中国科学
1983 年 8 月 A 辑 第 8 期

广义 Rayleigh 原理及其应用

李家春
(中国科学院力学研究所,北京)

摘 要

本文主要研究非自伴算子的本征值问题. 首先考察了 Morse 和 Feshbach 给出的广义 Rayleigh 原理,从数学上进行了严格的论证,并提出了该变分原理的三种等价提法. 上述原理可应用于相当广泛一类的积分微分方程组. 当应用于近似计算时,找到了它与 Galerkin 法相一致的条件. 作为例子,文中还讨论了平面 Poiseuille 流和 Bénard 问题的流动稳定性. 最后,还把线性代数求强特征值的 Rayleigh 商法推广到非自伴矩阵的情形.

一、引 言

对于自伴算子的本征值问题,人们已经建立起完整的理论,并可用 Rayleigh 变分原理作近似计算,它在无耗散的有限自由度或连续介质系统的振动、波动和其它物理问题中有着广泛的应用[1,2]. 但在实际问题中,我们经常会遇到耗散的耦合系统,因此,有必要探讨非自伴算子广义本征值问题及其相应的变分原理.

关于非自伴算子问题, Morse 和 Feshbach[3] 提出了基本思想; Chandrasekhar[4] 讨论了旋转同心圆柱间 Couette 流的稳定性问题; Prasad[5] 研究了高阶常微分方程的伴随变分方法;徐硕昌[6]解决了经典的 Columbs 问题,给出了充液腔体稳定性的判据;沈申甫[7]研究了非自伴算子的有限元法. 本文在上述工作的基础上,提出了适用于广泛一类积分微分方程组的广义 Rayleigh 变分原理的各种形式,并从数学上进行严格的论证. 文中以流动稳定性问题为例,说明了它的应用,作为有限元方法的基础,上述广义 Rayleigh 原理无疑是有重要实际意义的. 最后,作为线性代数数值方法中的一个应用,本文还提出了计算非自伴矩阵强特征值的广义 Rayleigh 商法.

二、向量函数空间中的伴随算子

为了研究一般的积分微分方程组的本征值问题及相应的变分原理,必须要定义向量函数空间中的伴随算子,并确定其具体表达式.

通常说来,一般的积分微分方程组可用向量函数空间中的算子形式来表达:

本文 1982 年 6 月 21 日收到.

$$Lu = f, \tag{2.1}$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

矩阵 L 的每个元素 l_{ij} 又是普通的积分、微分算子或是它们的线性组合,所以,L 是向量函数空间映照到向量函数空间的线性算子,$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}$ 分别为其定义域及值域中的元素. 那么,L 的形式伴随算子为:

$$L^* = \begin{pmatrix} l_{11}^* & l_{21}^* & \cdots & l_{n1}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{1n}^* & l_{2n}^* & \cdots & l_{nn}^* \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

其中 L_{ij}^* 指的是普通积分微分算子的伴随算子. 我们知道

$$\left[\int d\xi k(x, \xi)\right]^* = \int d\xi \overline{k(\xi, x)},$$
$$\left[\sum_{i=0}^{N} \alpha_i(x) \frac{d^i}{dx^i}\right]^* = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \overline{\frac{d^i}{dx^i}\alpha_i(x)}, \tag{2.4}$$
$$\left[\sum_{1,j,k\cdots}^{N} A_{i,j,k\cdots} \frac{\partial^{i+j+k\cdots}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \cdots}\right]^* = \sum_{i,j,k\cdots}^{N} (-1)^{i+j+k\cdots} \overline{\frac{\partial^{i+j+k\cdots}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \cdots}} A_{i,j,k\cdots}.$$

式中横线代表复共轭之意. 因为我们往往需要在复数域中定义内积之故,即

$$\langle f, g\rangle = \int \bar{f} g d\Omega. \tag{2.5}$$

从 (2.3), (2.4) 式, 我们可以容易地确定向量函数空间中任一线性算子 L 的形式伴随算子 L^*.

就微分算子而言,用分部积分或 Green 公式,可得

$$\langle u_i, l_{ij} v_j\rangle - \langle l_{ij}^* u_i, v_j\rangle = R(u_i, v_j). \tag{2.6}$$

一般说来, $R(u_i, v_j)$ 不等于零. 但对于边值问题, u_i 要满足一定的边界条件, 并可找到关于 v_j 相应的条件,从而保证 (2.6) 式右端为零. 这时,我们有

$$\langle \boldsymbol{u}, L\boldsymbol{v}\rangle = \sum \langle u_i, l_{ij} v_j\rangle = \sum \langle l_{ij}^* u_i, v_j\rangle = \langle L^* \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle. \tag{2.7}$$

这时,算子 L 与 L^* 才是真正互伴的. 若原边值问题对 $\boldsymbol{u}$ 规定的边界条件为 $G\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0$, 由此找到的 $\boldsymbol{v}$ 应满足的条件为 $G^*\boldsymbol{v}|_\Gamma = 0$, 那么,我们称边值问题

$$L\boldsymbol{u} = 0, \qquad G\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0 \tag{2.8}$$

的伴随边值问题为:

$$L^*\boldsymbol{v} = 0, \qquad G^*\boldsymbol{v}|_\Gamma = 0. \tag{2.9}$$

显然,伴随的意义具有互反性,即

$$(L^*)^* = L. \tag{2.10}$$

当仅当 $L = L^*$, $G = G^*$, 我们才称边值问题 (2.8) 为自伴的.

三、非自伴算子的广义本征值问题

有相当广泛一类的物理问题可以归结成如下非自伴算子的广义本征值问题:

$$(A-\lambda B)\boldsymbol{u}=0, \qquad G\boldsymbol{u}|_{\Gamma}=0, \tag{3.1}$$

式中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

均为向量函数空间中的线性算子，$\boldsymbol{u}$ 为该空间中的元素，λ 为本征值. 那么 (3.1) 式的伴随本征值问题为:

$$(A^*-\mu B^*)\boldsymbol{v}=0, \qquad G^*\boldsymbol{v}|_{\Gamma}=0. \tag{3.3}$$

它们的本征值、本征函数间有如下关系:

引理 1. 若 A, B 为向量函数空间上的全连续算子，问题 (3.1) 的本征值为 λ_0，那么其伴随问题 (3.3) 必有本征值 $\bar{\lambda}_0$.

证. 用反证法. 若 $\bar{\lambda}_0$ 不是问题 (3.3) 本征值，由算子 A, B 的全连续性及 Fredholm 择一性原理，对任一非零元素 $\boldsymbol{f}$，非齐次问题

$$(A^*-\bar{\lambda}_0 B^*)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}, \qquad G^*\boldsymbol{v}|_{\Gamma}=0, \tag{3.4}$$

必有唯一非零解. 对于问题 (3.1) 相应于本征值 λ_0 的本征函数 $\boldsymbol{u}_0$，我们有

$$\langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f}\rangle=\langle \boldsymbol{u}_0, (A^*-\bar{\lambda}_0 B^*)\boldsymbol{v}\rangle=\langle (A-\lambda_0 B)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}\rangle=0, \tag{3.5}$$

所以，$\boldsymbol{u}_0\equiv 0$，这与 λ_0 为问题 (3.1) 的本征值的假设相矛盾. 因此，$\bar{\lambda}_0$ 必为其伴随问题 (3.3) 的本征值.

引理 2. 互伴本征值问题 (3.1), (3.3) 相应于非共轭本征值的本征函数在下述意义上正交，即

$$\langle \boldsymbol{v}, B\boldsymbol{u}\rangle=0, \tag{3.6.1}$$

或者

$$\langle B^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle=0. \tag{3.6.2}$$

证. 将 $\boldsymbol{v}$ 对问题 (3.1) 左乘两边取内积，$\boldsymbol{u}$ 对问题 (3.3) 右乘两边取内积，相减，得

$$\langle \boldsymbol{v}, \lambda B\boldsymbol{u}\rangle-\langle \mu B^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle=0, \tag{3.7}$$

即

$$(\lambda-\bar{\mu})\langle \boldsymbol{v}, B\boldsymbol{u}\rangle=0. \tag{3.8}$$

因为 $\lambda\neq\bar{\mu}$，故 $\langle \boldsymbol{v}, B\boldsymbol{u}\rangle=\langle B^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle=0$，引理得证.

引理 3. 互伴本征值问题 (3.1) (3.3) 对应于非零且互不共轭的本征值的本征函数在下述意义下正交，即

$$\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{u}\rangle=0, \tag{3.9.1}$$

或

$$\langle A^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = 0. \tag{3.9.2}$$

证. 因为 $\lambda_0 \neq 0$, 问题 (3.1), (3.3) 就相当于如下的互伴本征值问题,

$$\left(B - \frac{1}{\lambda}A\right)\boldsymbol{u} = 0 \qquad G\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0, \tag{3.10}$$

$$\left(B^* - \frac{1}{\mu}A^*\right)\boldsymbol{v} = 0 \qquad G^*\boldsymbol{v}|_\Gamma = 0, \tag{3.11}$$

由引理 2, 引理 3 得证.

引理 4. 若非自伴算子的广义本征值问题的本征函数系是完备的[1), 我们有如下广义 Fourier 展开:

$$\boldsymbol{f} = \sum_1^\infty \alpha_k \boldsymbol{u}_k = \sum_1^\infty \beta_k \boldsymbol{v}_k, \tag{3.12}$$

其中系数 α_k, β_k 为:

$$\alpha_k = \langle \boldsymbol{v}_k, B\boldsymbol{f}\rangle, \qquad \bar{\beta}_k = \langle \boldsymbol{f}, B\boldsymbol{u}_k\rangle, \tag{3.13}$$

这里本征函数系 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 已双正交归一化,即

$$\langle \boldsymbol{v}_i, B\boldsymbol{u}_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{3.14}$$

四、广义 Rayleign 变分原理

根据互伴本征值问题的特性,我们首先严格证明变分原理一, 然后, 给出其三种等价的形式

变分原理 1. 对于广义本征值问题 (3.1), (3.3), 在满足 $G\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0$, $G^*\boldsymbol{v}|_\Gamma = 0$ 的函数类中,使泛函

$$J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{u}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, B\boldsymbol{u}\rangle}, \tag{4.1}$$

取驻值的函数 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, 应分别是问题 (3.1), (3.3) 的本征函数,泛函 J 的值就是问题 (3.1) 相应于该 $\boldsymbol{u}$ 的本征值.

证. 若 $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{v}_0$ 是使上述泛函取驻值的函数,令

$$\lambda = J(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0) = \frac{\langle \boldsymbol{v}_0, A\boldsymbol{u}_0\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_0, B\boldsymbol{u}_0\rangle}, \tag{4.2}$$

我们有

$$\begin{aligned}\delta J &= \frac{\langle \delta\boldsymbol{v}_0, A\boldsymbol{u}_0\rangle + \langle \boldsymbol{v}_0, A\delta\boldsymbol{u}_0\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_0, B\boldsymbol{u}_0\rangle} - \frac{\langle \boldsymbol{v}_0, A\boldsymbol{u}_0\rangle(\langle \delta\boldsymbol{v}_0, B\boldsymbol{u}_0\rangle + \langle \boldsymbol{v}_0, B\delta\boldsymbol{u}_0\rangle)}{\langle \boldsymbol{v}_0, B\boldsymbol{u}_0\rangle^2} \\ &= \frac{\langle \delta\boldsymbol{v}_0, (A - \lambda B)\boldsymbol{u}_0\rangle + \langle (A^* - \bar{\lambda}B^*)\boldsymbol{v}_0, \delta\boldsymbol{u}_0\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_0, B\boldsymbol{u}_0\rangle} = 0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

由变分学的基本原理可知,

$$(A - \lambda B)u_0 = 0, \qquad (A^* - \bar{\lambda}B^*)\boldsymbol{v}_0 = 0. \tag{4.4}$$

又因 $G\boldsymbol{u}_0|_\Gamma = 0$, $G^*\boldsymbol{v}_0|_\Gamma = 0$, 由引理 1 可知, $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{v}_0$ 分别为问题 (3.1), (3.3) 的本征函数,

1) 完备的条件有若干种情况,可参看文献 [8].

λ 为问题 (3.1) 相应于 $\boldsymbol{u}_0$ 的本征值．定理证毕．

变分原理 2. 对于广义本征值问题 (3.1)(3.3)，在满足 $G\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0$，$G^*\boldsymbol{v}|_\Gamma = 0$ 的函数类中，使泛函

$$I(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{v}, B\boldsymbol{u}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{u}\rangle} \tag{4.5}$$

取驻值的函数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，应分别是问题 (3.1)(3.3) 相应于非零本征值的本征函数，泛函 I 的值就是问题 (3.1) 相应于该 $\boldsymbol{u}$ 的本征值的倒数．

证．由于本征值 $\lambda \neq 0$，故 $\bar{\lambda} \neq 0$，问题 (3.1)，(3.3) 可以化为：

$$\left(B - \frac{1}{\lambda} A\right)\boldsymbol{u} = 0, \qquad G\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0, \tag{4.6}$$

$$\left(B^* - \frac{1}{\mu} A^*\right)\boldsymbol{v} = 0, \quad G^*\boldsymbol{v}|_\Gamma = 0. \tag{4.7}$$

由变分原理 1、变分原理 2 得证．

变分原理 3. 对于广义本征值问题 (3.1)，(3.3)，在满足 $G\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0$，$G^*\boldsymbol{v}|_\Gamma = 0$ 的函数类中，使泛函

$$P(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{u}\rangle, \tag{4.8}$$

在约束条件

$$\langle \boldsymbol{v}, B\boldsymbol{u}\rangle = 1, \tag{4.9}$$

下取驻值的函数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，就是相应于问题 (3.1)，(3.3) 的本征函数．

证．用 Lagrange 乘子法，令

$$P'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = P(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \lambda(1 - \langle \boldsymbol{v}, B\boldsymbol{u}\rangle). \tag{4.10}$$

若 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0$ 使上述泛函取驻值

$$\begin{aligned}\delta P' &= \langle \delta\boldsymbol{v}_0, A\boldsymbol{u}_0\rangle + \langle \boldsymbol{v}_0, A\delta\boldsymbol{u}_0\rangle - \lambda(\langle \delta\boldsymbol{v}_0, B\boldsymbol{u}_0\rangle + \langle \boldsymbol{v}_0, B\delta\boldsymbol{u}_0\rangle)\\ &= \langle \delta\boldsymbol{v}_0, (A - \lambda B)u_0\rangle + \langle (A^* - \bar{\lambda} B^*)\boldsymbol{v}_0, \delta\boldsymbol{u}_0\rangle\\ &= 0.\end{aligned} \tag{4.11}$$

类似于变分原理 1 的证明，$\boldsymbol{u}_0$，$\boldsymbol{v}_0$ 为问题 (3.1)，(3.3) 的本征函数，而 Lagrange 乘子 λ 恰好是问题 (3.1) 相应于 $\boldsymbol{u}_0$ 的本征值．

变分原理 4. 对于广义本征值问题 (3.1)，(3.3)，在满足 $G\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0$，$G^*\boldsymbol{v}|_\Gamma = 0$ 的函数类中，使泛函

$$Q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, B\boldsymbol{u}\rangle. \tag{4.12}$$

在约束条件

$$\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{u}\rangle = 1 \tag{4.13}$$

下取驻值的函数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，就是相应于问题 (3.1)，(3.3) 对应非零本征值的本征函数．

证．可仿照变分原理 2，从略．

从上述变分原理可以看到，当 A 为自伴算子，B 为恒等算子时，就可以得到通常的 Rayleigh 变分原理；由于非自伴算子的本征值不一定是实数，所以，它不象自伴算子那样有极值性质．

现在我们从变分原理 3 出发来作近似计算．假定：

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\phi}_i,$$
$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} d_j \boldsymbol{\psi}_j, \tag{4.14}$$

式中 $\boldsymbol{\phi}_i$, $\boldsymbol{\psi}_j$ 分别为满足问题 (3.1), (3.3) 边界条件的基函数系. 将它代入 (4.10), 式令

$$\frac{\partial P'}{\partial d_j} = 0$$

得 $\boldsymbol{c}$ 的线性方程组:

$$(\mathscr{A} - \lambda\beta)\boldsymbol{c} = 0, \tag{4.15}$$

式中, $n \times n$ 矩阵 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 的元素为:

$$a_{ij} = \langle \boldsymbol{\psi}_i, A\boldsymbol{\phi}_j \rangle, \qquad b_{ij} = \langle \boldsymbol{\psi}_i, B\boldsymbol{\phi}_j \rangle. \tag{4.16}$$

$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$, T 表示转置之意, 故求本征值 λ 的方程为:

$$|\mathscr{A} - \lambda\mathscr{B}| = 0. \tag{4.17}$$

若令 $\dfrac{\partial P'}{\partial c_i} = 0$, 则可得 $\boldsymbol{d}$ 的线性方程组,

$$(\bar{\mathscr{A}}^T - \mu\mathscr{B}^T)\boldsymbol{d} = 0, \tag{4.18}$$

显然 $\mu = \bar{\lambda}$.

注意, 即使 A, B 为非自伴算子, 如果边界条件 $G = G^*$, 便可取 $\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\psi}_i$, 这时上述近似方法就是普通的 Galërkin 方法. 由此便可看到, 广义变分原理为 Galërkin 方法提供了理论依据.

五、在流动稳定性问题中的应用

1. 平面 Poiseuille 流的线性稳定性问题可归纳成如下 Orr-Sommerfeld 方程的本征值问题:

$$\{(D^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha R[(U - c)(D^2 - \alpha^2) - D^2U]\}\phi = 0, \tag{5.1}$$
$$\phi(\pm 1) = \phi'(\pm 1) = 0, \tag{5.2}$$

其中 $D = \dfrac{d}{dy}$ 为微分算子,, α 为波数, R 为雷诺数 c 为本征值, c_r 为波速, αc_i 为不稳定发展率, $U = (1 - y^2)$ 为主流速度分布, ϕ 为扰动流函数的复波幅.

文献 [8] 中提到了几种数值方法, 我们也可从变分原理出发进行数值计算.

我们先列出伴随本征值问题:

$$\{(D^2 - \alpha^2)^2 + i\alpha R[(D^2 - \alpha^2)(U - c) - D^2U]\}\phi^* = 0, \tag{5.3}$$
$$\phi^*(\pm 1) = \phi^{*\prime}(\pm 1) = 0. \tag{5.4}$$

由变分原理 1 可知, 本征值 c 是泛函

$$J(\phi^*, \phi) = \frac{i\displaystyle\int_{-1}^{1} \bar{\phi}^*\{(D^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha R[U(D^2 - \alpha^2) - D^2U]\}\phi dy}{\alpha R\displaystyle\int_{-1}^{1} \bar{\phi}^*(D^2 - \alpha^2)\phi dy} \tag{5.5}$$

的驻值. 其本征函数系及其伴随问题的本征函数系构成双正交系, 即

$$\int_{-1}^{1} \bar{\phi}_i^*(D^2 - \alpha^2)\phi_j dy = \delta_{ij}. \tag{5.6}$$

类似地，也可按变分原理 3 导出关于该问题变分原理的具体形式.

2. Bénard 对流由稳定性交换原理可导出如下的本征值问题：

$$(D^2 - a^2)^2 w - \theta = 0, \qquad (D^2 - a^2)\theta = -Ra^2 w, \tag{5.7}$$

其边界条件为：

$$\begin{aligned} &w = \theta = 0, \qquad z = 0, 1, \\ &Dw = 0 \quad 或 \quad D^2 w = 0, \quad z = 0, 1. \end{aligned} \tag{5.8}$$

这里 w 是 z 方向的扰动速度，θ 为扰动温度，a 为波数，$R = -\dfrac{g\alpha\beta d^4}{k\nu}$ 为 Rayleigh 数（g 为重力加速度，k 为热传导系数，ν 为运动粘性系数，α 为热膨胀系数，β 为温度梯度），它的意义是因温度梯度、热膨胀产生浮力引起的失稳作用与粘性致稳作用的比值.

同样地，我们可以得到相应的伴随本征值问题为：

$$\begin{aligned} (D^2 - a^2)^2 w^* \qquad\qquad &= -Ra^2\theta^* \\ -w^* + (D^2 - a^2)\theta^* &= 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

边界条件与 (5.8) 式相同，

$$\begin{aligned} &w^* = \theta^* = 0, \qquad z = 0, 1, \\ &Dw^* = 0 \quad 或 \quad D^2 w^* = 0, \quad z = 0, 1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

这时，相应于问题 (3.1) 的算子为：

$$A = \begin{pmatrix} (D^2 - a^2)^2 & -1 \\ 0 & (D^2 - a^2) \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

所以，由变分原理 1 可知，本征值 R 是泛函

$$J(\theta, \theta^*, w, w^*) = \frac{-\int_0^1 [D^2wD^2w^* + 2a^2Dw^*Dw + a^4w^*w - w^*\theta - D\theta^*D\theta - a^2\theta^*\theta]dy}{a^2\int_0^1 \theta^* w dy} \tag{5.13}$$

的驻值.

类似地可写出其它形式的变分原理.

六、求非自伴矩阵强特征值的广义 Rayleigh 商法

对于自伴矩阵，求强特征值时可以用 Rayleigh 商法加速收敛速度. 我们将上述方法推广到非自伴矩阵的情形.

若非自伴矩阵 A 有一组完备的本征向量系 $\{\boldsymbol{u}_k\}$, $k = 1, 2, \cdots, N$, 那么其伴随矩阵也有一组完备的本征向量系 $\{\boldsymbol{v}_k\}$[10]. 于是，空间任一向量 $\boldsymbol{z}_0$ 可表达为：

$$\boldsymbol{z}_0 = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_N\boldsymbol{u}_N, \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{z}_0 = \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \beta_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \beta_N\boldsymbol{v}_N. \tag{6.2}$$

由此可导出向量序列

$$\boldsymbol{P}_k = A^k \boldsymbol{z}_0 = \alpha_1 \lambda_1^k \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \boldsymbol{u}_2 + \cdots\cdots + \alpha_N \lambda_N^k \boldsymbol{u}_N, \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{Q}_k = A^{*k} \boldsymbol{z}_0 = \beta_1 \bar{\lambda}_1^k \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \bar{\lambda}_2^k \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \beta_N \bar{\lambda}_N^k \boldsymbol{v}_N. \tag{6.4}$$

若 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 是双正交归一化的基，那么

$$m_k = \frac{\langle \boldsymbol{Q}_k, A\boldsymbol{P}_k \rangle}{\langle \boldsymbol{Q}_k, \boldsymbol{P}_k \rangle} = \frac{\alpha_1 \bar{\beta}_1 \lambda_1^{2k+1} + \alpha_2 \bar{\beta}_2 \lambda_2^{2k+1} + \cdots + \alpha_N \bar{\beta}_N \lambda_N^{2k+1}}{\alpha_1 \bar{\beta}_1 \lambda_1^{2k} + \alpha_2 \bar{\beta}_2 \lambda_2^{2k} + \cdots + \alpha_N \bar{\beta}_N \lambda_N^{2k}}. \tag{6.5}$$

若 λ_1 是强特征值，即

$$|\lambda_1| \gg \mathrm{Max}(|\lambda_2|, |\lambda_3|, \cdots |\lambda_N|), \tag{6.6}$$

显然

$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\langle \boldsymbol{Q}_k, A\boldsymbol{P}_k \rangle}{\langle \boldsymbol{Q}_k, \boldsymbol{P}_k \rangle}. \tag{6.7}$$

如果 λ_1 的绝对值不明显地大于其它本征值的绝对值，我们可用原点平移法来加速收敛速度.

为了求次强特征值 λ_2，可以选取 $\boldsymbol{z}_0$ 正交于 $\boldsymbol{u}_1$ 或 $\boldsymbol{v}_1$，这时 α_1 或 β_1 等于零，由 (6.5) 式可见，

$$\lambda_2 = \lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\langle \boldsymbol{Q}_k, A\boldsymbol{P}_k \rangle}{\langle \boldsymbol{Q}_k, \boldsymbol{P}_k \rangle}. \tag{6.8}$$

上述方法对于不需求全部特征值的情况(如求流动稳定性问题的最不稳定模式)，它的工作量要比通常的 LR, QR 方法小得多[11].

算例：我们计算下列矩阵的特征值

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & i & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

取 $\boldsymbol{z}_0 = (1, 1, 1)$，其结果如表 1.

表 1

k	近 似 本 征 值
7	$4.99999957 + 8.56071269 \times 10^{-8} i$
8	$4.99999996 + 8.52944476 \times 10^{-9} i$
9	$4.99999999 + 8.53278719 \times 10^{-10} i$
10	$4.99999999 + 8.53540864 \times 10^{-11} i$
准确值	5

取 $\boldsymbol{z}_0 = (1, 0, 0)$，由于 $\alpha_1, \beta_1 = 0$，故可以决定次强特征值，采用原点平移法，其结果如表 2.

由此可见，第十次迭代的结果相当准确，收敛速度也很快. 由于次强特征值与其它特征值模长相差不远，所以，若不用原点平移法要迭代 20 次以上才能达到相同的精度.

表　2

k	近似本征值
6	$1.41420319+0.70710441i$
7	$1.41421271+0.70710567i$
8	$1.41421357+0.70710659i$
9	$1.41421358+0.70710676i$
10	$1.41421356+0.70710678i$
准确值	$1.41421356+0.70710678i$

本文曾得到谈镐生教授的指导，并与徐硕昌同志进行了有益的讨论，在此一并致谢。

参　考　文　献

[1] Courant, R. & Hilbert. D., 数学物理方法，科学出版社，1958.
[2] 钱伟长，变分法及有限元，科学出版社，1980.
[3] Morse, P. M. & Fshbach, H., *Methods of Theoretical Physivs*, Vol I, II. McGraw-Hill, 1953.
[4] Chandrasekhar, S.. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, Oxford, 1961.
[5] Prasad, S. N., *Int. Jour. Solids. Structures*, 8(1972), 29—40.
[6] 徐硕昌，中国科学，1979，857—865.
[7] Shen, S. F., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **9**(1977), 421—445.
[8] 纳依玛克，线性微分算子，科学出版社，1964.
[9] 李家春，应用数学与力学，**3**(1982)，5:597—604.
[10] 弗里特曼，应用数学原理与方法，高等教育出版社.
[11] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problems*, Oxford Uni. Press, 1965.