



周期性多孔材料等效杨氏模量的尺度效应研究

戴高明, 张卫红*

西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室, 西安 710072

* 联系人, E-mail: zhangwh@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2008-08-18; 接受日期: 2009-03-17

国家自然科学基金(批准号: 50775184)、国家重点基础研究发展计划(编号: 2006CB601205)、教育部博士点基金(编号: 20060699006)和西北工业大学博士创新基金(编号: CX200610)资助项目

摘要 随着航空航天与民用技术对多孔材料应用的广泛需求, 对于该种轻质材料的研究达到了空前的高度. 该文着重研究了周期性多孔材料等效杨氏模量的有效计算方法, 在综合分析现有均匀化方法、G-A (Gibson and Ashby) 细观力学方法、拉伸能量法无法反映胞尺寸效应的基础上, 提出了弯曲能量新方法, 并对 4 种方法的预测效果进行了系统的研究, 揭示了弯曲能量法的通用性、尺寸效应的预测能力以及与 4 种方法的内在联系与差异. 以拉伸和弯曲两种力学加载模型的有限元数值计算结果以及文献给出的六边形蜂窝实测实验结果为基准, 比较分析了 4 种方法在预测拉伸变形和弯曲挠度的计算精度. 结果表明, 弯曲能量法能很好地预测不同构型蜂窝单胞的等效杨氏模量及其尺寸效应, 并能很好反映不同加载模式下结构变形随多孔材料胞尺寸的变化规律包括六边形蜂窝的非单调变化趋势, 而其他 3 种方法仅能预测胞无限小时的极限结果.

关键词

周期性多孔材料
等效杨氏模量
尺寸效应
弯曲能量法
均匀化方法
G-A 细观力学方法
拉伸能量法

夹芯结构由于其吸能、轻质、高比刚度和强度而被广泛应用于飞行器结构设计. 在结构形式上, 夹芯结构通常由波纹、褶皱或者开孔轻质材料和上下面板组成, 如图 1 所示, 其中夹芯主要承担剪切载荷、上下面板主要承受弯曲载荷.

为了开展夹芯结构的力学行为预测分析计算与优化设计, 多孔夹芯材料的建模是一个关键问题, 直接进行有限元离散势必造成问题复杂化与计算量过大, 简洁有效的方法是进行材料的均匀化等效. 国内外学者为此提出了周期性多孔材料等效弹性性能的计算方法, 代表性工作如 Gibson 和 Ashby^[1]提出的 G-A 细观力学模型方法, 对于六边形、正方形等薄壁

规则形状的单胞可以方便地求出其面内各个弹性常数; Hassani 和 Hinton^[2]使用小尺度渐近展开均匀化方法推导出实体层合材料胞的等效模量解析表达式, 同时给出了矩形孔洞材料单胞等效模量的数值计算结果; 其他众多研究人员^[3-6]则应用小尺度渐近展开均匀化方法开展了材料与结构的拓扑优化设计; Hohe 和 Becker 等人^[7]在其综述性工作中对现有模型与方法进行了较为系统的介绍与总结. 近期, Zhang 等人^[8]基于均匀化方法提出了应变能量法, 该方法从简化计算过程与程序移植角度考虑, 对具有对称构型胞的正交各向异性多孔材料, 能够更加简便地计算出微结构单胞等效弹性系数与等效热膨胀系数.

引用格式: 戴高明, 张卫红. 周期性多孔材料等效杨氏模量的尺度效应研究. 中国科学 G 辑, 2009, 39(7): 955—963

Dai G M, Zhang W H. Size effects of effective Young's modulus for periodic cellular materials. Sci China Ser G, 2009, 52(8): 1262—1270, doi: 10.1007/s11433-009-0151-9

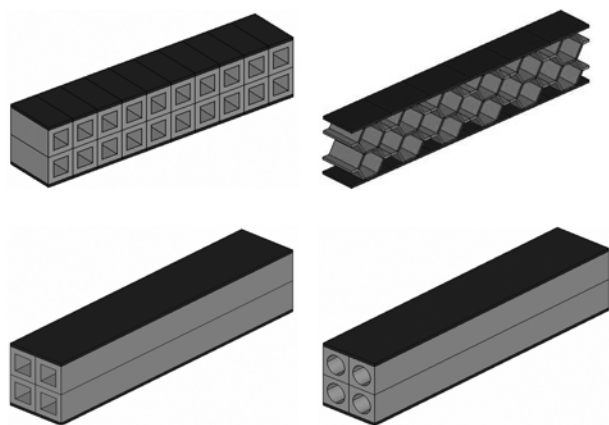


图1 具有不同构型的周期性多孔材料

然而, 上述方法的一个共同特点就是无法反映材料胞的尺寸效应, 即计算获得的等效杨氏模量与材料胞尺寸大小无关, 仅取决于胞微结构的构型与孔隙率。换言之, 仅当材料胞相对所组成的宏观结构的尺寸足够小时, 模型与方法才有效; 当单胞尺寸与宏观结构尺寸在同一数量级范围时, 计算结果将不再真实。另外, 正如Gibson和Ashby^[11]所指出的那样, 细观力学模型具有一定的局限性, 如对于G-A细观力学方法, 胞的变形机理是采用胞壁为欧拉梁模型的假设; 当单胞不满足薄壁假设时, 等效杨氏模量预测结果误差就会很大, 这一结论可以通过实验或直接有限元精细模型计算得到充分验证。

为了形象说明尺寸效应现象, 假设结构的宏观尺寸、组成宏观结构的微结构构型和体分比保持一定。如图2中所示, 当材料胞逐渐变小时, 宏观结构的等效杨氏模量以及加载后的力学响应将发生变化。这说明对于具有同样构型、同样体分比的单胞, 随着其尺寸的变化, 等效弹性常数也会随之发生变化。对于这一问题, 国内外学者目前的研究结果如下: Andrews等人^[9]对于六边形蜂窝构型单胞的面内等效杨氏模量进行了实验测试, 发现当蜂窝六边形胞的尺寸 d 和测试样件的宏观尺寸 L 相当时($L/d < 6$), 尺寸效应对实验结果有很大的影响; 对于开孔型单胞, 当胞与多孔结构相对尺寸逐渐减小时, 等效杨氏模量呈非单调变化趋势(先增后减)并趋近于一个极限值(参见文献[9]中的图2)。然而, Onck等人^[10]所给出的力学计算模型却无法正确预测上述等效杨氏模量

随胞尺寸参数的这种非单调变化关系, 对预测结果与实验结果吻合差的非一致性也未给出清晰的解释。Tantikom等人^[11]对圆筒型胞排列结构进行的压缩实验研究同样证实了尺寸效应存在及其影响, 发现当胞阵列的数目小于5层($L/d < 5$)时, 应力-应变曲线显著不同。Lestari等人^[12]提出了基于动力学响应的蜂窝夹芯梁结构的等效杨氏模量和剪切模量的逆向求解方法, 根据一阶固有频率实验测试结果并采用Timoshenko梁模型理论, 建立了计算等效杨氏模量和剪切模量与固有频率的函数关系; 通过逐渐增加梁的长度, 即相对减小胞尺寸的间接方式反映了等效杨氏模量和剪切模量与胞尺寸的依赖关系。他们发现当梁长度相对胞尺寸满足 $L/d > 7$ 时, 模量趋于一个定值, 验证了胞的尺寸效应。国内阎军和程耿东等人^[13]对周期性点阵类桁架材料的等效杨氏模量进行了有限元数值计算研究, 比较了Dirichlet型和Neumann型两类边界条件下的代表体元法与均匀化方法的预测结果。发现随着参与模拟的单胞个数的增加, Dirichlet型和Neumann型边界条件下的代表体元法所得结果分别从上下界逼近均匀化方法的结果。近来, Dai等人^[14]从理论推导与数值计算两方面综合研究了夹芯梁结构的胞尺寸效应的静力学问题, 建立了不同孔型夹芯胞等效弯曲刚度与胞尺寸的解析表达式, 阐述了等效弯曲刚度、应力、挠度随胞尺度的变化规律, 证明了均匀化方法所得结果对应于胞尺度趋于无限小时的极限值。此外, 从轻质多孔材料结构优化设计的角度, Zhang等人^[15]

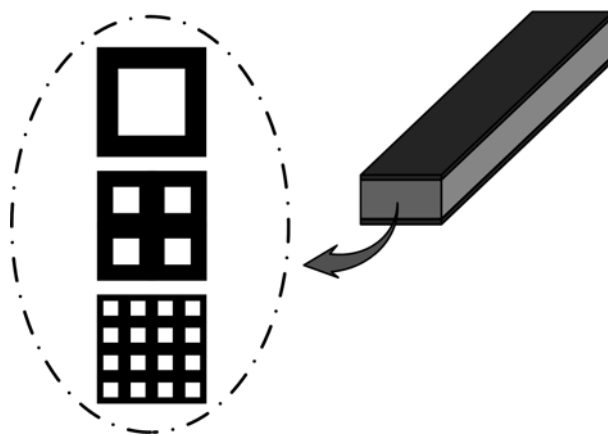


图2 周期性多孔结构尺寸效应示意图

采用超单元子结构技术研究了二维夹芯结构的刚度优化问题, 发现夹芯材料胞的拓扑优化构型依赖于胞尺寸大小, 并给出材料拓扑优化构型相对胞尺寸的变化形式, 获得了比均匀化方法更合理的优化结果.

在以上工作的基础上, 本文拟对均匀化方法、G-A 细观力学方法、拉伸能量法以及所提出的弯曲能量法, 进行系统的理论和数值计算综合研究, 澄清并揭示不同方法之间的内在差异与一致性. 同时, 以有限元直接离散数值计算结果为参考基准, 验证四种方法计算等效杨氏模量的有效性以及预测尺寸效应的能力, 包括六边形蜂窝构型等效杨氏模量的非单调变化现象, 最终确定通用有效的计算模型与方法.

1 等效杨氏模量的计算方法

本节分别介绍利用均匀化方法、G-A 细观力学方法、拉伸能量法、弯曲能量法推导周期性多孔材料等效杨氏模量的计算公式. 不失一般性, 考虑图 3 中选取的 3 种典型微结构构型, 其中参数 l 和 t 分别表示微结构单胞的壁长与壁厚. 当 $l \gg t$ 时, 单胞组成的周期性多孔结构为薄壁结构.

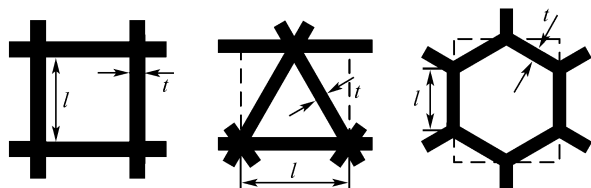


图 3 不同构型的夹芯单胞

1.1 均匀化方法

均匀化方法^[2~7]是一种广泛认可与普遍使用求解周期性微结构等效弹性常数的计算方法, 该方法为宏观尺度下的材料等效性能与材料尺度下的微结构构型、组分材料的力学性能以及材料体分比建立了严格的数学描述关系. 当材料尺度相对宏观尺度非常小时, 胞微结构的等效弹性张量的计算表达式为

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(C_{ijkl} - C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) dY, \quad (1)$$

式中 χ^{kl} 为第 kl 工况下的弹性位移场、 C_{ijkl} 为组分材料弹性张量.

对于具有一般构型的多孔材料胞, 一般采用有限元方法对胞进行离散, 再根据周期性边界条件利用公式(1)计算等效弹性张量. 而对于特殊形式的材料胞, 如图 4 所示的三层材料层合微结构, 可借鉴 Hassani 和 Hinton^[2]的工作推导出等效弹性常数的解析表达式.



图 4 三层材料结构及其单胞

首先定义算子

$$\bar{A}(r_1, r_2, r_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \xi_3 r_3, \quad (2)$$

$$\underline{A}(r_1, r_2, r_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{r_1 r_2 r_3}{\xi_1 r_2 r_3 + \xi_2 r_1 r_3 + \xi_3 r_2 r_1}, \quad (3)$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0, 1]$, 并且 r_1, r_2, r_3 是实数. 为简化繁琐的推导, 仅给出图 4 中单胞对应的等效弹性矩阵项:

$$\begin{aligned} C_{1111}^H = & \bar{A}(C_{1111}^I, C_{1111}^{II}, C_{1111}^{III}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\ & - \bar{A}((C_{2211}^I)^2 (C_{1111}^I)^{-1}, (C_{2211}^{II})^2 (C_{1111}^{II})^{-1}, \\ & (C_{2211}^{III})^2 (C_{1111}^{III})^{-1}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\ & + \bar{A}^2(C_{2211}^I (C_{1111}^I)^{-1}, C_{2211}^{II} (C_{1111}^{II})^{-1}, \\ & C_{2211}^{III} (C_{1111}^{III})^{-1}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \underline{A} \\ & \times (C_{1111}^I, C_{1111}^{II}, C_{1111}^{III}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} C_{2211}^H = & \bar{A}(C_{2211}^I (C_{1111}^I)^{-1}, C_{2211}^{II} (C_{1111}^{II})^{-1}, \\ & C_{2211}^{III} (C_{1111}^{III})^{-1}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\ & \times \underline{A}(C_{1111}^I, C_{1111}^{II}, C_{1111}^{III}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_{2222}^H = \underline{A}(C_{2222}^I, C_{2222}^{II}, C_{2222}^{III}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad (6)$$

$$C_{1212}^H = \underline{A}(C_{1212}^I, C_{1212}^{II}, C_{1212}^{III}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned} C_{1111}^i = C_{2222}^i &= \frac{E_i}{1-\nu^2}, \quad C_{2211}^i = \frac{\nu}{1-\nu^2} E_i, \\ C_{1212}^i &= \frac{E_i}{2(1+\nu)} \quad (i=I, II, III). \end{aligned} \quad (8)$$

因此, 等效柔度矩阵可表示为

$$S^H = (C^H)^{-1} = (C_{1111}^H C_{2222}^H C_{1212}^H - C_{1122}^H C_{2211}^H C_{1212}^H)^{-1}$$

$$\times \begin{bmatrix} C_{2222}^H C_{1212}^H & & & \\ C_{2211}^H C_{1212}^H & C_{1111}^H C_{1212}^H & & \\ 0 & 0 & C_{1111}^H C_{2222}^H - C_{1122}^H C_{2211}^H & \\ & & & \text{sym} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

由此可以求出图 4 所示的三层材料微结构的等效杨氏模量:

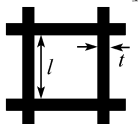
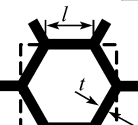
$$\begin{aligned} E_1^H &= \frac{1}{S_{1111}^H} = C_{1111}^H - \frac{C_{1122}^H C_{2211}^H}{C_{2222}^H} \\ &= \frac{1}{r_1 + r_2 + r_3} (r_1 E_I + r_2 E_{II} + r_3 E_{III}). \end{aligned} \quad (10)$$

可见等效杨氏模量仅取决于不同材料相的体分比与弹性模量, 而与胞胞的大小无关, 也就是说均匀化方法无法反映胞胞的尺度对单胞力学性能的影响。

1.2 G-A 细观力学方法

针对特定形状的周期性多孔材料薄壁微结构, Gibson 和 Ashby^[4]提出了面内等效弹性参数的 G-A 细观力学计算方法. 表 1 给出了 3 种不同构型的微结构单胞的体分比和等效杨氏模量相对值, 其中 E_1^H 表示单胞沿水平或垂直方向的等效杨氏模量、 E 表示组分材料的杨氏模量、 $\alpha = t/l$ 为壁厚与边长比。

表 1 不同微结构构型胞胞的体分比及 G-A 方法的等效杨氏模量($\alpha = t/l$)

单胞构型		体分比 (k)	E_1^H / E
正方形单胞	 	2α	α
三角形单胞	 	$2\sqrt{3}\alpha$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha$
正六边形单胞	 	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}\alpha^3$

显而易见, 所得到的等效杨氏模量仅依赖于微结构单胞壁长 l 与壁厚 t 的比值 α , 亦即当 α 或组成单

胞材料的体分比保持不变时, 计算结果无法反映胞胞尺寸的影响。

1.3 拉伸能量法

图 5 给出了由正方形多孔周期性阵列组成的梁结构示意图, 假设 L 表示梁的长度、 $2l$ 为梁的高度、 l 同时又表示沿 x 方向微结构的周期、 b 为 y 方向厚度、 n 表示胞胞尺寸缩放因子. 根据结构的轴向周期性和对称性, 在单个周期 l 上的拉伸应变能为

$$U_s = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{(E_1^H A^H)} = \frac{F^2}{2} \int_0^l \frac{1}{E(x) A(x)} dx, \quad (11)$$

其中 F 表示轴向拉力, E 为实体材料的弹性模量, A 表示实体材料横截面面积. 因此, 结构的等效杨氏模量为

$$E_1^H = \frac{1}{A^H} \left[\frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{E(x) A(x)} dx \right]^{-1} = \frac{l}{A^H} \left[\sum_i \frac{l_i}{(EA)_i} \right]^{-1}. \quad (12)$$

由(12)式可得等效杨氏模量为

$$E_1^H = \frac{Et l}{t^2 + l^2 - lt} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 - \alpha} E. \quad (13)$$

可见, 拉伸能量法对应的(13)式与尺度缩放因子 n 无关, 无法反映胞胞的尺寸效应。

当 $l \gg t$, (13)式可近似为

$$E_1^H = \alpha E. \quad (14)$$

这与 G-A 细观力学方法所得到的结果完全一致. 同样, 对于三角形单胞和正六边形单胞的周期性多孔结构, 可以根据(12)式计算出等效杨氏模量。

对于三角形单胞:

$$E_1^H = \frac{t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} l + t \right)} E = \frac{\alpha}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha \right)} E. \quad (15)$$

对于正六边形单胞:

$$E_1^H = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{t}{l+t} E = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{\alpha}{1+\alpha} E. \quad (16)$$

与 G-A 细观力学方法求解的结果相比, 拉伸能量法求解的正六边形单胞周期性多孔结构的等效杨氏模量结果偏大。

1.4 弯曲能量法

不失一般性, 同样对于图 5 中的一维周期性正方

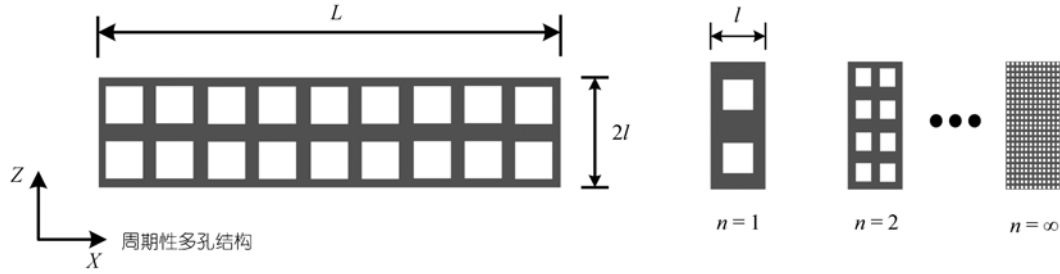


图 5 一维周期性正方形多孔阵列结构

形多孔阵列模型, 假设受到纯弯矩载荷 M 的作用, 在一个周期 l 上的结构弯曲应变能则为

$$U_b = \frac{1}{2} \frac{M^2 l}{E_1^H I^H} = \frac{M^2}{2} \int_0^l \frac{1}{E(x) I(x)} dx, \quad (17)$$

其中 I 表示结构相对于中性层的惯性矩. 则等效杨氏模量可在一个周期上沿 x 方向累加获得:

$$E_1^H = \frac{1}{I^H} \left[\frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{E(x) I(x)} dx \right]^{-1} = \frac{l}{I^H} \left[\sum_i \frac{l_i}{(EI)_i} \right]^{-1}. \quad (18)$$

对于图 5 所示的正方形单胞, 其具体表示为

$$E_1^H = \frac{1}{I^H} \frac{EI_1 I_2}{t I_2 + \frac{l-t}{l} I_1}, \quad (19)$$

其中

$$I_1 = \frac{2}{3} b l^3,$$

$$I_2 = \frac{2}{3} b l^3 - \frac{2}{3} b \sum_{m=1}^n \left[\left(\frac{2ml-t}{2n} \right)^3 - \left(\frac{(2m-2)l+t}{2n} \right)^3 \right], \quad (20)$$

$$I^H = \frac{2}{3} b l^3.$$

则其等效杨氏模量为

$$E_1^H = \frac{3}{2bl^3} \frac{EI_1 I_2}{t I_2 + \frac{l-t}{l} I_1}, \quad (21)$$

通过比较, 可见弯曲能量法可以给出等效杨氏模量与比例缩放因子 n 的解析函数关系, 真正反映出随比例缩放因子 n 变化的尺寸效应. 当 $l \gg t$ 且尺度缩放因子 $n \rightarrow \infty$ 时, 式(21)简化为

$$E_1^H = \frac{t}{l} E = \alpha E. \quad (22)$$

这一结果与 G-A 细观力学方法和拉伸能量法求得的结果完全一致. 说明当体胞尺度趋于无穷小时弯曲能量法计算结果收敛于 G-A 模型和拉伸能量法的计

算结果.

此外, 根据(17)和(18)式推导得到的三角形单胞等效杨氏模量的表达式为

$$E_1^H = \frac{8\sqrt{3}E}{9l^2} \left\{ \sum_{m=1}^n \left[\frac{\sqrt{3}n^3}{18t^3} \ln \left[\frac{3}{8} \left[\left(\frac{\sqrt{3}m}{n} l \right) \left(\frac{1}{n} t \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}m}{n} l \right)^2 \left(\frac{1}{n} t \right) \right] + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} t \right)^3 + 6\sqrt{3}l \left(\frac{1}{n} t \right)^3 \right] - \frac{\sqrt{3}n^3}{18t^3} \ln \left[\frac{3}{8} \left[\left(\frac{\sqrt{3}m}{n} l \right) \left(\frac{1}{n} t \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}m}{n} l \right)^2 \left(\frac{1}{n} t \right) \right] + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} t \right)^3 + 6\sqrt{3}l \left(\frac{1}{n} t \right)^3 \right] \right] \right\}^{-1}. \quad (23)$$

正六边形单胞等效杨氏模量的表达式为

$$E_1^H = \frac{8\sqrt{3}E}{9l^2} \left\{ \sum_{m=1}^n \left[\frac{\frac{m}{n} l}{\left(\frac{t}{2n} \right)^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9 \left(\frac{t}{n} \right)^2} \left[\ln \left[\frac{1}{4} \left(\frac{t}{n} \right)^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{t}{n} \right)^3 \frac{m}{n} l \right] - \ln \left[\frac{1}{4} \left(\frac{t}{n} \right)^3 \right] \right] + \frac{\frac{m}{n} l}{\frac{9}{4} \left(\frac{m}{n} \right)^2 \frac{t}{2n} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{m}{n} l \left(\frac{t}{2n} \right)^2 + \left(\frac{t}{2n} \right)^3} \right] \right\}^{-1}. \quad (24)$$

可见, 弯曲能量法借用细长梁模型, 依据延长度方向周期性单胞弯曲应变能之和与整体等效结构的弯曲应变能等价原理, 建立起等效抗弯刚度和尺度缩放因子 n 的相对关系, 从而进一步求得真正反映等效弹性模量随单胞尺寸变化而变化的对应关系, 揭示周期性多孔材料等效模量的尺寸效应. 事实上, 对于相

同重量(材料体分比一定)的周期性蜂窝结构, 胞尺寸的大小反映了周期子结构大小与每个内部构件尺寸的变化, 而这些变化势必引起在同样载荷作用下子结构的变形不同以及整个结构响应的不同; 如果作为一种等效材料替代蜂窝结构, 对应的等效模量物性参数势必也不同, 即使在拉伸过程中, 我们也会发现内部胞壁会发生弯曲效应, 因此采用拉伸能量无法反映这一现象, 这就是尺寸效应产生的机制. 目前对于考虑这种尺寸效应的等效模量预测模型与计算方法尚未见存在, 这就是本文相对前人工作的创新点.

2 理论计算和数值模拟结果的比较验证

为了揭示上述4种方法的差异与相互关系, 针对图3所示的3种微结构单胞构型, 本节应用4种方法分别计算了拉伸变形和弯曲挠度. 假设所有数据单位一致, 计算模型参数为: $L=60$, $t=0.1$, $l=1$; 多孔实体材料属性为: 杨氏模量 $E=70 \times 10^9$, 泊松比 $\nu=0.34$, 密度 $\rho=2774$. 同时, 本节采用有限元平面应力单元对多孔梁结构进行直接离散, 并使用 ANSYS 有限元分析软件进行数值求解, 以计算结果为基准验证4种方法的预测精度与正确性.

2.1 理论计算结果

图6给出了等效杨氏模量的计算结果. 对于正方形、三角形胞单元, 可见基于弯曲能量法的计算结果随着尺度因子 n 的增加(胞尺寸减小)分别呈单调减小和单调增加的变化趋势, 并最终趋近于均匀化方法的计算结果; 而当 $l \gg t$, 均匀化方法、G-A细观力学方法、拉伸能量法求解结果趋于一致并且与 n 无关. 对于正六边形单胞, 有趣的计算结果是等效杨氏模量呈非单调变化趋势. 随着尺度因子 n 的增加, 采用弯曲能量法获得的等效杨氏模量由小变大; 当 $n=5$ 时, E_1^H 达到最大值, 此后逐渐减小并最终趋近于均匀化的结果. 图7为Onck等人^[10]的理论推导和实验结果比较图, 实线部分为实验测试结果、点虚线为他们的理论预测模型计算结果, 两者之间不具备一致性. 而弯曲能量法的预测结果与Andrews等人^[9]实验结果的变化趋势具有良好的一致性.

2.2 数值模拟结果

为了进一步验证推导结果的正确性, 使用有限元直接离散的方式计算端部拉伸和弯曲变形, 验证

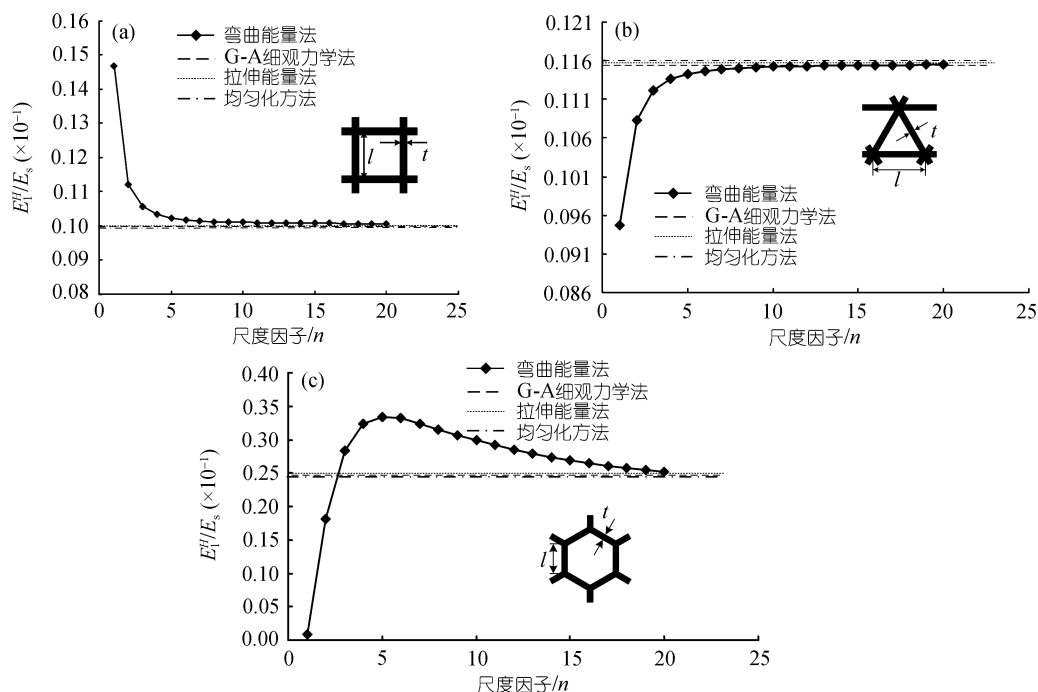
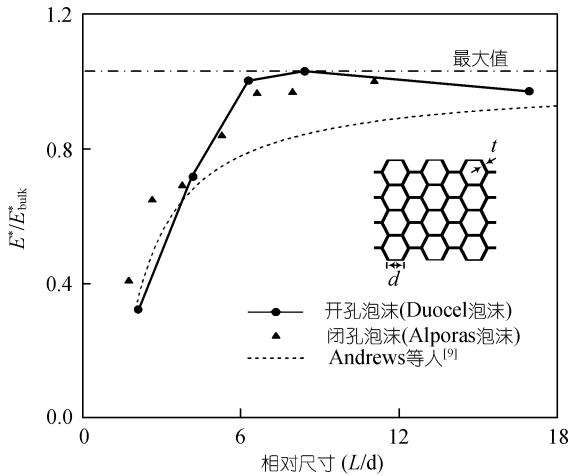


图6 正方形、三角形和六边形单胞的等效杨氏模量相对尺度因子 n 的变化趋势

(a) 正方形单胞; (b) 三角形单胞; (c) 六边形单胞

图 7 规范化杨氏模量和相对尺度的关系^[9]

以上四种方法的有效性. 图 8 所示为周期性单胞结构的拉伸和弯曲数值实验模型. 对于拉伸模型, 其边界条件为左端沿 X 方向完全固定, 沿 Z 方向自由但固定左边界中点 C 以防止产生沿 Z 方向的刚性位移; 右端使所有节点沿 X 方向位移相同, 沿 Z 方向自由并在梁中间点加载拉力 F . 对于弯曲模型, 将其左边界固支, 右边界使其所有节点在 Z 方向的位移相等并在梁中间点加载沿 Z 反方向的力 F . 需要指出由于梁的长高比为 60:2, 远远满足欧拉细长梁假设, 因此由于剪切变形引起的挠度可以忽略不计.

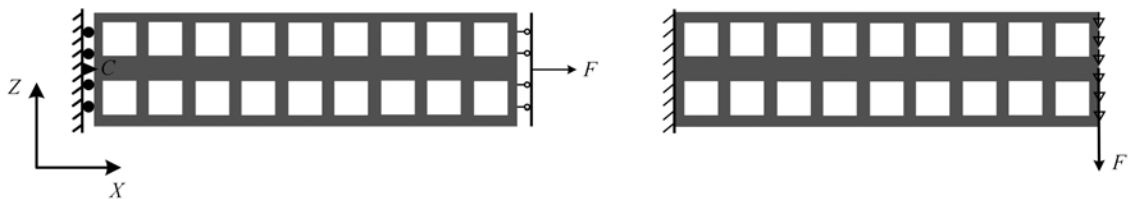


图 8 拉伸模型和弯曲模型

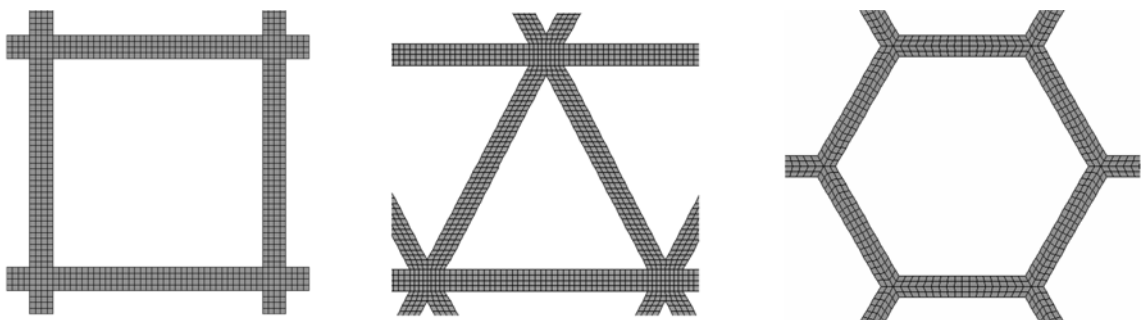


图 9 3 种单胞所构成的梁的局部有限元模型

有限元计算过程中, 采用八节点四边形等参平面应力单元进行有限元离散, 该单元包含 4 个高斯积分点. 图 3 中 3 种单胞所构成的梁的局部有限元模型如图 9 所示.

对于拉伸模型, 在轴向拉力 F 的作用下产生的轴向伸长量为

$$y_s = \frac{FL}{E_1^H A^H}. \quad (25)$$

对于弯曲模型, 在 F 作用下产生的挠度为

$$y_b = \frac{FL^3}{3E_1^H I^H}. \quad (26)$$

将 4 种方法求得的等效杨氏模量分别代入 (25) 式, 得到的拉伸变形与有限元数值计算结果的比较如图 10 所示.

可以发现, 在拉伸载荷作用下, 随着蜂窝体胞的逐渐变化, 采用弯曲能量法得到的等效杨氏模量所对应的拉伸变形总是能够与有限元计算结果保持一致, 而采用其他 3 种方法均无法反映体胞的非线性尺寸效应.

同样, 将四种方法求得的等效杨氏模量代入 (26) 式, 得到的弯曲变形挠度值与有限元数值计算结果的比较如图 11 所示.

从图 11 的结果比较可以看出, 由于有限元离散

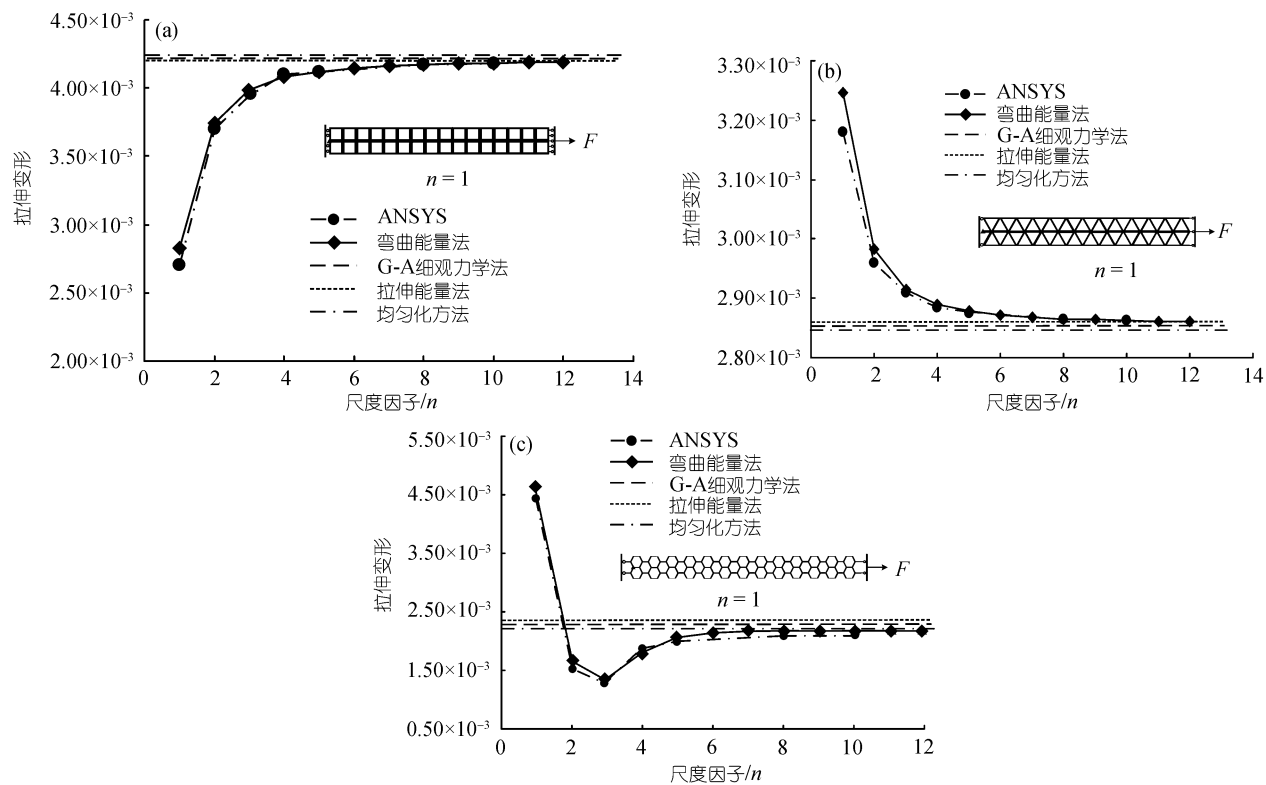


图 10 3 种单胞构型蜂窝结构的拉伸变形($F=1000$)

(a) 正方形单胞; (b) 三角形单胞; (c) 六边形单胞

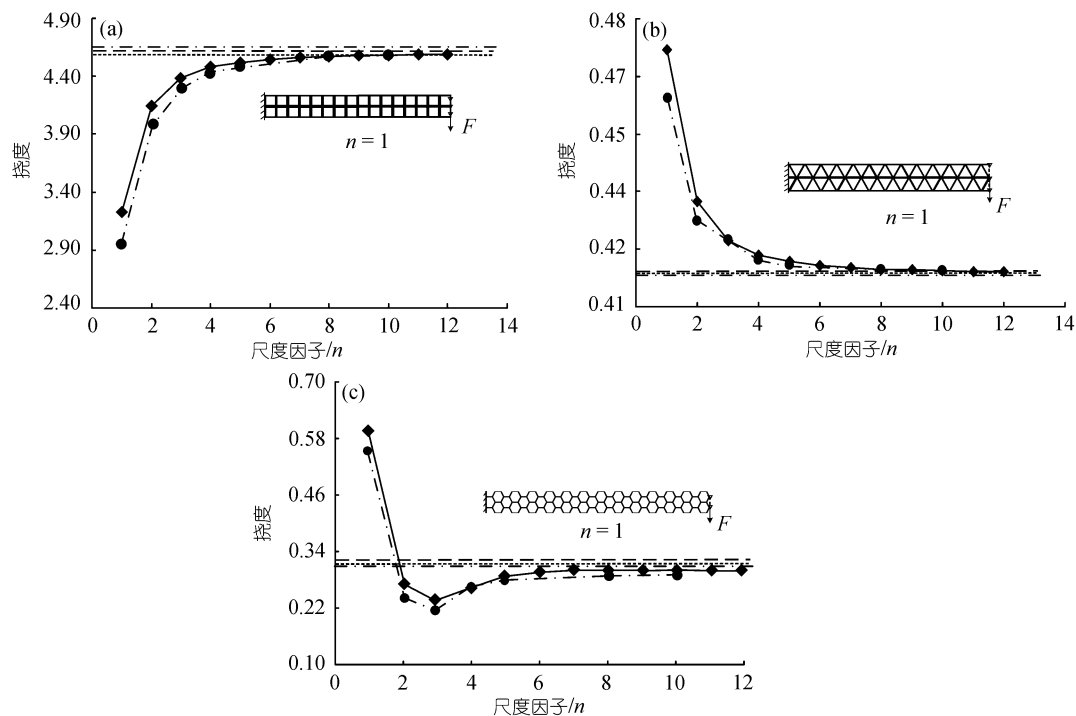


图 11 3 种单胞构型蜂窝结构的挠度($F=1000$)

(a) 正方形单胞; (b) 三角形单胞; (c) 六边形单胞

模型反映了结构的实际情况, 其弯曲变形随着尺度的变化而变化, 4 种方法中仅弯曲能量法求解所得的结果与有限元离散结果能很好的吻合, 这说明弯曲能量法能够揭示胞的尺寸效应, 是一种更接近实际等效杨氏模量的计算方法. 而其他 3 种方法的预测结果属于极限值, 仅当胞尺寸非常小时才有效.

3 结论

本文对于周期性多孔材料结构的等效杨氏模量的求解模型、计算方法以及胞的尺寸效应进行了系统的研究. 综合分析了均匀化方法、G-A 细观力学方法、拉伸能量法和所提出的弯曲能量法. 理论推导与数值计算结果表明, 当周期性多孔材料单胞的尺寸相对于整体结构尺寸非常小时, 亦即缩放因子 $n \rightarrow$

∞ 时, 4 种方法均能够准确求解多孔结构的等效杨氏模量; 但当周期性多孔材料的单胞尺寸相对整体结构尺寸无法忽略时, 均匀化方法、G-A 细观力学方法和拉伸能量法均无法正确反映胞尺寸效应对等效杨氏模量的影响, 而弯曲能量法却能有效地描述等效杨氏模量与胞尺度的函数依赖关系, 并给出了 3 种构型胞的解析表达式. 由此可见, 所提出的弯曲能量法是预测胞等效杨氏模量、揭示尺寸效应的一种有效方法; 这一方法也具有通用性, 按照以上推导方式可以对不同构型胞建立对应的计算表达式. 另一方面, 鉴于轻质蜂窝材料在航空航天的重要用途, 这一工作对蜂窝结构的分析计算与设计具有重要的应用价值.

参考文献

- 1 Gibson L J, Ashby M F. *Cellular Solids: Structure and Properties*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 2 Hassani B, Hinton E. A review of homogenization and topology optimization II-analytical and numerical solution of homogenization equations. *Comput Struct*, 1998, 69: 719—738
- 3 Bendsoe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1988, 71(2): 197—224[DOI]
- 4 Guedes J M, Kikuchi N. Pre and post processing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1990, 83: 143—198[DOI]
- 5 Sigmund O. Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem. *Int J Solids Struct*, 1994, 31(17): 2313—2329[DOI]
- 6 Fujii D, Chen B C, Kikuchi N. Composite material design of two-dimensional structures using the homogenization method. *Int J Numer Methods Eng*, 2001, 50: 2031—2051[DOI]
- 7 Hohe J, Becker W. Effective stress-strain relations for two-dimensional cellular sandwich cores: Homogenization, material models, and properties. *Appl Mech Rev*, 2002, 55(1): 61—87[DOI]
- 8 Zhang W H, Dai G M, Wang F W, et al. Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures. *Acta Mech Sin*, 2007, 23(1): 77—89[DOI]
- 9 Andrews E W, Gioux G, Onck P, et al. Size effects in ductile cellular solids. Part II: Experimental results. *Int J Mech Sci*, 2001, 43: 701—713[DOI]
- 10 Onck P R, Andrews E W, Gibson L J. Size effects in ductile cellular solids. Part I: Modeling. *Int J Mech Sci*, 2001, 43: 681—699[DOI]
- 11 Tantikom K, Aizawa T, Mukai T. Symmetric and asymmetric deformation transition in the regularly cell-structured materials. Part I: Experimental study. *Int J Solids Struct*, 2005, 42: 2199—2210[DOI]
- 12 Lestari W, Qiao P Z, Song G B, et al. Evaluation of bending and shear moduli of sandwich structures by dynamic response based technique. In: 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference Virginia: AIAA, 2003
- 13 阎军, 程耿东, 刘书田, 等. 周期性点阵类夹心梁材料等效弹性性能预测尺度效应. *固体力学学报*, 2005, 26(4): 421—428
- 14 Dai G M, Zhang W H. Size effects of basic cell in static analysis of sandwich beams. *Int J Solids Struct*, 2008, 45: 2512—2533[DOI]
- 15 Zhang W H, Sun S P. Scale-related topology optimization of cellular materials and structures. *Int J Numer Methods Eng*, 2006, 68: 993—1011[DOI]