

一种新的光栅衍射干涉效应—部分相干 光照明 Lau 装置的理论*

刘 立 人

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

摘 要

本文用模糊函数方法分析了空间部分相干光照明 Lau 装置时的效应,发现了一种新的光栅衍射干涉现象。首先推了解析表达式,表明衍射干涉条纹图象是由等效相干度函数在光栅衍射级次位置上截取一系列周期性强度函数后叠加而产生。非相干照明下的 Lau 条纹和相干照明下的光栅衍射强度分布是两种极端情况。然后给出了典型参数下的数值图解,讨论了相干度对条纹图象的影响和光栅平移产生条纹不对称分布的性质。最后给出了验证和干涉仪应用的实验。

关键词: 光栅衍射,模糊函数

一、引 言

用单色空间非相干扩展光照明一光栅,通过另一光栅在透镜后焦面上产生平行干涉条纹的现象称为 Lau 效应^[1]。这些年来 Lau 效应得到了极为广泛而深入的研究,已成为现代物理光学中的一个重要方面。主要研究有衍射理论^[2],部分相干理论^[3,4],光栅衍射干涉仪模型^[5],光学传递函数^[6], Bloch 函数^[7],虚 Fraunhofer 衍射和波象差原理^[8], Talbot 象空间非相干叠加原理^[9], Wigner 函数^[10],反向脉冲传递^[11],衍射相关器模型^[12]和模糊函数^[13]等。甚至也提出过光栅之外的平面物体的 Lau 效应理论^[14]。所有这些理论和实验都是基于空间非相干照明的。此外 Lohmann 等也发现了部分相干情况下互强度传播过程中的横向和轴向周期性之间的关系^[15,16]。

由此可见现代光学中的概念和方法几乎都被用于研究 Lau 效应,这是很少见的。但是至今还未研究过空间部分相干光照明 Lau 装置下的衍射干涉现象,尚不了解此种情况下可能产生的衍射干涉条纹的图象形态。显然这是一项很有意义的现代物理光学基础研究。本文主要从理论上研究空间部分相干光照明 Lau 装置下的衍射干涉效应,发现存在着介于非相干 Lau 条纹和相干的光栅衍射图象之间的新的条纹图像形态。而彻底了解从非相干到部分相干,再到相干条件下的衍射干涉现象的全过程,无疑对与 Lau 现象和光栅衍射有关的干涉学^[17-20]以及其它有关工作是有指导意义的(以下简称空间部分相干为部分相干)。

本文 1987 年 10 月 17 日收到,1988 年 2 月 16 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

准单色近似下的部分相干系统常用互强度来分析, 而本文将采用一种较新发展的数学工具——模糊函数。模糊函数是从雷达中为同时测量运动目标的距离和速度的测不准原理引出的。这种相位空间表达法用于光学能简化部分相干光学系统的处理, 同时还可利用几何光学的矩阵运算来处理传递过程^[21,22]。模糊函数, Wigner 函数和互强度之间有着内在的关联。

二、关于模糊函数

若互强度用中心位置坐标 \mathbf{s} 和位置坐标差 $\Delta\mathbf{s}$ 表征, 即 $J(\mathbf{s}, \Delta\mathbf{s})$, 则模糊函数定义为互强度对位置 \mathbf{s} 的 Fourier 积分。它是空间频率差 $\Delta\mathbf{v}$ 和位置差 $\Delta\mathbf{s}$ 的函数;

$$A(\Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} J(\mathbf{s}, \Delta\mathbf{s}) \exp(-2\pi i \mathbf{s} \cdot \Delta\mathbf{v}) d\mathbf{s}. \quad (1)$$

模糊函数 A_1 通过薄扰动介质 A_2 后的模糊函数 A_3 为卷积积分

$$A_3(\Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\Delta\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}', \Delta\mathbf{s}) A_2(\Delta\mathbf{v}', \Delta\mathbf{s}) d\Delta\mathbf{v}'. \quad (2)$$

如同几何光学一样, 可用矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 来表达模糊函数的传递, 即

$$A_2(\Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{s}) = A_1(a\Delta\mathbf{v} + b\Delta\mathbf{s}, d\Delta\mathbf{s} + c\Delta\mathbf{v}). \quad (3)$$

这里 $ad - bc = 1$ 。例如自由空间的传递为 $D(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda z & 1 \end{bmatrix}$, 透镜为

$$L(f) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda f} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

透镜的 Fourier 变换为 $F(f) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda f} \\ -\lambda f & 0 \end{bmatrix}$ 。整个系统的传递矩阵可由各单元的传递矩阵以

次序相乘而得。

光强分布为 $I(\mathbf{s}) = J(\mathbf{s}, 0)$, 所以

$$I(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\Delta\mathbf{v}, 0) \exp(2\pi i \Delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) d\Delta\mathbf{v}. \quad (4)$$

观察 Lau 效应的 Ronchi 光栅为一维矩形光栅

$$g(x, y) = g^2(x, y) = \sum_n \operatorname{rect} \left(\frac{x - nT}{h} \right). \quad (5)$$

周期为 T , 开口为 h 。所以模糊函数为^[23]:

$$\begin{aligned} A_g(\Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{s}) &= A_g(\Delta v_x, \Delta x) \delta(\Delta v_y), \quad (6) \\ A_g(\Delta v_x, \Delta x) &= \sum_n \sum_m \left\{ \frac{h}{T} \Lambda \left(\frac{\Delta x - 2mT}{h} \right) \sin c \left[\Delta v_x h \Lambda \left(\frac{\Delta x - 2mT}{h} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \frac{h}{T} \Lambda \left(\frac{\Delta x - (2m+1)T}{h} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin c \left[\Delta v_x h \Lambda \left(\frac{\Delta x - (2m+1)T}{h} \right) \right] \right\} \delta \left(\Delta v_x - \frac{n}{T} \right). \quad (6') \end{aligned}$$

这里 Δv 和 Δs 在直角坐标系中用它们的分量 Δv_x 和 Δv_y , Δx 和 Δy 表示。

如同 Lau 效应一样,系统原理上应该在单色光下观察,因此照明光可作单色近似。部分相干光可取空间准均匀分布^[23],并常用 Gauss 形函数表征^[24],即光源的互强度为:

$$J_0(\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s}) = I_0 \exp\left(-\frac{2|\mathbf{s}|^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{2|\Delta \mathbf{s}|}{\xi_0^2}\right). \quad (7)$$

前一项为“慢”函数,表示光强分布。后一项为“快”函数,代表空间相干度。这种定义使 $|\mathbf{s}|$ 等于 a 和 $|\Delta \mathbf{s}|$ 等于 ξ_0 时,函数下降至 e^{-2} 。光学系统的通光口径为 r , 则 $r \gg a \gg \xi_0$ 。

因此部分相干照明的模糊函数为:

$$A_0(\Delta v, \Delta s) = I_0 \frac{\pi a^2}{2} \exp\left[-\frac{\pi^2 a^2}{2} (\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2)\right] \exp\left[-\frac{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\xi_0^2}\right]. \quad (8)$$

应当注意: 当 $\xi_0 \rightarrow 0$ 时为非相干光, 而 $\xi_0 \rightarrow \infty$ 时为相干光。

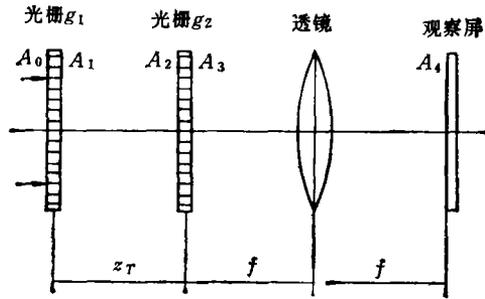


图 1 典型的 Lau 装置

三、基本理论

典型的 Lau 效应装置见于图 1。部分相干照明为 A_0 , 则通过第一光栅后的模糊函数由 (2) 式可得

$$A_1(\Delta v, \Delta s) = I_0 \left(\frac{\pi a^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\xi_0^2}\right] \exp\left[-\frac{\pi^2 a^2 \Delta v_y^2}{2}\right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 a^2}{2} (\Delta v_x - \Delta v'_x)^2\right] A_{g_1}(\Delta v'_x, \Delta x) d\Delta v'_x. \quad (9)$$

经自由空间传播 $D(z_T)$, 并令 z_T 符合 Talbot 自成像条件

$$z_T = p \frac{2T^2}{\lambda}. \quad (10)$$

同时据文献[13]

$$A_g(\Delta v_x, \Delta x) = A_g(\Delta v_x, \Delta x - \lambda z_T \Delta v_x).$$

可得入射于第二光栅上的模糊函数为:

$$A_2(\Delta v, \Delta s) = I_0 \frac{\pi a^2}{2} \exp\left[-\frac{2(\Delta x - \lambda z_T \Delta v_x)^2}{\xi_0^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{2(\Delta y - \lambda z_T \Delta v_y)^2}{\xi_0^2}\right] \exp\left[-\frac{\pi^2 a^2}{2} \Delta v_y^2\right] v_x$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{\pi^2 a^2}{2} (\Delta v_x - \Delta v'_x)^2 \right] A_{g_1}(\Delta v'_x, \Delta x) d\Delta v'_x. \quad (11)$$

通过第二光栅后,

$$\begin{aligned} A_2(\Delta v, \Delta s) &= I_0 \frac{\pi a^2}{2} \exp \left[-\frac{2(\Delta y \lambda z_T \Delta v_y)^2}{\xi_0^2} \right] \exp \left[-\frac{\pi^2 a^2}{2} \Delta v_y^2 \right] \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2(\Delta x - \lambda z_T \Delta v''_x)^2}{\xi_0^2} \right] \exp \left[-\frac{\pi^2 a^2}{2} (\Delta v''_x - \Delta v'_x)^2 \right] \\ &\cdot A_{g_1}(\Delta v'_x, \Delta x) A_{g_2}(\Delta v_x - \Delta v''_x, \Delta x) d\Delta v'_x d\Delta v''_x. \end{aligned} \quad (12)$$

通过透镜的光学 Fourier 传递 $F(f)$ 后, 在观察屏上的模糊函数为:

$$\begin{aligned} A_4(\Delta v, \Delta s) &= I_0 \frac{\pi a^2}{2} \exp \left[-\frac{2 \left(\lambda f \Delta v_x + \frac{z_T}{f} \Delta y \right)^2}{\xi_0^2} \right] \exp \left[-\frac{\pi^2 a^2}{2} \left(\frac{\Delta y}{\lambda f} \right)^2 \right] \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{2(\lambda f \Delta v_x + \lambda z_T \Delta v''_x)^2}{\xi_0^2} \right] \exp \left[-\frac{\pi^2 a^2}{2} (\Delta v''_x - \Delta v'_x)^2 \right] \\ &\cdot A_{g_1}(\Delta v'_x, -\lambda f \Delta v_x) A_{g_2} \left(\frac{\Delta x}{\lambda f} - \Delta v''_x, -\lambda f \Delta v_x \right) d\Delta v'_x d\Delta v''_x. \end{aligned} \quad (13)$$

观察屏上的光强分布由(4)式可取得为:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= I_0 \frac{\pi a^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_0}{\lambda f} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \xi_0}{\lambda f} \right)^2 y^2 \right] \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2(\lambda f \Delta v_x + \lambda z_T \Delta v''_x)^2}{\xi_0^2} \right] A_{g_1}(\Delta v'_x, -\lambda f \Delta v_x) \\ &\cdot A_{g_2}(-\Delta v''_x, -\lambda f \Delta v_x) \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x \\ &\cdot \exp \left[-\frac{\pi^2 a^2}{2} (\Delta v''_x - \Delta v'_x)^2 \right] d\Delta v'_x d\Delta v''_x. \end{aligned} \quad (14)$$

通常要求照明光必须占据足够数量的光栅线, 即 $a \gg T$, 因此上式中的光强 x 分量的积分式可加以简化, 即

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2(\lambda f \Delta v_x + \lambda z_T \Delta v''_x)^2}{\xi_0^2} \right] A_{g_1}(\Delta v''_x, -\lambda f \Delta v_x) \\ &\cdot A_{g_2}(-\Delta v''_x, -\lambda f \Delta v_x) \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v''_x d\Delta v_x. \end{aligned}$$

其中再运用 A_g 的偶函数性质, 并令 $\Delta v''_x = \frac{n}{T}$ 则

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \left\{ A_{g_1} \left(\frac{n}{T}, \lambda f \Delta v_x \right) A_{g_2} \left(\frac{n}{T}, \lambda f \Delta v_x \right) \right. \\ &\cdot \exp \left[-\frac{2 \left(\lambda f \Delta v_x + \lambda z_T \frac{n}{T} \right)^2}{\xi_0^2} \right] \left. \right\} \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x. \end{aligned} \quad (15)$$

把 $I(x)$ 分解为 $n=0$ 项 $I(x, 0)$ 和 $n \neq 0$ 项 $I(x, n)$. 则分别有

$$\begin{aligned} I(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_m \left\{ \frac{h_1 h_2}{T^2} \Lambda \left(\frac{\lambda f \Delta v_x - mT}{h_1} \right) \Lambda \left(\frac{\lambda f \Delta v_x - mT}{h_2} \right) \right\} \exp \left[-2 \left(\frac{\lambda f \Delta v_x}{\xi_0} \right)^2 \right] \\ &\cdot \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 I(x, n) = & \int_{-\infty}^{\infty} \sum_m \left\{ \frac{1}{(\pi n)^2} \sin \left[\frac{\pi n h_1}{T} \Lambda \left(\frac{\lambda f \Delta v_x - mT}{h_1} \right) \right] \right. \\
 & \cdot \left. \sin \left[\frac{\pi n h_2}{T} \Lambda \left(\frac{\lambda f \Delta v_x - mT}{h_2} \right) \right] \right\} \\
 & \cdot \exp \left[- \frac{2 \left(\lambda f \Delta v_x + \lambda z_T \frac{n}{T} \right)^2}{\xi_0^2} \right] \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x. \quad (17)
 \end{aligned}$$

这里 $I(x) = I(x, 0) + \sum_{n \neq 0} I(x, n)$. 第一光栅和第二光栅的开口分别为 h_1 和 h_2 , 周期相同均为 T .

已知:

$$\begin{aligned}
 & \frac{h}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda \left(\frac{\lambda f \Delta v_x - mT}{h} \right) \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x \\
 & = \sum_m \frac{T}{\lambda f} A_m^0 \delta \left(x - \frac{m\lambda f}{T} \right), \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中

$$A_m^0 = \left(\frac{h}{T} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{mh}{T} \right).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-2 \left(\frac{\lambda f \Delta v_x}{\xi_0} \right)^2 \right] \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_0}{\lambda f} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \xi_0}{\lambda f} \right)^2 x^2 \right] \quad (19)$$

和

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \frac{2 \left(\lambda f \Delta v_x + \lambda z_T \frac{n}{T} \right)^2}{\xi_0^2} \right) \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_0}{\lambda f} \\
 & \cdot \exp \left[\frac{-1}{2} \left(\frac{\pi \xi_0}{\lambda f} \right)^2 x^2 \right] \exp \left(-2\pi i \frac{n z_T}{fT} x \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

同时假定

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \sum_m \frac{1}{\pi n} \sin \left[\frac{\pi n h}{T} \Lambda \left(\frac{\lambda f \Delta v_x - mT}{h} \right) \right] \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x \\
 & = \frac{T}{\lambda f} \sum_m B_m^n \delta \left(x - \frac{m\lambda f}{T} \right). \quad (21)
 \end{aligned}$$

则上述(16)式和(17)式成为:

$$I(x, 0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_0 T^2}{(\lambda f)^3} \sum_m C_m^0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \xi_0}{\lambda f} \right)^2 \left(x - \frac{m\lambda f}{T} \right)^2 \right], \quad (22)$$

这里 $C_m^0 = \sum_k A_{1,k}^0 A_{2,m-k}^0$. 下标 1 和 2 分别表示第一和第二光栅.

$$\begin{aligned}
 I(x, n) = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_0 T^2}{(\lambda f)^3} \sum_m D_m^n \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \xi_0}{\lambda f} \right)^2 \left(x - \frac{m\lambda f}{T} \right)^2 \right] \\
 & \cdot \exp \left[-2\pi i \frac{n z_T}{fT} \left(x - \frac{m\lambda f}{T} \right) \right], \quad (23)
 \end{aligned}$$

同样, $D_m^n = \sum_k B_{1,k}^n B_{2,m-k}^n$.

因此

$$I(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_0 T^2}{(\lambda f)^3} \sum_m \left[C_m^0 + \sum_{n \neq 0} D_m^n \exp\left(-2\pi i \frac{nz_T}{\lambda f} x\right) \right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \xi_0}{\lambda f}\right)^2 \left(x - \frac{m\lambda f}{T}\right)^2\right], \quad (24)$$

其中 $2\pi \frac{nz_T}{\lambda f} \frac{m\lambda f}{T} = 2\pi \cdot m \cdot n \cdot 2p$, 为 2π 整数倍而可忽略.

根据 Fourier 谱合成的原理, 完全可以认为上述公式中的级数和项构成某一周期函数, 即

$$\sum_n F_m\left(x - \frac{nTf}{z_T}\right) = C_m^0 + \sum_{n \neq 0} D_m^n \exp\left(-2\pi i \frac{nz_T}{\lambda f} x\right). \quad (25)$$

将(24)和(25)式代入(14)式, 观察屏上的光强分布最终为:

$$I(x, y) = I_0 \frac{\pi a^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_0}{\lambda f} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \xi_0}{\lambda f}\right)^2 y^2\right] \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_0 T^2}{(\lambda f)^3} \sum_m \sum_n F_m\left(x - \frac{nTf}{z_T}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \xi_0}{\lambda f}\right)^2 \left(x - \frac{m\lambda f}{T}\right)^2\right]. \quad (26)$$

这就是部分相干光照明 Lau 装置时产生的衍射干涉现象的解析数学表达式.

若两光栅沿法线方向平移 d , 即为 $g_1\left(x + \frac{d}{z}\right)$ 和 $g_2\left(x - \frac{d}{z}\right)$, 经计算表明只需将上式 F_m 中的 x 变量换成 $x - \frac{df}{z_T}$ 即可.

首先考虑光栅法线方向, 即 x 轴向上的光强分布. 这是部分相干衍射干涉效应发生的主要方向. 而 y 轴向仅仅是部分相干光的传播.

先研究非相干和相干两个极端. 这时可不计及常数项因子.

(1) 非相干光照明: 这时 $\xi_0 \rightarrow 0$, 所以

$$I(x, y) \propto \sum_m \sum_n F_m\left(x - \frac{nTf}{z_T}\right) \propto \sum_n \text{rect}\left(\frac{x - n \frac{Tf}{z_T}}{\frac{h_2 f}{z_T}}\right) * \sum_n \text{rect}\left(\frac{x - n \frac{Tf}{z_T}}{\frac{h_1 f}{z_T}}\right), \quad (27)$$

这里 $*$ 表示一维相关积分. 这就是 Lau 条纹, 其剖面函数为两光栅剖面函数的相关积分. 得到与其它各种理论解释的相同结果. 应当注意; 观察屏上 Lau 条纹的周期为:

$$T_L = Tf/z_T. \quad (28)$$

(2) 相干光照明: 这时 $\xi_0 \rightarrow \infty$, 所以

$$I(x, y) \propto \sum_m \sum_n F_m\left(x - \frac{nTf}{z_T}\right) \delta\left(x - \frac{m\lambda f}{T}\right) \delta(y) \propto \sum_m \sin^2\left(\frac{m\lambda}{T}\right) \delta\left(x - \frac{m\lambda f}{T}\right) \delta(y), \quad (29)$$

其中 h 为 h_1 和 h_2 的较小者。显然, 观察屏上实质上产生光栅衍射谱的强度分布, 其衍射级次间隔为:

$$T_i = \frac{\lambda f}{T}. \quad (30)$$

可见 $T_i/T_L = 2P$, 与 Talbot 自成象距离有关。或者说 Lau 条纹的间隔为光栅衍射谱间隔的 $1/2P$ 。

现在再看衍射干涉表达式的物理意义就很明确了。照明光的部分相干表现在观察屏上就相当于一个“透过”函数 $\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\xi_0}{\lambda f}\right)^2 x^2\right]$, 这里称之为等效相干度函数。它在光栅衍射位置 $x = mT_i$ 上分别截取周期为 T_L 的空间分布函数 F_m , 所“透过”的分布函数 F_m 之叠即构成了部分相干照明 Lau 装置时产生的衍射干涉条纹图象的光强分布。当照明相干度低时, 等效相干度函数的“透过”宽度就大, 空间分布函数就截取的多, 其极限就是宽度无限大下的 Lau 条纹。反之, 照明相干高时, “透过”宽度就小, 其极限就是点“透过”下的光栅衍射强度分布。

四、数值分析

为更清楚地解释这种部分相干光栅衍射干涉新现象, 这里再给出一种典型系统数据的数值图解。

$$\text{令 } \frac{h_1}{T} = \frac{h_2}{T} = 0.5. \text{ 则 } A_m^0 = \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} m\right). \text{ 经计算 } C_{m=0}^0 = \frac{1}{12}, C_{m \neq 0}^0 = \frac{1}{2\pi^2 m^2}.$$

而参照(17)式和(21)式,

$$\begin{aligned} & \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \sin^2 \left[\frac{n\pi}{2} \Lambda \left(\frac{\lambda f \Delta v_x - mT}{h} \right) \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x \right. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \cos^2 \left(2\pi \frac{\lambda f \Delta v_x - \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\frac{2T}{n}} \right) \exp(2\pi i \Delta v_x x) d\Delta v_x \\ &= \frac{1}{2(n\pi)^2} \left[\delta(x) + \frac{1}{2} \delta \left(x - \frac{n\lambda f}{T} \right) e^{i\pi(n-1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \delta \left(x + \frac{n\lambda f}{T} \right) e^{-i\pi(n-1)} \right]. \end{aligned}$$

因此 D_m^n 系数中 m 只有三项, 即 $D_0^n = \frac{1}{2(n\pi)^2}$, $D_1^n = \frac{1}{(2n\pi)^2} e^{i\pi(n-1)}$ 和

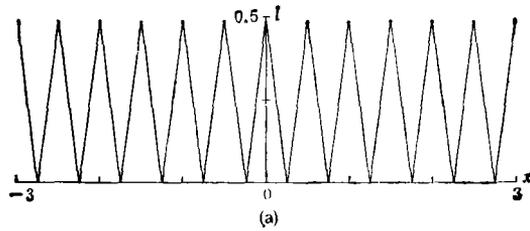
$$D_{-1}^n = \frac{1}{(2n\pi)^2} e^{-i\pi(n-1)}.$$

所以

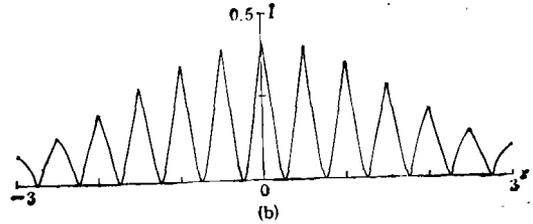
$$\begin{aligned} F_0 &= C_0^0 + \sum_{n \neq 0} D_0^n \exp\left(-2\pi i \frac{z_T n}{fT} x\right) = \frac{1}{12} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{\pi n^2} \exp\left(-2\pi i \frac{nz_T}{fT} x\right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_n \Lambda^2 \left(\frac{x - \frac{fT}{z_T} n}{fT/z_T} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=\pm 1} F_m &= \sum_{m=\pm 1} \left[C_m^0 + \sum_{n \neq 0} D_n^m \exp\left(-2\pi i \frac{nz_T}{Tf} x\right) \right] \\ &= \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2(n\pi)^2} \left[1 + (-1)^{n-1} \cos\left(2\pi \frac{xnz_T}{Tf}\right) \right]. \end{aligned}$$

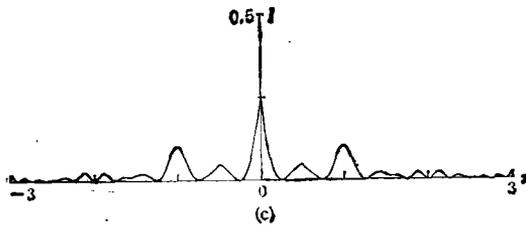
再考虑光栅的相对移动 d , 并使光强最大值为 0.5, 即



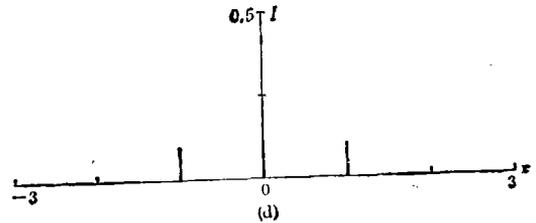
$(E = 1000, P = 1)$



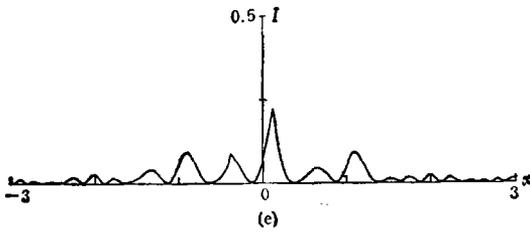
$(E = 3, P = 1)$



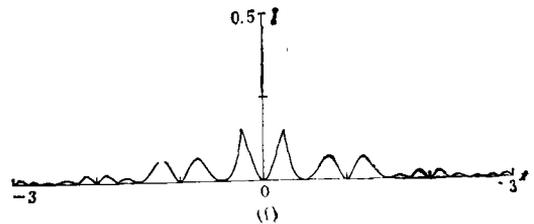
$(D = 0, E = 0.5, P = 1)$



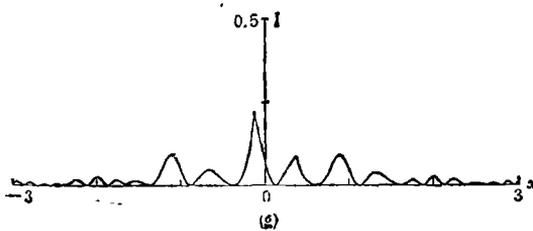
$(E = 0.0001, P = 1)$



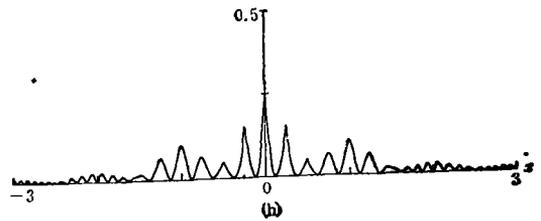
$(D = 0.25, E = 0.5, P = 1)$



$(D = 0.5, E = 0.5, P = 1)$



$(D = 0.75, E = 0.5, P = 1)$



$(E = 0.5, P = 2)$

图 2 部分相干衍射干涉条纹剖面波形

$$\begin{aligned}
 I(x, y) = & \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\xi_0}{\lambda f}\right)^2 y^2\right] \cdot \left\{ \frac{1}{4} \sum_n \Lambda^2\left(\frac{x - \frac{df}{z_T} - \frac{nfT}{z_T}}{fT/z_T}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\xi_0}{\lambda f}\right)^2 x^2\right] \right. \\
 & + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2(\pi n)^2} \left[1 + (-1)^{n-1} \cos\left(2\pi \frac{x - df/z_T}{Tf/z_T n}\right) \right] \\
 & \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\xi_0}{\lambda f}\right)^2 \left(x - \frac{n\lambda f}{T}\right)^2\right] \left. \right\}. \tag{31}
 \end{aligned}$$

可见 F 空间分布周期函数由一平方三角函数和一系列余弦函数所组成, F 表示 $\sum_m F_m$.

与上节分析相连, y 轴方面光强分布由部分相干光 Fourier 变换传播产生, 其宽度远小于 x 轴向上的分布. 因此整个衍射干涉图象为 x 轴向上的条状光带, 其中有明暗交替的条纹.

(31) 式用计算机计算并绘图. 现只给出 x 轴向上的光强剖面. 计算中 x 轴取 $\frac{\lambda f}{T}$ 为 1 单位. y 轴最大值为 0.5. 光栅位移记作 $D = d/T$. 等效相干度函数中记作 $E = \frac{2\lambda f}{\pi\xi_0}$. P 为 Talbot 自成象基本距离 $2T^2/\lambda$ 的倍数. 所得结果见于图 2.

图 2(a)–(d) 显示了随相干度提高, 从 Lau 条纹逐步向光栅衍射分布变化的过程. 相干度的提高使衍射级次位置上的原 Lau 条纹强度向该衍射强度靠近, 而其它位置上逐渐减弱.

图 2(c) 和 (e)–(g) 表明光栅移动, 将导致部分相干条纹的非对称分布. 这是 Lau 条纹中所没有的现象. $D = 0.5$ 时还会出现中心变暗.

图 2(h) 显示了 $P = 2$, 即光栅间距离增加时, 条纹将变密的现象.

由此, 可得出关于部分相干衍射干涉条纹的变化规律.

在非相干照明下出现典型的 Lau 条纹. 在相干照明下出现由两个光栅乘积组合函数的 Fourier 变换光强谱分布. 因此这种乘积等效光栅的开口宽度与两光栅的各自开口宽度和相对平移量有关. 所以相干照明下任一光栅的平移均将导致观察光强分布的变化.

随照明从非相干到全相干的转变, 观察光强从 Lau 条纹向两光栅乘积组合的谱分布转化. 其间, 谱函数分布位置外的光强较快减弱, 直至为零. 而谱函数分布位置上的光强的减弱与谱函数本身的强度分布有关, 较强的谱强度其减弱较慢. 在这过程中光强条纹宽度都趋近

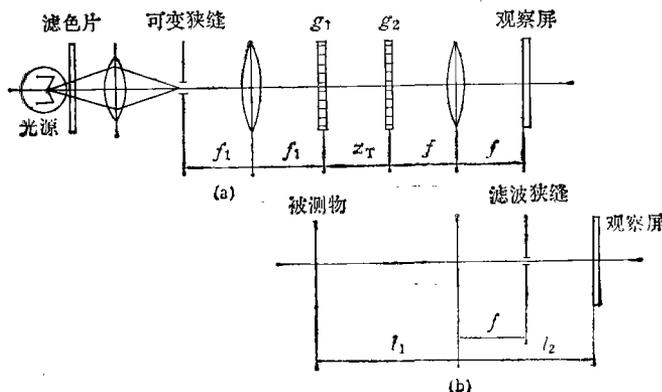


图 3 实验装置

于点分布函数。

部分相干照明下,任一光栅的平移将导致衍射干涉条纹的非对称变形.光栅平移一个光栅周期相应于条纹也变化一个周期,只有当平移量的 $\frac{T}{2}$ 的整数倍时才出现对称分布的条纹.其中为 $\frac{T}{2}$ 偶数倍时谱衍射位置上出现最大光强峰值.而为 $\frac{T}{2}$ 奇数倍时出现光强峰谷形分布.

五、实 验

首先验证上述理论分析.图 3(a)为实验系统结构,这里用扩展光源照明孔径光栏.根据 Van Cittert-Zernike 原理,通过透镜 Fourier 变换将产生部分相干照明光.理论上 Gauss 型部分相干照明场可采用 Gauss 函数振幅透过光栏产生.为清楚显示部分相干衍射干涉条纹图象,系统设计为一维观察.但是 Gauss 型透过光栏在制作上较复杂,同时还要实现连续可变的光栏宽度这更难实现.因此考虑结构制作上的简单,现采用可调矩形光栏.

光栏函数为 $\text{rect}\left(\frac{x}{h_0}\right)$,则可以求得其互强度为 $J(x, \Delta x) = \frac{h_0}{\lambda f} \text{sinc}\left(\frac{h_0}{\lambda f} \Delta x\right)$,这也是空间准均匀部分相干光.实验装置产生 sinc 型“快”函数.略不同于通常理论上采取的最一般的 Gauss 型函数.尽管如此,改变矩形狭缝光栏宽度能够观察到图 2 所预示的各种现象,完全可以对本文的一般性理论进行实验论证.

实验中可变狭缝用卤素灯照明,并用红色滤色片产生 6000 Å 左右的红光.两光栅周期均是 0.2mm, $h/T = 0.5$.透镜 $f = 240\text{mm}$, $f_1 = 180\text{mm}$.取 $P = 1$ 即自成像距离 z_T 按排为 133mm 左右.因而 Lau 条纹间隔应为 $T_L = 0.36\text{mm}$,而光栅衍射级次间隔应为 $T_j = 0.72\text{mm}$.

当狭缝宽度很大时(无光栏),产生非相干 Lau 条纹.实验照片见图 4(a),这与图 2(a)的预言完全相同. Lau 周期与上述计算值相同.当狭缝宽度为 0.5mm 时产生部分相干条纹,结果见图 4(b)照片.在理论分析结果(31)式中, Gauss 型等效相干函数为 $\exp\left(-2\frac{x^2}{E^2}\right)$.当 $E = 0.5$ 时其包含面积约为 0.63.矩形光栏情况下的等效相干函数为 $\text{rect}\left(\frac{fx}{fh_0}\right)$.其包含面

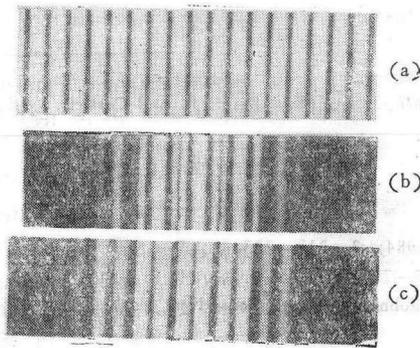


图 4

((a)非相干Lau条纹照片,(b)和(c)部分相干衍射干涉条纹照片)

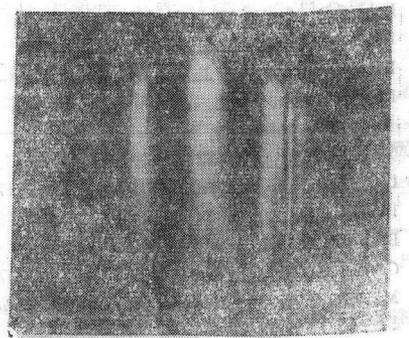


图 5 火焰干涉图照片

积约为 0.67。从等能量观点看来,可以认为这种 0.5mm 的矩形光栏相当于产生 $E = 0.5$ 的等效 Gauss 型相干函数。比较图 4(b) 和图 2(c) 的预言,基本是相似的。不过在中心条纹与 ± 1 级衍射对应的条纹之间存在双峰状光强分布。这与理论的差别是由实验所用 $\sin c$ 型函数的旁瓣造成的。此时条纹周期也与上述计算一致。若再平移任一光栅 $\frac{T}{2}$,则为图 4(c) 照片所示。各衍射级次中心位置光强为零,出现双峰对称光强分布。这与图 2(b) 的预言相符合。可见这些现象与上节分析是一致的。

更精确地,用 $\text{rect}\left(\frac{f_1 x}{fh_0}\right)$ 代替(31)式中的 Gauss 型等效相干函数,经计算表明上述这些实验结果均可正确预言。换言之,只要把特定的光栏孔径函数替代(31)式或(26)式中的 Gauss 型等效相干函数,则就可求得该孔径函数所决定的部分相干照明下的光栅衍射干涉图象。从这一意义上讲,本文的数学结果也是一种通用的理论。

作为这种新现象的应用,现给出干涉仪实验。图 3(b) 表示对图 3(a) 相应结构的增添和改动部分。被测相位物体置于第一光栅之前(或两光栅之间), f 透镜同时把物体成象于观察屏上,空间滤波狭缝选择通过一个部分相干条纹。其结构与一种 Lau 干涉仪相似^[17]。

图 5 是所得到的酒精灯火焰的横向剪切干涉图。这时光源狭缝宽度为 0.04mm,滤波狭缝宽度为 0.2mm。与 Lau 干涉仪比较,这种部分相干光栅衍射干涉仪能极大地提高成象亮度。

参 考 文 献

- [1] Lau, E., *Annln. Phys.*, 6(1948), 417—423.
- [2] Jahns, J. and Lohmann, A. W., *Opt. Comm.*, 28(1979), 3: 263—267.
- [3] Gori, F., *ibid.*, 31(1979), 1: 4—8.
- [4] Sudal, S. and Thompson, B. J., *Appl. Opt.*, 20(1981), 6: 1107—1116.
- [5] Swanson, G. J. and Leith, E. N., *J. O. S. A.*, 72(1982), 5: 552—555.
- [6] Brenner, K. H. et al., *Opt. Comm.*, 46(1983), 1: 14—17.
- [7] Sethuraman, J., *ibid.*, 52(1985), 6: 377—379.
- [8] Jahns, J. et al., *Opt. Act.*, 31(1984), 3: 313—324.
- [9] Patorski, K., *ibid.*, 30(1983), 6: 745—758.
- [10] Ojeda-Castaneda, J. and Sicre, E. E., *ibid.*, 32(1985), 1: 17—26.
- [11] 刘立人, *光学学报*, 5(1985), 6: 481—487.
- [12] 刘立人, *物理学报*, 35(1986), 12: 1556—1566.
- [13] 刘立人, *光学学报*, 7(1987), 6: 501—510.
- [14] 刘立人, *光学学报*, 6(1986), 9: 807—814.
- [15] Lohmann, A. W. and Ojeda-Castaneda, J., *Opt. Act.*, 30(1983), 4: 475—479.
- [16] Indebetouw, G., *ibid.*, 31(1984), 5: 531—539.
- [17] Bartelt, H. O. and Jahns, J., *Opt. Comm.*, 30(1979), 3: 268—274.
- [18] Meyer-Arendt, J. R., *Advances in Optical and Electron Microscopy* (Eds. Barer, R. and Cosslett, V. E.), Academic Press, London, 1982, 1—23.
- [19] 刘立人, *科学通报*, 32(1987), 6: 415—418.
- [20] Liu Liren, *Appl. Opt.*, 21(1982), 15: 2817—2826.
- [21] Papoulis, A., *J. O. S. A.*, 64(1974), 6: 779—788.
- [22] Brenner, K. H. and Ojeda-Castaneda, J., *Opt. Act.*, 31(1984), 2: 213—223.
- [23] Carter, W. H. and Wolf, E., *J. O. S. A.*, 67(1977), 6: 785—796.
- [24] Marathay, A. S., *Elements of Optical Coherence Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1982, 145—149.