中国科学(A 辑)
第 32 卷 第 4 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2002 年 4 月

复数折射率介质中光束传输的 Schrödinger 形式理论*

刘承宜** 郭 弘 胡 巍 邓冬梅
(华南师范大学传输光学实验室,广州 510631)

摘要 将复数折射率介质的 Helmholtz 方程化为具有复数势能的 Schrödinger 方程的形式,用进化算子的逆算子代替相应的共轭算子,定义了新的左矢、力学量的新平均值和推广的 Heisenberg 图像,利用量子力学方法讨论了力学量的新平均值表示的复数光束传输参数、复数 ABCD 定律和复数 ABCD 系统的 Huygens 积分. 研究表明,复数光束传输参数的进化方程与实数折射率系统的相应方程相同. 对于复数光束质量因子守恒系统的研究表明,复数 ABCD 定律成立,位置算子和动量算子的进化方程是线性的,Huygens 积分可以写成 ABCD 形式.

关键词 复数折射率 Schrödinger 方程 Heisenberg 图像 ABCD 定律 Huygens 积分

光束和它传输的介质构成一个光学系统. 如果一个光学系统的介质折射率是实数(或复数),本文将该光学系统称为实数(或复数)光学系统. 复数光学系统有许多与实数光学系统不同的性质[1,2],例如,Hamiltonian 算子[3,4]不再是 Hermitian 算子[5],相应的进化算子不再是幺正算子[5],按照文献[3,4]方法定义的光束传输参数不再呈现简单的数学关系. 文献[3,4]将 Helmholtz 方程化为 Schrödinger 方程的形式利用量子力学方法[5]建立了实数光学系统的 Schrödinger 形式体系. 本文将文献[3,4]的理论推广到复数光学系统. 为了简单起见,本文讨论轴对称系统傍轴光束的传输.

1 光束传输的基本参数

本节是全文的理论基础. 设真空中的波数和波长分别为 k_0 和 λ_0,介质复数折射率 n 的复常数部分为 n_0,则 Helmholtz 方程的解可以写为

$$\psi(\boldsymbol{r},z)=\varphi(\boldsymbol{r},z)\exp(\mathrm{i}n_0k_0z),\tag{1}$$

在傍轴近似下,利用 Dirac 符号[5]可以将 Helmholtz 方程写为

$$\mathrm{i}\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}|\varphi(z)\rangle=H|\varphi(z)\rangle,\tag{2}$$

2001-04-18 收稿,2001-08-13 收修改稿

* 国家自然科学基金重点项目(批准号: 69789801)、广东省自然科学基金重点项目(批准号: 970842)及团队项目(批准号: 20003061)、教育部霍英东青年教师基金及国家高技术惯性约束聚变委员会的经费资助项目

** E-mail: liutcy@scnu.edu.cn

式中 $H=p^2/2n_0+V$, $\boldsymbol{p}$ 为动量算子[3,4], $V=n_0(1-n^2/n_0^2)/2$. 在空间坐标表象中, $\boldsymbol{p}=-\mathrm{i}\nabla_\perp/k_0$, $\nabla_\perp=\partial/\partial\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}$ 为光束的 d 维横截面坐标.

对于进化算子 $U(z,0)$, $U(z,0)U^{-1}(z,0)=1$, 根据(2)式可得

$$\mathrm{i}\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}U(z,0)=HU(z,0), \tag{3}$$

$$\mathrm{i}\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}U^{-1}(z,0)=-U^{-1}(z,0)H. \tag{4}$$

对于实数光学系统, $U^{-1}(z=0)=U^{+}(z,0)$(上标"+"表示 Hermite 共轭[5]), 因此(4)式可以从(3)式取 Hermite 共轭[5]得到.

设 $|\varphi_i(z_i)\rangle=U(z_i,0)|\varphi(0)\rangle(i=1,2)$. 定义新的左矢, $\langle\varphi_{\mathrm{E}i}(z_i)|=\langle\varphi(0)|U^{-1}(z_i,0)(i=1,2)$. 根据(1)式, 可以定义 $\langle\psi_{\mathrm{E}i}(z_i)|=\exp(-\mathrm{i}kz_i)\langle\varphi_{\mathrm{E}i}(z_i)|$, 因此可得

$$|\psi_2(z_2)\rangle=\exp[\mathrm{i}k(z_2-z_1)]T(z_2,z_1)|\psi_1(z_1)\rangle, \tag{5a}$$

$$\langle\psi_{\mathrm{E}2}(z_2)|=\exp[-\mathrm{i}k(z_2-z_1)]\langle\psi_{\mathrm{E}1}(z_1)|T^{-1}(z_2,z_1), \tag{5b}$$

式中 $T(z_2,z_1)=U(z_2,0)U^{-1}(z_1,0)$, $T^{-1}(z_2,z_1)=U(z_1,0)U^{-1}(z_2,0)$. 相应的传播子为 $K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1)=\langle\boldsymbol{r}_2|T(z_2,z_1)|\boldsymbol{r}_1\rangle$ 和 $K_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;z_2,z_1)=\langle\boldsymbol{r}_1|T^{-1}(z_2,z_1)|\boldsymbol{r}_2\rangle$:

$$\psi_2(\boldsymbol{r}_2,z_2)=\exp[\mathrm{i}k(z_2-z_1)]\int K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1)\psi_1(\boldsymbol{r}_1,z_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1, \tag{6a}$$

$$\psi_{\mathrm{E}2}(\boldsymbol{r}_2z_2)=\exp[-\mathrm{i}k(z_2-z_1)]\int K_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;z_2,z_1)\psi_{\mathrm{E}1}(\boldsymbol{r}_1,z_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1, \tag{6b}$$

容易证明, 常数折射率介质($n=n_0$)中(6a)式就是 Fresnel 衍射积分.

实数光学系统的力学量 F 的平均值为 $\langle F\rangle I=\langle\varphi(z)|F|\varphi(z)\rangle=\langle\varphi(0)|U^{+}(z,0)FU(z,0)|\varphi(0)\rangle(I=\langle\varphi(0)|\varphi(0)\rangle)$[3,4]. 对于复数光学系统, Hamilton 算子 H 不再是 Hermite 算子, 相应的进化算子 U 不再满足 $UU^{+}=\hat{I}$, 按照上述平均值定义的光束传输参数不再呈现简单的数学关系. 为了获得类似于实数光学系统的简单关系, 本文用进化算子的逆算子 U^{-1} 代替相应的共轭算子 U^{+}, 将复数光学系统的动力学变量 F 的平均值定义为 $\{F\}I=\langle\varphi(0)|U^{-1}(z,0)FU(z,0)|\varphi(0)\rangle=\langle\varphi_{\mathrm{E}}|F|\varphi\rangle$. 根据文献[3,4], 光束的束宽 W, 发散角 Θ, 曲率半径 R 和质量因子 M 的定义分别为 $W^2=4\{r^2\}/Id$, $\Theta^2=4\{p^2\}/Id$, $W^2/R=2\{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\}/Id$ 和 $M^4=k_0^2(W^2\Theta^2-W^4/R^2)/4$. 与实数光学系统不同的是, 本文定义的光束传输的基本参数不再是实数, 本文称为复数光束传输参数. 值得指出的是, 对于实数光学, $U^{-1}(z,0)=U^{+}(z,0)$, 本文定义的复数光束传输参数自动变成相应的光束传输参数.

根据(3)和(4)式可得:

$$\mathrm{i}\frac{1}{k_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\{F\}=\mathrm{i}\frac{1}{k_0}\left\{\frac{\partial}{\partial z}F\right\}+\{[F,H]\}, \tag{7}$$

除了平均值的定义方式不一样外, (7)式在形式上与实数光学系统中动力学变量的进化方程[3,4]是一样的. 虽然以上定义的平均值是一个复数, 但它满足(7)式的性质赋予它类似于实数光学系统的相应平均值的性质, 大大简化了复数光学系统的讨论. 利用文献[3,4]的方法, 根据(7)式可以得到文献[3,4]关于傍轴光束的所有结论, 例如

$$\frac{\mathrm{d}W^2}{\mathrm{d}z}=2\frac{W^2}{n_0R}, \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}M^4}{\mathrm{d}z} = \frac{k^2 W^2}{4n_0^2}\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}z} - \frac{k^2}{8}\frac{\mathrm{d}W^2}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}^2 W^2}{\mathrm{d}z^2} - \frac{2}{n_0^2}\Theta^2\right), \tag{9}$$

(9)式可以用于判断复数质量因子是否守恒．本文只讨论复数质量因子守恒的系统．

2 复数 ABCD 定律

由于复数质量因子守恒，可以定义一个 q 参数[3,4]：$q^{-1} = R^{-1} + 2\mathrm{i}M^2 W^{-2}/k_0$．根据(8)和(9)式可得复数质量因子守恒的充要条件：

$$n_0 \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z} = 1 - q^2 \frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}W^2}, \tag{10}$$

引入 Ricatti 代换[6]可得复数 ABCD 定律

$$q_2^{-1} = (C + Dq_1^{-1})(A + Bq_1^{-1})^{-1}, \tag{11}$$

$$C = n_0 \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z},\ D = n_0 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{n_0}\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}W^2}, \tag{13}$$

显然 $AD - BC$ 与 z 无关，可以选择[7]

$$AD - BC = 1. \tag{14}$$

利用(11～13)式可以得到(10)式．因此，复数质量因子守恒是复数 ABCD 定律成立的充要条件．复数质量因子守恒的系统可以称为复数 ABCD 系统．这是本文的重要结论之一．值得指出的是，本结论对于质量因子守恒的实数 ABCD 系统也是成立的．

实数 ABCD 系统的束宽、发散角和曲率半径的变换方程已经被 Porras 等人[8]利用 Huygens 积分 ABCD 形式[1,9]得到．通过引入待定函数 K，本文假定束宽的变换方程对复数 ABCD 系统仍然成立：

$$W_2^2 = (A + BR_1^{-1})^2 W_1^2 + B^2 \frac{4}{k_0^2} M_1^4 W_1^{-2} + K, \tag{15}$$

利用(8)式可得

$$R_2^{-1} W_2^2 = (A + BR_1^{-1})(C + DR_1^{-1}) W_1^2 + BD \frac{4}{k_0^2} M_1^4 W_1^{-2} + \frac{n_{02}}{2}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z_2}, \tag{16}$$

利用(15)、(16)和(11)式可得

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z_2} = \frac{2K}{n_{02} q_2}, \tag{17}$$

因此，(16)式可以写为

$$R_2^{-1} W_2^2 = (A + BR_1^{-1})(C + DR_1^{-1}) W_1^2 + BD \frac{4}{k_0^2} M_1^4 W_1^{-2} + Kq_2^{-1}, \tag{18}$$

由于复数质量因子守恒，根据(9)式可得复数发散角 Θ 的表达式，利用(8)、(12)、(13)、(15)、(17)和(18)式可得

$$\Theta_2^2 = (C + DR_1^{-1})^2 W_1^2 + D^2 \frac{4}{k_0^2} M_1^4 W_1^{-2} + Kq_2^{-2}, \tag{19}$$

根据(11)式可以确定 ABCD 矩阵元的初值为 $A = 1, B = 0, C = 0$ 和 $D = 1$，代入以上 4 式可知 K

$=0$. 下面利用这个解来推导复数 ABCD 系统的 Huygens 积分.

3 Huygens 积分

Nazarathy 等[10]和 Wright 等[11]分别利用算子方法和路径积分方法推出了复数类透镜介质(含有增益或损耗的类透镜介质)中的 Huygens 积分. Siegman[1]得到了含有复数类透镜元件的级联系统的衍射积分. Tovar 等人[12]将传播常数展开到空间坐标的二次项,利用 Gauss 小束(beamlet)迭加的方法得到了复数准直 ABCD 系统的 Huygens 积分和复数离轴 ABCDGH 系统的 Huygens 积分. 以上方法各有优缺点. 然而还没有一种方法可以一般地得到复数 ABCD 系统的 Huygens 积分. 本节利用前面的结果来推导复数 ABCD 系统的 Huygens 积分.

用进化算子的逆算子 U^{-1}代替相应的共轭算子 U^{+},可得推广的 Heisenberg 图像(Extended Heisenberg picture): $|\varphi_{\mathrm{EH}}\rangle=U^{-1}(z,0)|\varphi(z)\rangle$和 $F_{\mathrm{EH}}=U^{-1}(z,0)FU(z,0)$. 根据复数光束传输参数的定义和光学变换的物理意义,由(15)和(19)式可得($K=0$):

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{EH2}}=A\boldsymbol{r}_{\mathrm{EH1}}+B\boldsymbol{p}_{\mathrm{EH1}},\quad \boldsymbol{p}_{\mathrm{EH2}}=C\boldsymbol{r}_{\mathrm{EH1}}+D\boldsymbol{p}_{\mathrm{EH1}}, \tag{20}$$

根据空间坐标算子和动量算子的对易关系和(20)式可以证明(14)式. 根据算子的一般性质和(20)式可以证明,ABCD 为实数的充分必要条件是折射率为实数.

根据(20)式可得

$$\boldsymbol{r}T=AT\boldsymbol{r}+BT\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{p}T=CT\boldsymbol{r}+DT\boldsymbol{p} \tag{21}$$

这是 Nazarathy 等人[13]算子理论的出发点. 从本文上面的推导可知,(21)式是复数 ABCD 系统的基本特性. 利用表象技术很容易从(21)式推出复数 ABCD 系统的 Huygens 积分公式. 在空间坐标表象中,分别用$\langle\boldsymbol{r}_2|$和$|\boldsymbol{r}_1\rangle$左乘和右乘(21)式可得

$$\boldsymbol{r}_2K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1,z_2,z_1)=A\boldsymbol{r}_1K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1)+\mathrm{i}B\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1), \tag{22}$$

$$-\mathrm{i}\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_2}K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1)=C\boldsymbol{r}_1K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1)+\mathrm{i}D\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1). \tag{23}$$

根据以上两式求出传播子

$$K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1)=\left(-\frac{\mathrm{i}}{B\lambda_0}\right)^{\frac{d}{2}}\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{B\lambda_0}(Ar_1^2-2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+Dr_2^2)\right], \tag{24a}$$

代入($6a$)式可得空间坐标表象中复数 ABCD 系统的 Huygens 积分. 形式上,它与实数 ABCD 系统的 Huygens 积分[1,9]和 Tovar 等人[12]的结果相同. 由于真空中波长 λ_0 是实数,折射率的复数性质完全体现在 *ABCD* 矩阵元上. 值得指出的是,除了复数质量因子守恒外,本文没有限定折射率的具体形式,可以说是一般性的结果.

分别用 T^{-1}左乘和右乘(21)式可得关于 T^{-1}的方程. 在空间坐标表象中,分别用$\langle\boldsymbol{r}_2|$和$|\boldsymbol{r}_1\rangle$左乘和右乘所得方程可得类似于(22)和(23)式的关于 $K_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;z_2,z_1)$的两个微分方程. 求解所得的微分方程可得

$$K_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;z_2,z_1)=\left(\frac{\mathrm{i}}{B\lambda_0}\right)^{\frac{d}{2}}\exp\left[-\mathrm{i}\frac{\pi}{B\lambda_0}(Ar2_1-2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+Dr_2^2)\right], \tag{24b}$$

利用 Porras 等人[8]类似的方法可以证明,按照(6)和(24)式进化的系统的复数光束传输参数满足(15)、(18)和(19)式($K=0$),因此,复数光束质量因子是守恒的,可以定义 q 参数. 所以,对

于传播常数可以展开到空间坐标的二次项的系统，本文的结论与 Tovar 等人[12]的结果是一致的．

4 级联 ABCD 系统

对于单个复数 ABCD 系统，引入复数 ABCD 矩阵 T、算子 Z 和算子矩阵 X：

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{\mathrm{EH}} \\ \boldsymbol{p}_{\mathrm{EH}} \end{pmatrix},\ X = ZZ' = \begin{pmatrix} r_{\mathrm{EH}}^2 & \boldsymbol{r}_{\mathrm{EH}} \cdot \boldsymbol{p}_{\mathrm{EH}} \\ \boldsymbol{p}_{\mathrm{EH}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{EH}} & p_{\mathrm{EH}}^2 \end{pmatrix},$$

式中上角标“′”表示矩阵的转置形式．根据(20)式可得

$$Z_2 = TZ_1, \tag{25}$$

$$X_2 = TX_1T', \tag{26}$$

对于实数光学系统，容易证明 $\langle \varphi_2(z_2) | X_2 | \varphi_2(z_2) \rangle = T \langle \varphi_1(z_1) | X_1 | \varphi_1(z_1) \rangle T'$ 就是 Meron 等人[14]提出的所谓变数矩阵进化方程，而变数矩阵的行列式正比于光束质量因子，质量因子的守恒对应于 T 或 T' 的行列式为 1，即(14)式成立．当然，上述性质对于复数 ABCD 系统也是成立的．换句话说，本文将 Meron 等人[13]的工作推广到了复数光学系统．

对于由 N 个复数 ABCD 子系统级联构成的光学系统，从入射面到出射面将复数 ABCD 子系统依次编号．设第 j 个复数 ABCD 子系统的 ABCD 矩阵为 Γ_j．根据(25)式可知，系统的总复数 ABCD 矩阵为

$$\Gamma = \Gamma_N \Lambda \cdots \Gamma_{j+1} \Gamma_j \Gamma_{j-1} \cdots \Lambda \Gamma_1 \tag{27}$$

根据前面的讨论可以证明，复数 ABCD 系统的 Huygens 积分对总复数 ABCD 矩阵仍然成立．Siegman[1]曾经猜想两步级联 ABCD 系统的 Huygens 积分(cascading Huygens’ integral)对总 ABCD 矩阵仍然成立，本文首次给出 N 步级联复数 ABCD 系统 Huygens 积分的一般证明．Meron 等人[14]只讨论了单个实数 ABCD 系统变数矩阵的进化，只要将(26)式中的变换算子换成总变换算子，根据本文方案容易讨论 N 个复数 ABCD 系统级联变数矩阵的进化．

5 讨论

文献[3,4]将 Helmholtz 方程化为具有实数势能的 Schrödinger 方程的形式利用量子力学方法[5]建立了描述实数光学系统的 Schrödinger 形式体系．本文应用这个形式体系来讨论复数光学系统．然而，复数光学系统有许多与实数光学系统不同的性质[1,2]，例如，Hamilton 算子 H 不再是 Hermite 算子，相应的进化算子 U 不再满足 $UU^+ = \hat{I}$，按照文献[3,4]方法定义的光束传输参数不再呈现简单的数学关系．为了获得类似于实数光学系统的简单关系，本文用进化算子的逆算子 U^{-1} 代替相应的共轭算子 U^+，定义了新的左矢、力学量的新平均值和复数光束传输参数．正如(7)～(10)式所示，用这种方式定义的复数光束传输参数具有实数光学系统中光束传输参数类似的性质[3,4]．虽然本文定义的复数光束传输参数没有直接的物理意义，但根据 q 参数的进化方程(10)式所得的复数 ABCD 矩阵元与其他方法[7, 10, 11]得到的矩阵元是一致的，例如，常数折射率系统($n = n_0$)和类透镜系统[$n^2 = n_0^2(1 - \alpha^2 r^2)$]的 ABCD 矩阵元分别为 $\begin{pmatrix} 1 & z/n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \cos\alpha z & \dfrac{1}{n_0\alpha}\sin\alpha z \\ -n_0\alpha\sin\alpha z & \cos\alpha z \end{pmatrix}$．不但如此，本文所得的复数 ABCD 系统的 Huygens 积

分与其他方法[10, 11]得到的同一介质的 Huygens 积分也是一致的．这种一致性说明,本文定义的复数光束传输参数仍然有一定的物理意义．当然,这些复数光束传输参数与常规定义的光束传输参数之间的关系有待进一步研究．

本文对量子力学的图像理论[5]也有所发展,给出了处理复数势能系统的一种新的方法．用进化算子的逆算子 U^{-1}代替相应的共轭算子 U^{+},本文将 Heisenberg 图像加以推广,从复数光束传输参数的变换方程(15)和(19)两式($K=0$)得到了位置算子和动量算子的线性进化方程,利用量子力学的表象理论非常简单地得到了一般复数 ABCD 系统的 Huygens 积分．利用位置算子和动量算子的线性进化方程很容易开展一般性的讨论,例如,证明折射率为实数是 ABCD 矩阵元为实数的充要条件,讨论级联复数 ABCD 系统的 Huygens 积分等．

前人讨论复数 ABCD 系统的衍射积分时,总是针对具体的 ABCD 系统,例如,类透镜介质[10,11]或者将传播常数展开到空间坐标的二次项[12],本文除了假定复数质量因子守恒以外没有假设复数折射率的具体形式,因此,可以进行一般性的讨论．作为本文的结束,这里讨论用 q 参数表达的波函数形式．

设 $\varphi(\boldsymbol{r},z)$的形式可以写为

$$\varphi(\boldsymbol{r},z)=\frac{f}{n_0q}\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{k_0r^2}{2q}\right). \tag{28}$$

将上式代入(2)式,利用(10)式可得($d=2, L=\mathrm{d}\Theta^2/\mathrm{d}W^2$)

$$\frac{\mathrm{i}}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\ln f+\frac{1}{2n_0k_0^2}[(\nabla_\perp\ln f)^2+\nabla_\perp\ln f]+\frac{\mathrm{i}}{n_0k_0q}\boldsymbol{r}\cdot\nabla_\perp\ln f+\frac{\mathrm{i}Lq}{n_0k_0}=V+\frac{r^2L}{2n_0}, \tag{29}$$

显然,只有常数折射率介质($n=n_0, L=0$)和类透镜介质($n^2=n_0^2[1-(-1)^l\alpha^2r^2], L=(-1)^l\alpha^2n_0^2$)才可以取 $f(\boldsymbol{r},z)=f_1(z)f_2(\beta\boldsymbol{r})(2\beta^2=k_0/q)$．对于这两类介质,(28)与(10)式与 Tovar 等人[7]的结果是一致的．值得指出的是本文的方法与 Tovar 等人[7]的方法是不同的．Tovar 等人[7]假定(2)式具有(28)式这样的解,将(28)代入(2)式推出(10)式．本文从守恒的复数质量因子出发得到(10)式,利用(2)式论证以上两种介质中光函数的基模肯定可以写成(28)式的形式．

参考文献

1 Siegman A E. Lasers. Mill Valley: Oxford U Press, 1986

2 Kostenbauder A, Sun Y, Siegman A E. Eigenmode expansions using biorthogonal functions: complex-valued Hermite-Gaussians. J Opt Soc Am A, 1997, 14(8): 1780 ~ 1790

3 刘承宜,郭 弘,胡 巍,等．光束传输的 Schröedinger 形式理论研究．中国科学, A 辑, 2000, 30(1): 54 ~ 62

4 Liu T C Y, Guo H, Hu W, et al. A schroedinger formulation research for paraxial light beam propagation and its application to the propagation through nonlinear square law media. Chin Phys Lett, 2000, 17(10): 734 ~ 736

5 Schiff L I. Quantum Mechanics. 3rd ed. USA: McGraw-Hill Book Company, 1968

6 Tovar A A, Casperson L W. Generalized beam matrices: Gaussian beam propagation in misaligned complex optical systems. J Opt Soc Am A, 1995, 12(7): 522 ~ 1533

7 Luneberg R K. Mathematical Theory of Optics. Berkeley: University of California Press, 1964. 216 ~ 226

8 Porras M A, Aida J, Bernabeu E. Complex beam parameter and ABCD law for non-Gaussian and nonspherical light beams. Appl Opt, 1992, 31(30): 6389 ~ 6420

9 Collins Jr S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics. J Opt Soc Am, 1970, 60(9): 1168 ~ 1171

10 Nazarathy M, Shamir J. First-order optics——operator representation for systems with loss or gain. J Opt Soc Am, 1982, 72(10): 1398 ~ 1408

11 Wright E M, Garrison J G. Path-integral derivation of the complex ABCD Huygens integral. J Opt Soc Am A, 1987, 4(9): 1751 ~ 1755

12 Tovar A A, Casperson L W. Generalized beam matrices: III. Application to diffraction analysis. J Opt Soc Am A, 1996, 13(11): 2239 ~ 2246

13 Nazarathy M, Shamir J. First-order optics——a canonical operator representation ; lossless systems. J Opt Soc Am, 1982, 72(3): 356 ~ 364

14 Meron M, Viccaro P J, Lin B. Geometrical and wave optics of paraxial beams. Phys Rev E, 1999, 59(6): 7152 ~ 7165