻 蕃　 阳名珠
(中国科学院原子能研究所，北京)

1976 年，Ronen[1] 等人以迁移理论为背景提出了一类为人所关注的新的积分-微分型参数方程的求解问题．从应用的角度出发，对这类参数方程已有一些近似估算和数值分析的讨论[2,3]，但严格的数学讨论有一定困难，至今未见有结果．本文针对某类迁移系统，用泛函分析的方法，在 $L^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 空间中，对此类参数方程的求解问题进行了严格的数学讨论．论证了使这类参数方程有非零解的参数的分布情况，得出了本文所定义的具有物理意义的控制临界本征值 δ_0 存在的充分必要条件，并对此 δ_0 作了具体的估算．

考虑被真空所包围，在无穷板对称的非均匀介质中无外源的定态单能中子迁移．设散射和裂变是各向同性的．那么此类新的参数方程具有形式

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{1}{\delta}\left[\dfrac{c(x)}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \psi(x, \mu')d\mu' - \sigma(x)\psi(x, \mu)\right], \\ \psi \in D_2 = \left\{\psi \in L^2(G) \,|\, \mathrm{i})\, \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \in L^2(G),\ \ \mathrm{ii})\ \begin{matrix} \psi(a, \mu) = 0, & \mu < 0 \\ \psi(-a, \mu) = 0, & \mu > 0 \end{matrix}\right\}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 δ 为非零参数，$L^2(G)$ 是相域 $G = [-a, a] \times [-1, 1]$ 上平方可和函数的全体，$2a > 0$ 为平板的厚度，$\sigma(x)$，$c(x)$ 分别是总碰撞率和散射、裂变函数．

定义 1　称方程 (1) 为控制临界本征方程．实数 δ_0 若满足：(i) 除常数因子外，δ_0 使方程 (1) 有唯一非零非负解，(ii) 若 δ 异于 δ_0 使方程 (1) 有非零解，则 $|\delta| < |\delta_0|$，(iii) 异于 δ_0 的 δ 不能使方程 (1) 有非零非负解；则称 δ_0 为控制临界本征值．

先作三点实际问题中许可的基本假设：

$\langle O_1 \rangle$ $\sigma(x)$，$c(x)$ 均为 $[-a, a]$ 上的非负可测函数；

$\langle O_2 \rangle$ 存在正数 c_0，σ_0 使得 $0 \leqslant c(x) \leqslant c_0$，$\displaystyle\int_{-a}^{a} \sigma(x)dx = \sigma_0$；

$\langle O_3 \rangle$ $\tilde{F} \subseteq F^*$，$\underset{x \in F^*}{\mathrm{Vraisup}} \dfrac{c(x)}{\sigma(x)} = K$ (正常数)，

其中 $\tilde{F} = \{x \in [-a, a] \,|\, c(x) > 0\}$，$F^* = \{x \in [-a, a] \,|\, \sigma(x) > 0\}$，$\mathrm{mes}\tilde{F} > 0$．

如令 $\lambda = \dfrac{1}{\delta}$，$\varphi(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \psi(x, \mu)d\mu$，则方程 (1) 化为

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\lambda}{2} c(x)\varphi(x) - \lambda\sigma(x)\psi(x, \mu), \\ \psi \in D_2. \end{cases} \tag{2}$$

类似于文献 [4] 中 § 2，容易证明下述定理成立．

本文 1984 年 8 月 21 日收到．

定理 1　若 $\mathrm{Re}\lambda<0$，则方程 (2) 不存在非零解。

当 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$，$\lambda\neq 0$ 时，解方程 (2) 得

$$\varphi(x)=\frac{\lambda}{2}\int_{-a}^{a}c(x')\varphi(x')\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda w\left|\int_{x'}^{x}\sigma(t)dt\right|}}{w}dwdx'=\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_{\lambda}\varphi,$$

其中 $\boldsymbol{K}_\lambda$ 是 $L^2[-a,a]$ 上的积分算子．容易证明

辅理 1　λ 使方程 (2) 有非零解 $\Longleftrightarrow$ 2 是 $\boldsymbol{K}_\lambda$ 的本征值．其对应的本征子空间的维数等于方程 (2) 的解空间维数．

定理 2　若 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$，$I_m\lambda\neq 0$，则 2 不是 $\boldsymbol{K}_\lambda$ 的本征值．

证　令 $F\{x\in F^*|x$ 的任意左邻域 U_x 满足 $\mathrm{mes}(U_x\cap F^*)>0\}$．作变换

$$s(x)=\int_{-a}^{x}\sigma(t)dt,\qquad s'(x')=\int_{-a}^{x'}\sigma(t)dt,$$

$\forall\varphi(x)\in L^2[-a,a]$ 成立

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_\lambda\varphi&=\lambda\int_{F}c(x')\varphi(x')\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda w\left|\int_{x'}^{x}\sigma(t)dt\right|}}{w}dwdx'\\&=\lambda\int_{0}^{\sigma_0}\frac{c(x'(s'))\varphi(x'(s'))}{\sigma(x'(s'))}\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda w|s-s'|}}{w}dwds'.\end{aligned}$$

令

$$A(s)=\frac{c(x(s))\varphi(x(s))}{\sigma(x(s))}\quad(s\in[0,\sigma_0]),$$

则根据文献 [4] p222 可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{K}_\lambda\varphi,c(x)\varphi(x))&=\lambda\int_{0}^{\sigma_0}\int_{0}^{\sigma_0}A(s')\bar{A}(s)\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda w|s-s'|}}{w}dwdsds'\\&=\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(w)|\Phi(w)|^2dw,\end{aligned}$$

其中

$$\Delta(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(\lambda|x|)e^{iwx}dx=\frac{2}{w}\operatorname{arctg}\frac{w}{\lambda},$$

$$E(z)=\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-zw}}{w}dw\quad(\mathrm{Re}z\geqslant 0,\ z\neq 0),$$

$$\Phi(w)=\int_{0}^{\sigma_0}A(s)e^{-iws}ds.$$

设 $\lambda=a+ib$，$a\geqslant 0$，$b\neq 0$．当 $w\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\Delta(w)&=\int_{-\infty}^{+\infty}E(\lambda|x|)e^{iwx}dx=2\int_{0}^{\infty}E(\lambda x)\cos wxdx\\&=\frac{2}{w}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{x}\sin wxdx.\end{aligned}$$

所以

$$(\boldsymbol{K}_\lambda\varphi,c(x)\varphi(x))=\frac{\lambda}{\pi}\int_{0}^{\infty}[|\Phi(w)|^2+|\Phi(-w)|^2]\frac{dw}{w}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{x}\sin wxdx,$$

$$I_m(\boldsymbol{K}_\lambda\varphi,c(x)\varphi(x))=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\pi}\int_{0}^{\infty}[|\Phi(w)|^2+|\Phi(-w)|^2]f(w)\frac{dw}{w},$$

其中 $$f(w)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\cos(bx+\theta)\sin wx dx,$$

$$\cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(i) 设 $a>0$, $b\neq 0$.

考虑函数 $f(w)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\cos(bx+\theta)\sin wx dx$ 的符号,

$$\frac{df(w)}{dw}=\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx+\theta)\cos wx dx \qquad 令\ k_1=b+w,\ k_2=b-w$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-ax}[\cos(k_1x+\theta)+\cos(k_2x+\theta)]dx$$

$$=\frac{2abw^2}{\sqrt{a^2+b^2}(a^2+k_1^2)(a^2+k_2^2)},$$

所以 $$f(w')=\int_0^{w'}\frac{df(w)}{dw}\cdot dw=\begin{cases}>0\ (b>0),\\ <0\ (b<0).\end{cases}$$

故可得 $$I_m(\boldsymbol{K}_\lambda\varphi, c(x)\varphi(x))=\begin{cases}\geqslant 0\ (b>0),\\ \leqslant 0\ (b<0).\end{cases}$$

可以断定 2 不是 $\boldsymbol{K}_\lambda$ 的本征值. 否则将有 $\varphi(x)\neq 0\in L^2[-a,a]$ 使得 $\boldsymbol{K}_\lambda\varphi=2\varphi$, 从而

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_\lambda\varphi\ \ c(x)\varphi(x)\right)=(\varphi(x),c(x)\varphi(x))\geqslant 0,\quad I_m(\boldsymbol{K}_\lambda\varphi, c(x)\varphi(x))=0.$$

所以 $\Phi(w)=0$ $(w\in(-\infty,+\infty))$, 再由 $\Phi(w)$ 的定义可得 $A(s)=0(s\in[0,\sigma_0])$, 进而成立 $c(x)\varphi(x)=0$ $(x\in F)$. 所以

$$\varphi(x)=\frac{\lambda}{2}\int_{-a}^{a}c(x')\varphi(x')dx'\int_1^\infty\frac{e^{-\lambda w\left|\int_{x'}^{x}\sigma(t)dt\right|}}{w}dw=0.$$

这与 $\varphi(x)$ 是本征函数矛盾!

(ii) 若 $a=0$, $b\neq 0$, 则直接计算可得

$$I_m(\boldsymbol{K}_\lambda\varphi, c(x)\varphi(x))=\frac{b}{2}\int_{|b|}^\infty[|\Phi(w)|^2+|\Phi(-w)|^2]\frac{dw}{w}\geqslant 0.$$

所以同理可证 2 不是 $\boldsymbol{K}_\lambda$ 的本征值.

综合 (i)、(ii) 得该定理成立. 现在考虑 $\lambda=\beta>0$. 在 $L^2(F)$ 中定义积分算子 $\boldsymbol{L}_\beta$

$$\boldsymbol{L}_\beta\varphi=\beta\int_F\sqrt{c(x)c(x')}\,\varphi(x')dx'\int_1^\infty\frac{e^{-\beta w\left|\int_{x'}^{x}\sigma(t)dt\right|}}{w}dw,\quad \forall\varphi(x)\in L^2(F).$$

所以 $$(\boldsymbol{L}_\beta\varphi,\varphi)=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(w)|\Phi_1(w)|^2dw,$$

其中 $$\Phi_1(w)=\int_0^{\sigma_0}A_1(s)e^{-iws}ds,\quad A_1(s)=\frac{\sqrt{c(x(s))}\varphi(x(s))}{\sigma(x(s))}.$$

再考虑到 $\beta\Delta(w)$ 是 β 的严格单调递增函数,我们可以证明下述诸辅理成立(参看文献[4]).

辅理 2 对 $\beta>0$, $\boldsymbol{L}_\beta$ 是 $L^2(F)$ 上的紧、正算子和正定算子.

辅理 3 2 是 $\boldsymbol{L}_\beta$ 的本征值 $\Longleftrightarrow$ 2 是 $\boldsymbol{K}_\beta$ 的本征值. 其对应的本征子空间维数相等.

辅理 4 令 $\rho_{n-1}(\boldsymbol{L}_\beta)$ 表示 $\boldsymbol{L}_\beta$ 的第 n 个本征值 $(n=1,2\cdots)$ (从大到小排列, 其重

数计算在内)，则 $\rho_{n-1}(L_\beta)$ 是 β 的严格递增连续函数，且 $\lim\limits_{\beta\to 0}\rho_{n-1}(L_\beta)=0$ $(n=1, 2\cdots)$.

定理 3　任取 $\beta>0$，成立 $\|L_\beta\|<2K$; $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\|L_\beta\|=2K$.

证　因为任取 $\varphi\in L^2(F)$, $\|\varphi\|=1$,

$$(L_\beta\varphi, \varphi)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi_1(w)|^2dw=2\int_F\frac{c(x)}{\sigma(x)}|\varphi(x)|^2dx\leqslant 2K,$$

所以 $\|L_\beta\|\leqslant 2K$ 再由辅理 4 得 $\|L_\beta\|<2K$.

任取 $\varepsilon>0$，令 $I=\left\{x\in F\left|\frac{c(x)}{\sigma(x)}\geqslant K-\varepsilon\right.\right\}$，作函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{mesI}} & x\in I,\\ 0 & x\in F\backslash I,\end{cases}\qquad A_1(s)=\frac{\sqrt{c(x(s))}\varphi(x(s))}{\sigma(x(s))},$$

$\Phi(w)=\int_0^{\sigma_0}A_1(s)e^{-iws}ds$, $s=\int_0^x\sigma(t)dt$. 显然存在 $N_0>0$ 使得

$$(L_\beta\varphi, \varphi)>\frac{\beta}{\pi N_0}\operatorname{arctg}\frac{N_0}{\beta}\int_{-N_0}^{N_0}|\Phi_1(w)|^2dw\geqslant\frac{\beta}{\pi N_0}\operatorname{arctg}\frac{N_0}{\beta}[2\pi(K-\varepsilon)-\varepsilon],$$

因此 $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\|L_\beta\|=2K$.

定理 4　任取 n 及 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使得 $\beta\geqslant M$ 时，$\rho_{n-1}(L_\beta)\geqslant 2K-4\varepsilon$.

证　令 $I=\left\{x\in F\left|\frac{c(x)}{\sigma(x)}\geqslant K-\varepsilon\right.\right\}$，所以存在 $[-a, a]$ 上的一个分划 $\Delta: -a=a_1<a_2<\cdots<a_m=a$，在其中可找到 $2n$ 个区间 Δ_i 使得 $\operatorname{mes}(\Delta_i\cap I)>0(i=1, 2\cdots 2n)$. 令 $F_i=\Delta_i\cap F$, $K_i=\operatorname*{Vraisup}\limits_{x\in F_i}\frac{c(x)}{\sigma(x)}$. 作 $L^2(F_i)$ 上的积分算子 $L^i_\beta(\beta>0, i=1, 2\cdots 2n)$，任取 $\varphi(x)\in L^2(F_i)$,

$$L^i_\beta\varphi=\int_{F_i}\beta\sqrt{c(x)c(x')}\varphi(x')dx'\int_1^\infty\frac{e^{-\beta w\left|\int_{x'}^{x}\sigma(t)dt\right|}}{w}dw.$$

显然 L^i_β 也是紧、正和正定算子，且 $\|L^i_\beta\|<2K_i$, $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\|L^i_\beta\|=2K_i$ $(i=1, 2\cdots 2n)$. 所以存在 $\varphi_i\in L^2(F_i)$, $\|\varphi_i\|=1$，使得 $L^i_\beta\varphi_i=\|L^i_\beta\|\varphi_i$ $(i=1, 2\cdots 2n)$. 不妨设 $\Delta_i=(b_i^1, b_i^2)$, $b_i^2\leqslant b_{i+1}^1$ $(i=1, 2\cdots 2n-1)$. 作函数

$$u_i(x)=\begin{cases}\varphi_{2i}(x) & x\in F_{2i},\\ 0 & x\in F\backslash F_{2i},\end{cases}\quad (i=1, 2\cdots n).$$

所以

$$\rho_{n-1}(L_\beta)=\max_{\mathscr{M}_n}\min_{\substack{\varphi\in\mathscr{M}_n\\ \|\varphi\|=1}}(L_\beta\varphi, \varphi)\geqslant\min_{\substack{\varphi\in\operatorname{span}\{u_1,\cdots u_n\}\\ \|\varphi\|=1}}(L_\beta\varphi, \varphi).$$

其中 $\mathscr{M}_n$ 是 $L^2(F)$ 中的 n 维子空间. 设 $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_iu_i$, $\|\varphi\|=1$, $\alpha_i\in\mathbf{C}$，那么

$$(L_\beta\varphi, \varphi)\geqslant\sum_{i=1}^n|\alpha_i|^2(L_\beta u_i, u_i)-\sum_{i,j=1,\ i\neq j}^n|(L_\beta u_i, u_j)|.$$

因为

$$(L_\beta u_i, u_i)=(L_\beta^{2i}\varphi_{2i}, \varphi_{2i})=\|L_\beta^{2i}\|\xrightarrow{\beta\to+\infty}2K_{2i}\geqslant 2(K-\varepsilon),$$

令 $\alpha=\min\limits_{i=1,2\cdots 2n}\int_{F_i}\sigma(t)dt$，显然 $\alpha>0$. 当 $i\neq j$ 时，

$$(L_\beta u_i, u_i) \leqslant 4a^2\beta K \int_1^\infty \frac{e^{-\beta w\alpha}}{w} dw \xrightarrow{\beta\to+\infty} 0,$$

所以存在 $M>0$，当 $\beta \geqslant M$ 时，$(L_\beta\varphi, \varphi) \geqslant 2K - 4\varepsilon$. 由 φ 的任意性得该定理成立.

定理 5 当 $K>1$ 时，存在可数无穷个正数 $\{\beta_n\}_{n=0,1,\cdots}, \beta_0<\beta_1<\cdots<\beta_n<\cdots$, $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ 使 $L_{\beta_n}(n=0, 1\cdots)$ 以 2 作为本征值.

证 因为 L_β 的积分核是非退化的，再根据定理 3，定理 4 即可得此定理成立.

类似[5]定理 3 的证明可得下述辅理成立.

辅理 5 若 $K>1$，则对于 L_{β_0} 相应于 2 的本征空间是一维的，且含非负本征函数；对于 $L_{\beta_n}(n=1,\cdots)$ 相应于 2 的本征空间不含非负本征函数.

容易验证，方程 (2)（参数 $\lambda=\beta>0$）有非零的非负解等价于 L_β 相应于本征值 2 有非负本征函数. 再由上述诸辅理和定理以及相应的证明，即可得下面本文的主要定理成立.

定理 6 $K\leqslant 1$ 时，不存在非零参数 δ 使方程 (1) 有非零解；$K>1$ 时，在除去 0 点的整个复平面中，只存在可数无穷个正数 $\delta_n=\frac{1}{\beta_n}$ $(n=0, 1, \cdots)$, $\delta_0>\delta_1>\cdots$, $\delta_n\to 0$ $(n\to\infty)$ 使方程 (1) 有非零解；控制临界本征值 δ_0 存在的充分必要条件是 $K>1$.

定理 7 设 $K>1$，那么控制临界本征值 δ_0 存在且满足不等式

$$\frac{1}{h_0N_0} < \delta_0 < \frac{1}{4}K^2\int_{-a}^{a}\sigma(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_1^{+\infty}\frac{e^{-|u|w}}{w}dw\right)^2 du,$$

其中 $h_0>0$ 满足

$$h_0 \operatorname{arctg}\frac{1}{h_0} = \frac{1}{K-\alpha_0-\frac{\alpha_0}{2\pi}}$$

$\left(\alpha_0\text{ 是任意给定的满足 } 0<\alpha_0<\frac{2\pi(K-1)}{2\pi+1}\text{ 的正数}\right)$, $N_0>0$ 满足

$$\int_{-\infty}^{-N_0}\left|\int_0^{\sigma_0}\frac{\sqrt{c(x(s))}\varphi_{\alpha_0}(x(s))}{\sigma(x(s))}e^{-isw}ds\right|^2dw + \int_{N_0}^{+\infty}\left|\int_0^{\sigma_0}\frac{\sqrt{c(x(s))}\varphi_{\alpha_0}(x(s))}{\sigma(x(s))}e^{-isw}ds\right|^2dw = \alpha_0,$$

$$\varphi_{\alpha_0}(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{mesI_\alpha}} & x\in I_{\alpha_0} = \left\{x\in F \,\middle|\, \dfrac{c(x)}{\sigma(x)} \geqslant K-\alpha_0\right\}, \\ 0 & x\in F\backslash I_{\alpha_0}.\end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Ronen, Y. et al., *Trans. Am. Nucl. Soc.* (USA), 24 (1976), 474.
[2] Velarde, G. et al., *Nucl. Sci. Eng.*, 66(1978), 284.
[3] Cauci, D. G, et al., *Nucl. Sci. Eng.*, 81(1982), 432.
[4] Lehner, J., Wing, G. M., *Comm. Pure. Appl. Math.*, 8(1955), 217.
[5] 阳名珠、朱广田，中国科学，1981，1：25—30.