



类 Vandermonde 恒等式的新组合恒等式: 第一部分

献给相交五十年的好友徐利治教授

GOULD Henry Wadsworth

Department of Mathematics, West Virginia University, Morgantown, WV 26506, USA

E-mail: gould@math.wvu.edu

收稿日期: 2015-01-26; 接受日期: 2015-03-19

摘要 Vandermonde 卷积恒等式为

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n},$$

其中 x 和 y 为复数, n 为非负整数. 本文研究如下形式

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} = \binom{x+y}{n} + R(x, y, n)$$

与其他相关扩充的关系.

关键词 组合恒等式 Vandermonde 卷积 代数恒等式

MSC (2010) 主题分类 05A19, 05A10, 11B75

1 引言

一般形式的 Chu-Vandermonde 卷积恒等式为

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}, \quad (1.1)$$

其中 x 和 y 为复数, n 为非负整数. 这里首先提出两个与之类似的恒等式:

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} = \binom{x+y}{n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n-x}{k} \binom{n-y}{k}}{\binom{n-x-y-1}{k}}, \quad (1.2)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} = (-1)^n \binom{x+y}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\binom{-x-1}{k} \binom{-y-1}{k}}{\binom{n-x-y-1}{k}}, \quad (1.3)$$

其中 x 和 y 为复数, n 为非负整数. 上述简洁而对称的恒等式并未出现在本文作者的专著 [1] 中. 与 (1.3) 相比, (1.2) 更加值得注意. 众所周知, 一般而言, 对任意的 x 和 y , (1.2) 左端的求和闭形式并不可得. 本文正是受 (1.2) 的启发而撰写的. 同时, 我们也对 $\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k}$ 建立了一个母函数恒等式.

值得注意的是, (1.1) 和 (1.2) 均可表示为 $\binom{x+y}{n}$ 的倍数. 本文作者在五十多年的文献研究中并未发现过关系式 (1.2).

2 证明与变形

Chu-Vandermonde 卷积的一个变形是

$$\sum_{k=r}^{n-s} \binom{k}{r} \binom{n-k}{s} = \binom{n+1}{r+s+1}, \quad (2.1)$$

其中 r, s 和 n 是非负整数. 接下来提出如下类似的关系式:

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{r} \binom{k}{s} = \sum_{k=0}^m \binom{r}{k} \binom{s}{k} \binom{n+k+1}{r+s+1}, \quad (2.2)$$

其中 $m = \min(r, s)$. (1.2) 和 (2.2) 可分别写为

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} = \binom{x+y}{n} + \binom{x+y}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\binom{n-x}{k} \binom{n-y}{k}}{\binom{n-x-y-1}{k}}, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{r} \binom{k}{s} = \binom{n+1}{r+s+1} + \sum_{k=1}^m \binom{r}{k} \binom{s}{k} \binom{n+k+1}{r+s+1}, \quad (2.4)$$

同前, $m = \min(r, s)$. 这种表达形式可以更显著地体现与 (1.1) 和 (2.1) 的相似性.

对比 (1.2), 由文献 [1, (7.4.1)], 我们立得

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n-x}{k} \binom{n-y}{k}}{\binom{2n-x-y-1}{k}} = (-1)^n \frac{\binom{n-x-1}{n} \binom{n-y-1}{n}}{\binom{2n-x-y-1}{n}}, \quad (2.5)$$

即

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{x}{k} \binom{y}{k}}{\binom{x+y-1}{k}} = (-1)^n \frac{\binom{x-1}{n} \binom{y-1}{n}}{\binom{x+y-1}{n}}. \quad (2.6)$$

多年前, Donald Knuth 曾将上式告知本文作者, 当然上式现已广为人知.

下面是 (1.2) 的一个有趣的推论. 若 $n \geq 1$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} &= \binom{x+y}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\binom{n-x}{k} \binom{n-y}{k}}{\binom{n-x-y-1}{k}} + \binom{x+y}{n} (-1)^n \frac{\binom{n-x}{n} \binom{n-y}{n}}{\binom{n-x-y-1}{n}} \\ &= \binom{x+y}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\binom{n-x}{k} \binom{n-y}{k}}{\binom{n-x-y-1}{k}} + \binom{n-x}{n} \binom{n-y}{n}. \end{aligned}$$

现在假设 $y = -x$, 注意到在第一项里 $\binom{0}{n} = 0$ ($n \geq 1$), 从而, 我们得到下述恒等式:

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{-x}{k} = \binom{n-x}{n} \binom{n+x}{n} = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{j^2}\right), \quad (2.7)$$

其中 x 为复数. 显而易见, 上式当 $n = 0$ 时也成立. 该式未被列入文献 [1] 中, 但显然是一个已知的恒等式. $x = 1/2$ 的特殊情形曾被列表显示在文献 [1, (3.16)] 中.

新恒等式 (1.2) 和 (1.3) 可以被视为超几何级数的部分和的变形, 它们区别于众所周知的部分和, 如文献 [2] 和 [3, 第 92–95 页]. 因而可以将 (1.2) 和 (1.3) 分别写为如下形式:

$$\begin{aligned} & {}_2F_1[-x, -y; 1; 1] \cdots n+1 \text{ 项} \\ &= \binom{x+y}{n} {}_2F_1[x-n, y-n; x+y+1-n; 1] \cdots n+1 \text{ 项} \\ &= (-1)^n \binom{x+y}{n} {}_3F_2[-n, x+1, y+1; x+y+1-n, 1; 1] \cdots n+1 \text{ 项}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

下面将利用代数基本定理和下列恒等式给出 (1.2) 的一个新颖的证明:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\binom{z}{k} \binom{y}{n-k}}{\binom{y}{n}} = \frac{\binom{y-z}{n}}{\binom{y}{n}}, \quad (2.9)$$

即文献 [1, (7.1)], 其中 y 和 z 是复数. 从 (1.1) 易得上式. 事实上,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\binom{z}{k} \binom{y}{n-k}}{\binom{y}{n}} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{z}{k} \binom{y-k}{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{z}{k} \binom{-y+n-1}{n-k} \\ &= (-1)^n \binom{z-y+n-1}{n} = \binom{y-z}{n}. \end{aligned}$$

恒等式 (1.2) 的证明 等式两端均为变量 x 或 y 的 n 次多项式. 假设 x 为任一复数, $n-y=m$ 为任意整数 $0, 1, 2, \dots, n$, 则欲证 (1.2) 需证明以下等式:

$$\binom{x+n-m}{n} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\binom{n-x}{k} \binom{m}{m-k}}{\binom{m-x-1}{k}} = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{x}{k} \binom{n-m}{k} = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{x}{k} \binom{n-m}{n-m-k}.$$

由 (1.1) (Vandermonde), 上式右端等于 $\binom{x+n-m}{n-m}$. 由 (2.9), 上式左端等于

$$\binom{x+n-m}{n} \frac{\binom{m-n-1}{m}}{\binom{m-x-1}{m}} = \binom{x+n-m}{n} \frac{(-1)^m \binom{n}{m}}{(-1)^m \binom{x}{m}} = \binom{x+n-m}{n-m}.$$

因而, 当 $y = n-m$ 时, (1.2) 为 y 的 n 次多项式恒等式, 其中 m 可以是 $0, 1, 2, \dots, n$ 中的任一值, 即 y 可取比多项式次数 n 更多的不同值. 因此, 由代数基本定理可知, (1.2) 必对所有复数 y 均成立. 由于 x 可取任一复数, 所以, (1.2) 对所有复数 x 和 y 均成立. $\square$

文献 [1, (3.5)] 介绍了下列非对称恒等式:

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n-x}{k} \binom{y+n-k}{n}, \quad (2.10)$$

由此并不能容易地得到 (1.2).

以下是本文作者在 1955 年给出的 (2.10) 的原始证明:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{y}{k} \binom{-x+k-1}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{y}{k} \sum_{j=0}^k \binom{n-x}{j} \binom{k-n-1}{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n-x}{j} \sum_{k=j}^n (-1)^k \binom{y}{k} \binom{k-n-1}{k-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n-x}{j} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{y}{k} \binom{k-n-1}{k-j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-x}{j} \sum_{k=0}^n \binom{y}{k} \binom{n-j}{k-j} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-x}{j} \sum_{k=0}^n \binom{y}{k} \binom{n-j}{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-x}{j} \binom{y+n-j}{n},
\end{aligned}$$

(2.10) 得证.

更一般地, 利用相同的步骤足以证明下列一般变换:

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} f(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n-x}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} f(k+j), \quad (2.11)$$

其中 x 为任一复数, $f(k)$ 为任一函数. 该式曾被列表显示在文献 [1, (Z.25)] 中. 选择 $f(k) = y^k$, 则由 (2.11) 可得文献 [1] 中的恒等式 (1.9):

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n-x}{k} (1+y)^{n-k} (-y)^k. \quad (2.12)$$

下面介绍一个 Knuth 公式 (2.6) 的有趣推论. 利用 Knuth 公式, 我们发现

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n \binom{x}{j} \binom{y}{j} &= \sum_{j=0}^n \binom{x+y+1}{j} \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \frac{\binom{x+1}{k} \binom{y+1}{k}}{\binom{x+y+1}{k}} \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{x+1}{k} \binom{y+1}{k}}{\binom{x+y+1}{k}} \sum_{j=k}^n (-1)^j \binom{x+y+1}{j} \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{x+1}{k} \binom{y+1}{k}}{\binom{x+y+1}{k}} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{x+y+1}{j} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{x+y+1}{j} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{x+1}{k} \binom{y+1}{k}}{\binom{x+y+1}{k}} \left((-1)^n \binom{x+y}{n} - (-1)^{k-1} \binom{x+y}{k-1} \right),
\end{aligned}$$

其中我们应用了文献 [1, (1.5)], 即

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{x}{j} = (-1)^n \binom{x-1}{n} = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{x}{j} \right), \quad (2.13)$$

进而, 求和变为

$$\begin{aligned}
&\binom{x+y}{n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{\binom{x+1}{k} \binom{y+1}{k}}{\binom{x+y+1}{k}} + \sum_{k=0}^n \frac{\binom{x+1}{k} \binom{y+1}{k}}{\binom{x+y+1}{k}} \binom{x+y}{k-1} \\
&= \binom{x+y}{n} \frac{\binom{x}{n} \binom{y}{n}}{\binom{x+y+1}{n}} + \frac{1}{x+y+1} \sum_{k=0}^n \binom{x+1}{k} \binom{y+1}{k} k.
\end{aligned}$$

因此, 我们证明了

$$(x+y+1) \sum_{j=0}^n \binom{x}{j} \binom{y}{j} = (x+y+1-n) \binom{x}{n} \binom{y}{n} + \sum_{k=0}^n \binom{x+1}{k} \binom{y+1}{k} k. \quad (2.14)$$

恒等式 (1.3) 的证明 人们可以研究类似 (1.2) 的其他对称变换. 下面是一个例子. 我们将容易证明

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{x+y}{n-k} \binom{x+k}{k} \binom{y+k}{k}. \quad (2.15)$$

注 1 在上式中令 $y = -x$, 则 (2.7) 立即得证.

我们对 (2.15) 的证明需要利用对称展开:

$$\binom{x}{n} \binom{y}{n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{x+y+1}{n-k} \binom{x+k}{k} \binom{y+k}{k}. \quad (2.16)$$

本文作者曾在文献 [1, (6.48)] 中给出上式, 并将其作为 David Zeitlin 公式的一个扩充. 除此之外, 我们还需借助上面的 (2.13).

利用上述结果我们得到下列关系式:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{x}{j} \binom{y}{j} &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{x+y+1}{j-k} \binom{x+k}{k} \binom{y+k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{x+k}{k} \binom{y+k}{k} \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{x+y+1}{j-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{x+k}{k} \binom{y+k}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{x+y+1}{j} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{x+k}{k} \binom{y+k}{k} (-1)^{n-k} \binom{x+y}{n-k}, \end{aligned}$$

从而 (2.15) 得证.

根据下列事实:

$$\binom{x+y}{n-k} = \binom{x+y}{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{x+y-n+k}{k}} = (-1)^k \binom{x+y}{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-x-y-1}{k}},$$

我们可将 (2.15) 改写为更类似 (1.2) 的形式:

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} = (-1)^n \binom{x+y}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\binom{x+k}{k} \binom{y+k}{k}}{\binom{n-x-y-1}{k}} = (-1)^n \binom{x+y}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\binom{-x-1}{k} \binom{-y-1}{k}}{\binom{n-x-y-1}{k}}. \quad (2.17)$$

从而 (1.3) 得证. □

3 应用

下面对 $\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k}$ 建立一个母函数恒等式. 我们定义 $S_n(x, y)$ 和 $F(x, y; t)$ 如下:

$$S_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k}, \quad F(x, y; t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n S_n(x, y).$$

因此, 从关系式 (2.15) 可知,

$$\begin{aligned}
 F(x, y; t) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{x+y}{n-k} \binom{x+k}{k} \binom{y+k}{k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n (-1)^n \binom{x+y}{n} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \binom{x+k}{k} \binom{y+k}{k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n (-1)^n \binom{x+y}{n} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \binom{-x-1}{k} \binom{-y-1}{k} \\
 &= (1-t)^{x+y} \sum_{n=0}^{\infty} t^n S_n(-x-1, -y-1),
 \end{aligned}$$

从而, 我们得到恒等式

$$F(x, y; t) = (1-t)^{x+y} F(-x-1, -y-1; t). \quad (3.1)$$

恒等式 (2.2) 的证明 我们将利用下式:

$$\sum_{j=0}^s \binom{r-x+y}{j} \binom{s+x-y}{s-j} \binom{x+j}{r+s} = \binom{x}{r} \binom{y}{s}, \quad (3.2)$$

该式具有优美的对称性, 由 Nanjundiah [4] 提出并收录在文献 [1, (6.17)] 中. 在上式中令 $x = y = k$, 我们易得

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \binom{k}{r} \binom{k}{s} &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \binom{r}{j} \binom{k+j}{r+s} = \sum_{j=0}^s \binom{r}{j} \binom{s}{j} \sum_{k=0}^m \binom{k+j}{r+s} \\
 &= \sum_{j=0}^m \binom{r}{j} \binom{s}{j} \sum_{k=j}^{n+j} \binom{k}{r+s} = \sum_{j=0}^m \binom{r}{j} \binom{s}{j} \binom{n+j+1}{r+s+1},
 \end{aligned}$$

其中利用了文献 [1, 恒等式 (1.48)]. (2.2) 得证. $\square$

值得注意的是, 当 $s = r$ 时, (2.2) 有如下特殊形式

$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r}^2 = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j}^2 \binom{n+j+1}{2r+1}. \quad (3.3)$$

当 n 远大于 r 时, 上式是一个十分有用的“闭公式”, 它将左端求和表示为一个关于 n 的 $2r+1$ 次多项式. 对比 (3.3) 与著名公式

$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}, \quad (3.4)$$

该式将求和表示为关于 n 的一个 $r+1$ 次多项式.

类似地, $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r}^p$ 可表示为一个关于 n 的 $pr+1$ 次显式多项式.

下面将 (3.4) 分成偶数项和奇数项, 并首先证明

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{r} = \sum_{0 \leq k \leq r/2} \binom{n+k+1}{r+1} \binom{r+1}{2k+1} = \sum_{0 \leq k \leq r/2} \binom{n+k+1}{2k+1} \binom{n-k}{r-2k}. \quad (3.5)$$

证明 利用 (2.2), 我们有

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{j} \binom{k}{r-j} = \sum_{k=0}^n \binom{j}{k} \binom{r-j}{k} \binom{n+k+1}{r+1}.$$

现在,

$$\sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^n \binom{k}{j} \binom{k}{r-j} = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{r}.$$

然而, 由 (2.1) 得

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^n \binom{j}{k} \binom{r-j}{k} \binom{n+k+1}{r+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{r+1} \sum_{j=0}^r \binom{j}{k} \binom{r-j}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{r+1} \binom{r+1}{2k+1} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq r/2} \binom{n+k+1}{r+1} \binom{r+1}{2k+1}, \end{aligned}$$

从而我们得到 (3.5). □

当 n 远大于 r 时, 这可作为一个“闭形式”的答案.

下面考虑级数 $S = \sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{r}$. 本文作者的专著 [1, 公式 (1.129)] 中收录了由 Schwatt 得到的如下公式 (参见文献 [5, 第 48 页]):

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{r} = \frac{(-1)^{r-1}}{2^{r+2}} \left(\sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k \binom{2n+3}{k} 2^k - 1 \right), \quad (3.6)$$

Schwatt 利用上式证明了怎样将级数 S 表示为一个 n 的多项式. 当然, 当 n 远大于 r 时, 它也可以作为一个“闭形式”.

这里的第一个方法与上述方法略有不同. 显然,

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{r} = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{r} + \sum_{k=0}^n \binom{2k}{r-1}. \quad (3.7)$$

因此, 只需应用两次 (3.5) 即可得到级数 S .

我们的第二个方法如下, 将 (3.4) 分成偶数项和奇数项, 我们有

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{r} + \sum_{k=0}^n \binom{2k}{r} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{k}{r} = \binom{2n+2}{r+1}.$$

从而, 利用 (3.5) 我们发现,

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{r} = \binom{2n+2}{r+1} - \sum_{0 \leq k \leq r/2} \binom{n+k+1}{2k+1} \binom{n-k}{r-2k}. \quad (3.8)$$

为了展示典型的数值计算, 我们以 $n=5$ 和 $r=2$ 为例说明 (3.5):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^5 \binom{2k}{2} &= 1 + 6 + 15 + 28 + 45 = 95 \quad (\text{直接得到}), \\ \sum_{k=0}^1 \binom{1+k}{3} \binom{3}{2k+1} &= 60 + 35 = 95 \quad (\text{根据 (3.5) 得到}). \end{aligned}$$

级数

$$\sum_{k=0}^5 \binom{2k+1}{2} = 0 + 3 + 10 + 21 + 36 + 55 = 125 \quad (\text{直接得到}).$$

由 Schwatt 公式 (3.6) 可以得到 $-\frac{1}{16}(1 - 26 + 312 - 2288 + 1) = \frac{2000}{16} = 125$, 这与直接计算是一致的.

由 (3.8) 可以更容易地得到 $220 - (60 + 35) = 125$.

我们对一定类的级数给出一个“闭形式”的定义.

定义 1 假设

$$\sum_{k=0}^n A(n, r, k) = \sum_{k=0}^r B(r, n, k) \quad (3.9)$$

对系数 A 和 B 的部分集成立. 当 n 远大于 r 时, 右端级数可以视为左端级数的一个闭形式.

注 2 本文的第二部分将研究级数

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} \binom{z}{k} f(k). \quad (3.10)$$

参考文献

- 1 Gould H W. Combinatorial Identities: A Standardized Set of Tables Listing 500 Binomial Coefficient Summations. 2nd ed. Morgantown: Published by the author, 1972
- 2 Bailey W N. The partial sum of the coefficients of the hypergeometric series. J London Math Soc, 1931, s1-6: 40–41
- 3 Bailey W N. Generalized Hypergeometric Series. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, 32. Cambridge: Cambridge University Press, 1935
- 4 Nanjundiah T S. Remark on a note of P. Turán. Amer Math Monthly, 1958, 65: 354–354
- 5 Schwatt I J. An Introduction to the Operations with Series. Philadelphia: The Press of the University of Pennsylvania, 1924; Reprinted by New York: Chelsea Publishing Company, 1962

Novel combinatorial identities analogous to those of Vandermonde, part I

GOULD Henry Wadsworth

Abstract The Vandermonde convolution identity states that

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n},$$

valid for all complex x and y , and all integers $n \geq 0$. In this paper we investigate relations of the form

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{k} = \binom{x+y}{n} + R(x, y, n)$$

and other related expansions.

Keywords combinatorial identities, Vandermonde convolution, algebraic identities

MSC(2010) 05A19, 05A10, 11B75

doi: 10.1360/N012015-00045