科学通报 2018 年 第 63 卷 第 2 期 : 141～147
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
Science 125个科学前沿问题系列解读 (XXXIX)

Do mathematically interesting zero-value solutions of the Riemann zeta function all have the form a + bi?

黎曼ζ-函数的零点都有$\frac{1}{2}+it$的形式吗?

葛力明*, 薛博卿

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190
* 联系人, E-mail: liming@math.ac.cn

2016-12-20收稿, 2017-01-21接受, 2017-03-05修回, 2017-12-04网络版发表

摘要 本文简要回顾了黎曼假设(Riemann Hypothesis)产生的历史, 阐述了黎曼假设是什么, 回答了它为什么重要等问题.

关键词 ζ-函数, 黎曼假设, 素数分布, 欧拉乘积, 函数方程, 显式, 正定性

数学研究最基本的对象是自然数, 我们用$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$来记自然数构成的集合. 数学中最基本、最经典的问题, 例如哥德巴赫猜想、费尔马大定理等都和自然数的结构(分解、合成等)有关; 还有一些看似与自然数无关的问题, 比如黎曼假设, 往往从更深刻的角度在揭示着自然数的奥秘, 并对经典问题的解答提供方法或思路. 黎曼假设能把众多学科中的问题联系到一起, 揭示问题背后最本质的内涵. 2000年前后, 在千禧问题的征集过程中, 黎曼假设是唯一一个被所有数学家提名的问题. 在解释什么是黎曼假设之前, 让我们先回到自然数上.

自然数有加法和乘法两种基本运算, 加法相对简单, 任何一个自然数都能通过1重复相加若干次得到; 而对乘法来说, 有一类自然数只能被1和其自身整除, 例如2, 3, 5, 7等, 它们被称为素数或者质数, 根据“常识”或数学中的“算术基本定理”, 每个大于1的自然数可以唯一地(不计次序)分解成有限个素数的乘积. 这类似于在物理世界中, 万物都由原子构成. 对自然数的乘法而言, 素数就是自然数结构中的原子.

大约在公元前3世纪, 欧几里得(Euclid)证明了素数有无穷多个: 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$为任意有限多个素数(可能穷尽了所有素数), 那么对自然数$p_1p_2\cdots p_n+1$作乘法分解可得其任意素因子都和$p_1, p_2, \ldots, p_n$不一样(这会和素数个数有限的假设矛盾). 该证明的简洁也是数学所有定理证明的典范. 那么, 素数究竟有多少呢? 它们在自然数中的分布有无规律可循? 不难发现, 前100个自然数中共有25个素数, 比例为25%, 前10^5个自然数中, 素数所占的比例为9.592%, 如果继续往下计算, 就会发现素数越来越稀疏. 我们用$\pi(x)$来表示不大于x的素数的个数, 在1800年前后, 青少年时期的高斯(Gauss)对素数进行了大量的统计研究, 后来他[5] (以及同时期的数学家Legendre)猜测

$$\pi(x)\sim li(x)\sim\frac{x}{\log x}\quad(x\to\infty),\tag{1}$$

其中li表示对数积分$li(x)=\int_2^x(1/\log t)dt$, 等价关系“~”是指两者之比极限为1. 公式(1)后来被称为素数定理, 它的证明和黎曼及黎曼ζ-函数密切相关, 该定理只是有关素数分布研究的开端, 至今我们对

引用格式: 葛力明, 薛博卿. 黎曼ζ-函数的零点都有$\frac{1}{2}+it$的形式吗? 科学通报, 2018, 63: 141–147
Ge L M, Xue B Q. Do mathematically interesting zero-value solutions of the Riemann zeta function all have the form $\frac{1}{2}+it$ (in Chinese)? Chin Sci Bull, 2018, 63: 141–147, doi: 10.1360/N972017-00022

素数的了解依旧浅显, 下面介绍黎曼ζ-函数和素数分布的关系.

19世纪是复变函数论发展的黄金时期, 在发现了黎曼映射定理、建立了黎曼几何、特别是曲面理论后, 黎曼开始关注数论和复函数的关系. 如果把每个自然数n和一个复函数n^{-s}(s是复变量)建立对应后, 两个自然数之积mn对应的函数仍有乘积的形式$(mn)^{-s} = m^{-s}n^{-s}$, 这种对应关系在数学中称作"表示", 从而可以借用表示后的函数的性质来研究自然数的乘法结构. 如果把所有自然数对应的函数n^{-s}用加法组合到一起, 得到级数$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s} = \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$, 当$s$的实部$\Re(s) > 1$时($s$的虚部记为$\Im(s)$), 级数绝对收敛, 因此它给出的复半平面$\Re(s) > 1$上的复函数, 记为$\zeta(s)$. 当$s$是实数时, 欧拉(Euler)研究过该函数, 得到了s为偶数时的求和公式, 例如$\zeta(2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 并且证明了著名的欧拉乘积公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{2}$$

上式右端表示对所有素数p的乘积, 在本文中我们总用p表示素数. 当$s = 1$时, 上式左端等于∞, 由此也能得到等式右端是∞, 因此素数个数无穷多. 但欧拉更进一步观察到, 等式两端取(自然)对数log, 等式左端还是∞, 而右端是$\log(1-\frac{1}{p})^{-1}$关于素数p的求和式, $\log(1-\frac{1}{p})^{-1}$的大小几乎和$\frac{1}{p}$相当, 从而可得$\sum_p \frac{1}{p} = \infty$. 从微积分课程中我们知道$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\log n} = \infty$, 而$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\log^2 n}$是收敛的, 如果素数分布有类似的"均匀"性(例如, 满足高斯猜测(1), 此时的素数分布会和数列$n\log n$较接近), 在平均意义下, 相邻素数的间距可类比数列$n\log n$的间距(大约是$\log n$). 当然这种类比仅仅是"直觉", 数学中严格的证明首先由切比雪夫(Чебышёв)给出, 他用几乎初等的方法分析了$\frac{(2n)!}{(n!)^2}$中的素因子, 证明了存在常数$0 < A < 1 < B$, 使得

$$\frac{Ax}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant \frac{Bx}{\log x} \quad (x \geqslant 2),$$

由此推出相邻素数的密度大于$\frac{x}{\frac{Bx}{\log x}} = \frac{\log x}{B}$(并且小于$\frac{\log x}{A}$). 切比雪夫首次较精确地给出了素数函数$\pi(x)$的上、下界, 但如何把上面的常数$A, B$改进到1, 是经典方法无法企及的.

1859年, 黎曼[15]将函数$\zeta(s)$延拓到全复平面, 成为亚纯函数. 较简单的第一步是在$s = 1$附近, 比较$\zeta(s)$和复函数$\frac{1}{s-1}$, 不难证明$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$在$s = 1$时有极限, 从而可以把它延拓到$\Re(s) > 0$的区域里(另一种将$\zeta(s)$延拓到右半平面的方法是通过等式$(1-\frac{2}{2^s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, 其右端对$\Re(s) > 0$均收敛). 这样, $\zeta(s) = (\zeta(s) - \frac{1}{s-1}) + \frac{1}{s-1}$就可看成在$\Re(s) > 0$中有定义的复函数($s = 1$为一阶极点). 不平凡的是黎曼发现了$\zeta(s)$满足的"函数方程":

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \tag{3}$$

其中$\Gamma(s)$为欧拉Γ-函数($\Re(s) > 0$时, $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$), 表达式(3)关于竖直线$\Re(s) = 1/2$是对称的, 通过这样的对称性, 可以把$\zeta(s)$延拓到全复平面($\zeta(s)$本身没有对称性), $s = 0$和1是$\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$仅有的一阶(也称"单")极点. 由于$\Gamma$-函数在负整数处是极点, 因此负偶数$-2, -4, \cdots$均为$\zeta(s)$的零点, 它们被称为显然零点. 由欧拉乘积公式可知, 当$\Re(s) > 1$时, $\zeta(s) \neq 0$, 从而$\zeta(s)$其余的"非显然"零点都落在条形带$0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$中, 它们关于竖直线$\Re(s) = 1/2$及实轴对称, 即$\rho$为非显然零点当且仅当$1-\rho, \overline{\rho}$和$1-\overline{\rho}$均为非显然零点, 这里的$\overline{\rho}$是指复数$\rho$的复共轭. 我们用$i$记虚数$\sqrt{-1}$, 复数$\sigma + it$的复共轭是$\sigma - it$. 黎曼发现$\zeta$-函数的变化是非常复杂的, 通过复函数的围道积分, 他证明了ζ-函数的零点很多, 在s的虚部t充分大时, 单位区间$[t, t+1]$对应的区域中的零点个数(平均意义下)接近$\frac{1}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi}$. 对零点的实部, 黎曼作了如下猜测:

猜想 (黎曼假设) 函数$\zeta(s)$的所有非显然零点均落在复平面的竖直线$\Re(s) = \frac{1}{2}$上.

我们为何如此关注零点? 它们为什么重要?

黎曼还观察到, $\zeta(s)$在竖线$\Re(s) = 1$上没有零点就能得到素数定理的证明, 即素数分布的渐近公式(1). 1896年, Hadamard[6]和de la Vallée-Poussin[17]独立地证明了ζ-函数在$\Re(s) = 1$上是非零的, 他们走通了黎曼指引的路, 首次证明了素数定理. 1949年, Selberg[16]和Erdös[4]虽然给出了素数定理的"初等"证明(不依赖于黎曼ζ-函数), 但证明无比复杂, 而用ζ-函数, 素数定理的证明可以变得非常简洁, 可以参见[13, 19].

素数定理是近代数学中最重要的结论之一, 仅这一个应用就足以说明黎曼ζ-函数及其零点分布的重要, 而故事远没有结束, 或许只是刚刚开始.

对于一个复系数多项式$f(x)$而言, $f(x) = 0$的解$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 加一个首项系数c就决定了$f(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. 类似地, 每个亚纯函数, 除了一个整函数因子之外, 唯一地由其零点与极点所决定, 也就是说, 只要我们知道了ζ-函数零点ρ的信息, 便基本掌握了$\zeta(s)$的全貌. 为消去$\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$的极点, 考虑整函数

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{4}$$

它的所有零点恰为ζ-函数的非显然零点. 下文中, 我们总把$\zeta(s)$的非显然零点简称为零点, 并记为ρ. 将$\xi(s)$关于零点进行因式分解, 得到[6]

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}{}'\left(1-\frac{s}{\rho}\right). \tag{5}$$

上式中, 无穷乘积$\prod'$表示将关于ρ和$1-\rho$的项两两配对后是绝对收敛的, 这一表达式明确了零点的重要性. 联立(4)、(5) 两式, 再求自然对数log, 这样乘积变成了对数相加, 再对等式两边求导数, 整理后可得等式:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - \sum_{\rho}{}'\frac{1}{s-\rho} + \left(\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)}\right) - \frac{1}{2}\log\pi, \tag{6}$$

类似地$\sum'_\rho$表示将ρ与$1-\rho$配对后再按虚部从小到大进行求和. 等式的左端, 在$\Re(s) > 1$时, 通过计算可以得到如下的Dirichlet级数展开式

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}, \tag{7}$$

其中$\Lambda(n)$为von Mangoldt函数, 它在素数方幂p^k $(k = 1, 2, \cdots)$处取值$\log p$, 其他情形为0. 那些较高次的素数方幂p^k(当$k \geqslant 2$时)在自然数中所占的比例是很小的, 所以$\Lambda(n)$可以看作加权后的素数的示性函数. 利用$p \leqslant x$并且不太小时, $\log p$与$\log x$非常接近这一事实, 不难验证,

$$\psi(x) := \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n) = \pi(x)\log x + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

其中的$O(f(x))$是数论中常用的记号, 表示可以用$f(x)$的常数倍来控制的项. 由此渐近式$\psi(x) \sim x$ $(x \to \infty)$与素数定理的(1)式等价, 这样可把对$\pi(x)$的研究转嫁到$\psi(x)$上. 正是黎曼的洞察力, 通过(7)式中函数Λ的“离散Mellin变换”, 将所需的素数信息转化成了复函数的性质. 这时, 我们在一个紧集$[1, x]$上, 对(6)、(7) 两式应用Perron公式(即Mellin 逆变换), 将零点提供的信息转移回自然数上, 便可得到[10]

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) = x - \sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) - \log 2\pi, \tag{8}$$

其中$x \notin \mathbb{N}$时定义$\Lambda(x) = 0$, 有关零点的求和式在$\lim_{T\to+\infty}\sum_{|\Im(\rho)|<T}$的意义下是收敛的.

公式(8)被称为黎曼显式(这是von Mangoldt的版本[10], 黎曼的原始版本是关于$\pi(x)$的等式), 它将素数与零点完全联系在了一起. 其右端后两项都是相对很小的, 有关零点的求和项x^ρ 的大小则由ρ的实部所决定. 当零点满足我们所希望的一些性质时, 便可以得到

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\sup_\rho \Re(\rho)+\varepsilon}\right) \quad (\forall\varepsilon > 0).$$

所以零点的实部越小, 上式的余项就越小, 对素数分布的描述也就越精确. 以下定理是黎曼指出的素数分布与零点实部之间的关联[15], 他在短短8页的论文中惜字如金, 许多过程语焉不详, 其他数学家们则花费了几十年的努力才补全了证明.

定理1 下述命题均等价:

(1) 黎曼假设成立;

(2) 对任意$\varepsilon > 0$, 有$\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$;

(3) 对任意$\varepsilon > 0$, 有$\pi(x) = li(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.

至此, 我们终于看到黎曼假设在说什么, 它指出素数分布函数$\pi(x)$与高斯猜想的分布$li(x)$应该“十分”吻合(而$li(x)$和$\frac{x}{\log x}$ 相差了$\frac{x}{\log^2 x}$的一个常数倍), 不仅上面定理中的$\frac{1}{2}$是不能改进的, 而且它被任何其他$\frac{1}{2}$和1之间的数代替的话, 黎曼ζ-函数的零点也会被限制在特定的区域里.

文献[15]是黎曼在数论领域发表的唯一论文, 也是他一辈子最成熟的思考成果. 不久以后, 黎曼因长年的贫困和劳累患上肺结核, 其后的大部分时间都在治病疗养, 1866年7月20日(未满40岁)病逝于意

大利. 令人惋惜的是, 在他逝世之后, 他的很大一部分手稿被管家付之一炬, 目前可供查阅的手稿被收录在哥廷根大学的图书馆中. 人们在手稿中发现, 黎曼对论文里言之不详的命题进行过严格的论证, 并且计算了前三个零点的数值, 这些演算和推导隔了几十年后被整理出来时, 仍比当时数学界的水平大为超前. 也是因为黎曼超前的思维方式, 刚开始人们并没有意识到黎曼工作的重要性, 随着时间的推移, 黎曼在数学领域的影响变得越来越重要. 当今, 在计算机的帮助下, 人们已然验证了离实轴最近的至少10^{22}个非显然零点, 它们确实位于对称轴$\Re(s) = 1/2$ 上[14]. 今天, 人们对黎曼假设的正确性几乎没有怀疑, 甚至不自觉地在假设它成立的前提下开展研究, 数以千计的数学定理是在黎曼假设成立的前提下获得证明, 这也是"黎曼假设"比"黎曼猜测"出现得更高频的原因. 这里列举其中一个: 记p_n为从小到大排列的第n个素数, 在黎曼假设下Cramér[3]1936年就证明了相邻素数之间的间距满足$p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n}\log p_n)$, 并且几乎所有的相邻素数满足$p_{n+1} - p_n = O(\log^3 p_n)$; 不借助黎曼假设人们目前只能证明$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{0.525})$这一较弱的结论[1], 对应的"几乎所有的"结果是$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{0.05})$[7].

黎曼的研究方法和思想直接启发了现代数学研究的许多领域, 人们试图在代数、几何等对象上构造能反映其结构的特征函数, 然后通过该函数的性质来进一步认识原始结构, 所以黎曼ζ-函数是一大类重要函数的代表, 其研究结果和方法直接影响着众多理论的建立和发展. 比如考虑$\mathbb{N}$上的其他拟特征, 可以得到Dirichlet L-函数, 它们也具有相似的欧拉乘积以及函数方程. 而有理数域的广义黎曼假设成立可以得到算术级数(例如数列$8n + 1$)中的素数分布满足

$$\begin{aligned}\pi(x; q, a) &:= \{p \leqslant x : p \equiv a(\mathrm{mod}\ q)\}\\ &= \frac{li(x)}{\varphi(q)} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \quad (\forall\varepsilon > 0),\end{aligned}$$

其中$q \geqslant 1$, a和q互素, $\varphi(q)$是欧拉函数, 表示不大于q并且与q互素的自然数个数. 更广义的ζ-函数被称为整体L-函数, 它们能够描述代数(如自守表示)或者几何对象(如算术簇)的结构. 许多整体L-函数的该满足的函数方程仍是未解决的问题, 而仅仅是整体L-函数在某些点的取值, 往往都具有很深刻的数学内涵.

在研究黎曼假设的过程中人们试图在更宽泛的哲学层面来解释这一现象, 从而找到一条通往解决猜测的途径, 下面我们解释一种与正定性有关的等价命题.

回到(8)式, 它的表达是建立在紧集$[1, x]$上的. 如果能用一个式子给出整个$(0, +\infty)$上关于自然数乘法结构的描述, 就更显完善了. 倘若如此, 式(8)中的若干项在通常意义下会发散, 但仍可以看作正实数全体$\mathbb{R}_+$上的分布. 记$\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$为$\mathbb{R}_+$上的Schwartz函数(亦称检验函数或速降函数)全体. 设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$, 其Mellin变换

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^s d^*x$$

为整函数. 这里$d^*x = x^{-1}dx$为乘法群$\mathbb{R}_+$上的Haar测度. Weil显式的一种形式为

$$\begin{aligned}&\widetilde{f}(0) + \widetilde{f}(1) - \sum_\rho \widetilde{f}(\rho)\\ &= \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n)\left(f(n) + n^{-1}f(n^{-1})\right) + (\gamma + \log\pi)f(1)\\ &\quad + \int_1^\infty \left(f(x) + x^{-1}f(x^{-1}) - 2x^{-2}f(1)\right)\\ &\quad \times\frac{x^2}{x^2-1}d^*x. \end{aligned} \tag{9}$$

上式中关于零点的求和是绝对收敛的. 等式一端与ζ-函数的零点ρ及0, 1有关, 而另一端与素数的正负方幂及正实轴上的积分相关, 算术与零点的信息再一次遥相呼应. 之所以称f为"检验函数", 是因为我们可以选取适当的f, 通过$\widetilde{f}$在零点ρ的取值来探测算术上的性质. 当f取遍所有检验函数时, 就相当于描述了关于自然数乘法的几乎所有的情况. Weil正定性[18]是黎曼假设的另一个等价命题(这是Bombieri的版本[2]):

定理2 (Weil准则) 黎曼假设为真, 当且仅当对任意的$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$均有

$$\sum_\rho \widetilde{f}(\rho)\overline{\widetilde{f}(1-\overline{\rho})} \geqslant 0. \tag{10}$$

当ρ的实部为1/2时, ρ与$1-\overline{\rho}$是同一个点, 上式中的单项为$|\widetilde{f}(\rho)|^2$, 取值非负. Weil 正定性将黎曼假设等价

于一个内积的形式, 式(10)的左端也有类似于(9)的、用素数和f的积分给出的具体公式.

另外, 在(10)式中考虑一些非Schwartz函数的f也意义匪浅. 对于$f_n(s) = 1-(1-1/s)^n$, Li[9] 给出了另一种正定性刻画. 设$n = 1,2,\cdots$, 令$\lambda_n = \sum_\rho'(1-(1-1/\rho)^n)$. 相比Weil正定性, 这些$\lambda_n$ 给出的算术解释更加明确.

定理3 (李准则) 序列λ_n由函数$\xi(s)$在$s = 1$处各阶导数的性质所决定:

$$\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\left.\frac{d^n}{ds^n}\right|_{s=1}\left(s^{n-1}\log\xi(s)\right).$$

黎曼假设为真, 当且仅当对所有$n \geqslant 1$, 均有$\lambda_n \geqslant 0$.

正所谓一叶知秋, $\zeta(s)$整体的性态通过$s = 1$这一点附近的取值完全展现了出来. 在这一点的Laurent展式为

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\gamma_k}{k!}(s-1)^k,$$

其中γ_k为Stieltjes常数

$$\gamma_k = \lim_{M\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{M}\frac{(\log m)^k}{m} - \frac{(\log M)^{k+1}}{k+1}\right).$$

特别地, $\gamma_0 = \gamma = 0.577216\cdots$ 为欧拉常数. 上述常数λ_n均为关于γ_k ($k \geqslant 0$)的组合. 特别地, 我们知道λ_1的值

$$\lambda_1 = \sum_\rho{}'\frac{1}{\rho} = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\log 4\pi = 0.0230957\cdots,$$

它是ζ-函数所有零点的倒数和, 从这个常数可以看出, $\zeta(s)$非显然零点的分布不太稠密, 且离实轴有一定距离.

黎曼假设成为最重要的数学问题之一, 还有另一个原因: 它可能代表了世间万物的某种普遍规律. 前文我们已然提及, 欧拉乘积公式(2)以及函数方程(3)是ζ-函数的两个核心性质, 正如在科学研究中, 事物总被看成基本单位的组合, 而对称性则是宇宙的一种普遍性态. 具有相似性质的物理系统不计其数, 比如李政道-杨振宁圆周定理[8], 就证明了Ising模型对应的"ζ-函数"零点均位于对称线上. 这一模型可以描述材料的铁磁性, 而零点意味着相变(事物产生本质的变化), 即材料在达到怎样的临界温度后会发生磁化现象. 能否用Ising模型逼近自然数的乘法结构, 也是数学家们对于证明黎曼假设进行的一种尝试(见Newman准则[12]).

在黎曼的原始文章中, 考虑的是函数$\Xi(z) = \xi(1/2+iz)$, 我们期望它的零点都落在实轴上. 事实上, 对称性往往与能量有关(能量总是实的). 20世纪初期, Pólya提出: $\zeta(s)$的零点应当对应于某个无界自伴算子E的特征值(即物理系统的能级). 如果是这样, $-\zeta'/\zeta = \langle E\rangle$往往代表能量的总体均值(读者可回顾(6)、(7) 两式), 而显式就可以通过迹公式来描述

$$\sum_\rho \widetilde{f}(\rho) = \mathrm{Trace}(f(E)).$$

支持这一观点的论据有许多, 比如Montgomery[11]证明了在黎曼假设以及配对关联假设下, 标准化后的零点间距符合(二次)半圆律. 这揭示了ζ-函数零点的分布模式与一些随机矩阵特征值的统计规律相同, 或者说, 与量子物理学家所预测的重原子的核的能级是一致的. 当一些物质燃烧时, 它们发出的光通过三棱镜, 形成多条亮线组成的光谱, 亮线所在的位置与元素是相互对应的. 对于自然数的乘法结构, 或是素数而言, 它们的谱恰恰就是ζ-函数的零点. 它们是否具有$\frac{1}{2}+it$的形式?

希尔伯特(Hilbert)曾把费尔马大定理比喻成一只会下金蛋的母鸡, 有人把哥德巴赫猜想比喻成皇冠上的明珠, 那么黎曼假设就是数学王国的半壁江山.

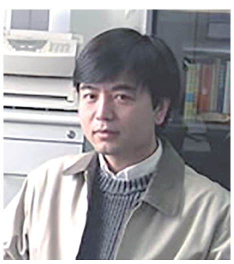
参考文献

1 Baker R C, Harman G, Pintz J. The difference between consecutive primes, II. Proc London Math Soc, 2001, (83): 532–562

2 Bombieri E. Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers, I. Rend Mat Acc Lincei, 2000, (9): 183–233

3 Cramér H. On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. Acta Arith, 1936, (2): 23–46

4 Erdös P. On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. Proc Nat Acad Sci USA, 1949, (35): 374–384
5 Gauss C F. Gauss C F-Werke Banden. Göttingen, 1863, 444–447
6 Hadamard J. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. Bull Soc Math France, 1896, 24: 199–220
7 Jia C H. Almost all short intervals containing prime numbers. Acta Arith, 1996, (76): 21–84
8 Lee T D, Yang C N. Statistical theory of equations of state and phase transitions, II. Lattice Gas and Ising Model. Phys Rev, 1952, (87): 410–419
9 Li X. The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis. J Number Theory, 1997, (65): 325–333
10 Von Mangoldt H. Zu Riemanns Abhandlung "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse". J Reine Angew Math, 1895, (114): 255–305
11 Montgomery H L. The pair correlation of zeros of the zeta function. Proc Sympos Pure Math, 1973, 181–193
12 Newman C M. Fourier transforms with only real zeros. Proc Amer Math Soc, 1976, (61): 245–251
13 Newman D J. Simple analytic proof of the prime number theorem. Amer Math Monthly, 1980, (87): 693–696
14 Odlyzko A D. The 10^{22}-nd zero of the Riemann zeta function. Comtemp Math, 2001, (290): 139–144
15 Riemann B. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsber Berlin Akad, 1859: 671–680
16 Selberg A. An elementary proof of the prime-number theorem. Ann Math, 1949, 50: 305–313
17 Vallée-Poussin C J. Recherches analytiques de la théorie des nombres premiers. Ann Soc Sci Bruxelles, 1896, 20: 183–256, 281–352, 363–397, 1896, 21: 351–368
18 Weil A. Sur les formules explicites de la théorie des nombres. Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1972, (36): 3–18
19 Zagier D. Newman's short proof of the prime number theorem. Amer Math Monthly, 1997, (104): 705–708



葛力明

中国科学院数学与系统科学研究院研究员. 1984年于北京大学数学系获学士学位, 1987年在曲阜师范大学数学系获硕士学位, 1995年于美国宾西法尼亚大学数学系获博士学位. 2000年获中国科学院"百人计划"资助, 2003年入选教育部"长江学者特聘教授".

Summary for “黎曼ζ-函数的零点都有$\frac{1}{2}+it$的形式吗?”

Do mathematically interesting zero-value solutions of the Riemann zeta function all have the form $\frac{1}{2}+it$?

Liming Ge* & Boqing Xue

Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijin 100190
* Corresponding author, E-mail: liming@math.ac.cn

This survey explains what Riemann hypothesis is and its connections with the distribution of prime numbers. Some of the equivalent conditions are described.

riemann zeta function, distribution of primes, Euler product, functional equation, explicit formula, positivity

doi: 10.1360/N972017-00022