

Duffing 型方程解的有界性

袁小平

(复旦大学数学系, 上海 200433)

摘要 证明了下列 Duffing 型方程的所有解的有界性:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n} x^j p_j(t) = 0, \quad n \geq 1,$$

其中, $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$ 是 1 周期的有 Lipschitz 连续性的函数, $p_{n+1}, \dots, p_{2n}$ 是 Zygmund 连续的. 这表明 Duffing 型方程的解的有界性不必要求 $p_j(t)$ 的光滑性.

关键词 Duffing 型方程 解的有界性 Moser 扭转定理

文献[1~6]研究了 Duffing 型方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g(x) = p(t), \quad p(t+1) = p(t) \quad (0.1)$$

的解的有界性; 文献[7]就下列更广的一类方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n} p_j(t) x^j = 0 \quad (n \geq 1) \quad (0.2)$$

证明了所有解的有界性, 其中 $p_j(t+1) = p_j(t)$, $p_j \in C^\infty$, 并提出如下问题: Duffing 型方程解的有界性是否与 $p_j(t)$ 的光滑性有关? 文献[8]在 $a(t), p(t)$ 仅有连续性的条件下证明了方程 $\ddot{x} + x^{2n+1} + a(t)x = p(t)$ 的所有解的有界性; 文献[9]及[10]把方程(0.2)中的 $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$ 的光滑性要求降低到 $C^{5+\epsilon}$, 这里 $\epsilon > 0$; 文献[11]进一步把 $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$ 的光滑性要求降到 C^2 . 在本文中, 只要求 $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$ 有 Lipschitz 或 Zygmund 连续性就证明了方程(0.2)的解的有界性. 这表明 Duffing 型方程的解的有界性不必要求 $p_j(t)$ 的光滑性, 从而回答了文献[7]提出的问题. 具体地说, 证明了下面的定理:

定理 0.1 假设方程(0.2)中的所有 $p_j(t)$ 是 1-周期的函数且满足:

(A₁) 当 $0 \leq j \leq 2n$ 时, $p_j(t)$ 是 Lipschitz 连续的且有 Lipschitz 常数 l_j ;

(A₂) 当 $n+1 \leq j \leq 2n$ 时, $p_j(t)$ 是 Zygmund 连续的, 即存在常数 L_j , 使得对任何 $h > 0$ 有

$$|p_j(t+2h) - 2p_j(t+h) + p_j(t)| \leq L_j h^2,$$

那么, 方程(0.2)的每一个解 $x(t)$ 是有界的, 即它在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在且满足:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(|x(t)| + \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| \right) < \infty.$$

1 作用-角变量

如文献 [7] 引进作用-角变量. 考虑方程:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x^{2n+1} = 0. \quad (1.1)$$

置 $\frac{dx}{dt} = y$, 有场

$$X_h^*: \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h^*(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial h^*(x, y)}{\partial x}, \quad (1.2)$$

这里

$$h^*(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2n+2}x^{2n+2}. \quad (1.3)$$

熟知, (1.2) 式的非零解是周期解. 设 $(x_0(t), y_0(t))$ 是 (1.2) 式的初始条件为 $(x_0(0), y_0(0)) = (1, 0)$ 的解, 且设 T_0 是其最小正周期. 据 (1.2) 式知, $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 有下列性质:

- (i) $\frac{dx_0(t)}{dt} = y_0(t), \quad \frac{dy_0(t)}{dt} = -(x_0(t))^{2n+1};$
- (ii) $y_0(t+T_0) = y_0(t), \quad x_0(t+T_0) = x_0(t);$
- (iii) $(n+1)(y_0(t))^2 + (x_0(t))^{2n+2} = 1;$
- (iv) $x_0(-t) = x_0(t), \quad y_0(-t) = -y_0(t).$

现在作用-角变量通过映射 $\Psi_0: \mathbb{R}^+ \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2/\{0\}$ 来定义, 其中 $(x, y) = \Psi_0(\lambda, \theta)$ 由下式给出:

$$\begin{cases} x = c^\alpha \lambda^\alpha x_0(\theta T_0), \\ y = c^\beta \lambda^\beta y_0(\theta T_0), \\ \alpha = \frac{1}{n+2}, \quad \beta = 1 - \alpha, \quad c = \frac{1}{\alpha T_0}, \end{cases} \quad (1.4)$$

这里 $\lambda > 0, \theta \in S^1$. Ψ_0 是从 $\mathbb{R}^+ \times S^1$ 到 $\mathbb{R}^2/\{0\}$ 上的辛微分同胚^[7]. (0.2) 式在 (x, y) -平面上的 Hamilton 函数

$$h(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2n+2}x^{2n+2} + \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j+1} p_j(t) x^{j+1}, \quad (1.5)$$

因而在辛变换 Ψ_0 下, 它变为

$$H(\lambda, \theta, t) = \frac{1}{2n+1} c^{2\beta} \lambda^{2\beta} + \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j+1} p_j(t) \lambda^{\frac{j+1}{n+2}} (x_0(\theta T_0))^{j+1}. \quad (1.6)$$

不失一般性, 在下面的证明中, 略去常数 $\frac{1}{2n+1} c^{2\beta}$.

2 辛变换

定义 2.1 对一给定的常数 r 和一非负整数 m , 称 $f(\lambda, \theta, t) \in F_m(r)$, 如果 $f \in C(\mathbb{R}^+ \times T^2)$ 且 f 关于 (λ, θ) 是 C^∞ 的, 关于 t 是 C^m 的, 以及对任何整数 $0 \leq k \leq m$ 和所有非负整数 j 和 l , 有

$$\sup_{\substack{(\theta, t) \in T^2 \\ \lambda \geq \lambda_{j,l}}} (\lambda^{-r} |(\mathbb{D}_\lambda^j)(\mathbb{D}_\theta^l)(\mathbb{D}_t^k)f(\lambda, \theta, t)|) \leq c_{j,l},$$

这里 $\lambda_{j,l}$ 和 $c_{j,l}$ 是某些正常数.

据定义, 容易证明:

引理 2.1 (i) 若 $r_1 < r_2$, 则 $F_m(r_1) \subset F_m(r_2)$;

(ii) 若 $f \in F_m(r)$, 则 $(\mathbb{D}_\lambda^j)f \in F_m(r-j)$;

(iii) 若 $f \in F_m(r)$, $k \leq m$, 则 $(\mathbb{D}_t^k)f \in F_{m-k}(r)$;

(iv) 若 $f_1 \in F_m(r_1)$, $f_2 \in F_m(r_2)$, 则 $f_1 \circ f_2 \in F_m(r_1+r_2)$;

(v) 若 $f \in F_m(r)$ 满足 $|f(\lambda, \cdot, \cdot)| \geq c\lambda^r$, 其中 $\lambda > \lambda_0$, 且 λ_0 和 c 是正常数, 则 $1/f \in F_m(-r)$;

(vi) 若 $f \in F_m(r)$, $u \in F_m(r_1)$, $v \in F_m(r_2)$, 其中 $r_1 < 1$, $r_2 < 0$, 且令 $f^*(\mu, \phi, t) := f(\mu + u(\mu, \phi, t), \phi + v(\mu, \phi, t), t)$, 则 $f^* \in F_m(r)$;

(vii) 若 $f \in F_m(r_1)$, $\lambda = \lambda(\rho) \in F_m(r_2)$, 且令 $f^*(\rho, \theta, t) := f(\lambda(\rho), \theta, t)$, 则 $f^* \in F_m(r_1 r_2)$.

对 $f \in F_m(r)$, 用 $[f]$ 表示关于变量 θ 的平均:

$$[f](\lambda, t) := \int_0^1 f(\lambda, \theta, t) d\theta.$$

若 $\lambda_0 > 0$, 则用 $A_{\lambda_0} \subset \mathbb{R}^+ \times T^2$ 表示环面

$$A_{\lambda_0} := \{(\lambda, \theta, t) / \lambda \geq \lambda_0, (\theta, t) \in T^2\}.$$

命题 2.1 记

$$H = \lambda^a + h_1(\lambda, t) + h_2(\lambda, \theta, t),$$

其中 $h_1 \in F_m(c)$, $h_2 \in F_m(b)$. 设 $a > 1$, $b < a$, $c < a$ 及 $m \geq 1$, 则存在一周期依赖于时间 t 的具有如下形式的辛微分同胚

$$\Psi: \begin{cases} \lambda = \mu + u(\mu, \phi, t), \\ \theta = \phi + v(\mu, \phi, t) \end{cases}$$

(这里, $u \in F_m(1-(a-b))$, $v \in F_m(-(a-b))$), 使得对充分大的 $\mu_- < \mu_0 < \mu_+$ 有 $A_{\mu_+} \subset \Psi(A_{\mu_0}) \subset A_{\mu_-}$. 进而, Ψ 变 Hamilton 函数 H 为

$$H = \mu^a + \hat{h}_1(\mu, t) + \hat{h}_2(\mu, \phi, t) + \hat{h}_2(\mu, \phi, t),$$

其中 $\hat{h}_1 \in F_m(c_1)$ (这里 $c_1 = \max\{c, b\}$) 由下式给出:

$$\hat{h}_1(\mu, t) = h_1(\mu, t) + [h_2](\mu, t),$$

而 $\hat{h}_2 \in F_m(b-(a-b))$, $\hat{h}_2 \in F_{m-1}(1-(a-b))$.

证 证法类似于文献[7]的命题 1. 但须注意关于时间 t 的可微性的损失. 置

$$h_0(\mu, t) := \mu^a + h_1(\mu, t), \quad (2.1)$$

$$v = v(\mu, \theta, t) := \frac{[h_2](\mu, t) - h_2(\mu, \theta, t)}{\partial_\mu h_0(\mu, t)}. \quad (2.2)$$

定义一个生成函数

$$S(\mu, \theta, t) := \int_0^\theta \nu(\mu, \theta, t) d\theta. \quad (2.3)$$

需要的变换 Ψ 由下式隐函地定义:

$$\begin{cases} \lambda = \mu + \frac{\partial}{\partial \theta} S(\mu, \theta, t), \\ \phi = \theta + \frac{\partial}{\partial \mu} S(\mu, \theta, t). \end{cases} \quad (2.4)$$

用变量 (μ, θ, t) 而不用 (μ, ϕ, t) 表示被变换后的 Hamilton 函数

$$H(\mu, \theta, t) = h_0(\mu + \nu, t) + h_2(\mu + \nu, \theta, t) + \frac{\partial}{\partial t} S(\mu, \theta, t). \quad (2.5)$$

用 Taylor 公式和(2.1)及(2.2)式, 有

$$H(\mu, \theta, t) = \mu^a + h_1(\mu, t) + [h_2](\mu, t) + R(\mu, \theta, t), \quad (2.6)$$

其中

$$R(\mu, \theta, t) = \frac{\partial}{\partial t} S(\mu, \theta, t) + \int_0^1 (1-\tau) \partial_1^2 h_0(\mu + \tau\nu, t) \nu^2 d\tau + \int_0^1 \partial_1 h_2(\mu + \tau\nu, \theta, t) \nu d\tau, \quad (2.7)$$

这里 $\nu = \nu(\mu, \theta, t)$, ∂_1 表示对 $h_0(\cdot, \cdot)$ 或 $h_2(\cdot, \cdot, \cdot)$ 的第 1 个变量求导.

余下的证明由下面 2 个引理即得.

引理 2.2 设 S 由(2.2)和(2.3)式定义, 则(2.4)式定义了一个周期依赖时间 t 的辛微分同胚 Ψ , 它有如下形式:

$$\begin{cases} \lambda = \mu + u(\mu, \phi, t), \\ \theta = \phi + v(\mu, \phi, t), \end{cases} \quad (2.8)$$

其中, $u \in F_m(1 - (a-b))$, $v \in F_m(-(a-b))$.

证 因为 h_0 和 h_2 关于时间 t 是 m 次连续可微的函数, 且因为对所有 $t \in S^1$ 和充分大的 μ 有 $\partial_\mu h_0(\mu, t) \geq a\mu^{a-1}/2$, 因此由(2.2)式知, $\nu(\mu, \theta, t)$ 关于时间 t 是 C^m 的函数. 进而, $S(\mu, \theta, t)$ 关于时间 t 是 C^m 的函数. 进一步的证据类似于文献[7]的引理 2.

现在用变量 (μ, ϕ, t) 来表示被变换后的 Hamilton 函数 H , 注意到(2.6)和(2.7)式, 有

$$H(\mu, \phi, t) = \mu^a + h_1(\mu, t) + [h_2](\mu, t) + R_1 + R_2 + R_3, \quad (2.9)$$

其中

$$R_1 = \left[\frac{\partial}{\partial t} S \right](\mu, \phi + v, t), \quad (2.10)$$

$$R_2 = \int_0^1 (1-\tau) \partial_1^2 h_0(\mu + \tau\nu, t) u^2 d\tau, \quad (2.11)$$

$$R_3 = \int_0^1 \partial_1 h_2(\mu + \tau\nu, \phi + v, t) u d\tau, \quad (2.12)$$

这里 $u = u(\mu, \phi, t)$, $v = v(\mu, \phi, t)$, ∂_1 表示对 $h_0(\cdot, \cdot)$ 或 $h_2(\cdot, \cdot, \cdot)$ 的第 1 个变量求导.

引理 2.3 (i) $R_1 \in F_{m-1}(1 - (a-b))$, (ii) $R_2 \in F_m(b - (a-b))$, (iii) $R_3 \in F_m(b - (a-b))$.

证 注意到 $S(\mu, \theta, t)$ 关于 (μ, θ) 是 C^∞ 且关于 t 是 C^m 以及 $v(\mu, \phi, t)$ 关于 t 是 C^m 的, 有 $R_1(\mu, \phi, t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} S \right](\mu, \phi + v, t)$ 关于 t 是 C^{m-1} 的. 类似地, 有 $R_2(\mu, \phi, t)$ 和 $R_3(\mu, \phi, t)$ 关于 t 是 C^m 的. 进一步的证据同文献[7]的引理3.

置 $\hat{h}_2 = R_2 + R_3$ 和 $\hat{h}_2 = R_1$, 利用引理2.2和2.3, 即得命题2.1的证明.

3 光滑技术

任给 $\epsilon > 0$, 定义一个核

$$\Delta_\epsilon(t) := \begin{cases} A_\epsilon \left(1 - \frac{t^4}{\epsilon^4} \right)^4, & |t| \leq \epsilon, \\ 0, & |t| > \epsilon, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中正常数 A_ϵ 由下式决定:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\epsilon(t) dt = 1. \quad (3.2)$$

设 $p_j(t) (j=0, 1, \dots, 2n)$ 是方程(0.2)中的1周期函数. 定义

$$\hat{p}_j(t, \epsilon) := \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\epsilon(t-s) p_j(s) ds. \quad (3.3)$$

引理3.1 对任意 $j \in \{0, 1, \dots, 2n\}$, 有关于时间 t 是1-周期的 C^2 函数 $\hat{p}_j(t, \epsilon)$, 且存在一个独立于 ϵ 的常数 c_j , 使得 $|\hat{p}_j(t, \epsilon)| \leq c_j$.

证 从(3.1)和(3.3)式可得

$$\hat{p}_j(t, \epsilon) = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} A_\epsilon \left(1 - \frac{(t-s)^4}{\epsilon^4} \right)^4 p_j(s) ds. \quad (3.4)$$

选择 $\xi = s - t$ 作为(3.4)式中的新积分变量, 有

$$\hat{p}_j(t, \epsilon) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_\epsilon \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 p_j(t + \xi) d\xi. \quad (3.5)$$

记 $c_j = \max_{t \in S^1} |p_j(t)|$, 据(3.5)式有

$$|\hat{p}_j(t, \epsilon)| \leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_\epsilon \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 c_j d\xi = c_j.$$

因 $p_j(t)$ 是1周期的, 故

$$\hat{p}_j(t+1, \epsilon) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_\epsilon \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 p_j(t+1+\xi) d\xi = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_\epsilon \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 p_j(t+\xi) d\xi = \hat{p}_j(t, \epsilon),$$

这表明 $\hat{p}_j(t, \epsilon)$ 是1周期的. 据(3.4)式易得 $\hat{p}_j(t, \epsilon)$ 关于时间 t 是 C^2 函数.

引理3.2 若 $p_j(t) (j=0, 1, \dots, 2n)$ 满足定理0.1的假设(A₁), 则 $\left| \frac{d}{dt} \hat{p}_j(t, \epsilon) \right| \leq l_j$, 其中 l_j 是(A₁)中那些独立于 ϵ 的 Lipschitz 常数.

证 任给 $\tau > 0$, 据(3.5)式有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau} (\hat{p}_j(t+\tau, \epsilon) - \hat{p}_j(t, \epsilon)) \right| &\leq \frac{1}{\tau} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_\epsilon \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 |p_j(t+\tau+\xi) - p_j(t+\xi)| d\xi \leq \\ &\frac{1}{\tau} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_\epsilon \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 l_j \tau d\xi = l_j, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中第 2 个不等式是据假设 (A₁) 得到的. 据引理 3.1 知, $\frac{d}{dt}\hat{p}_j(t, \epsilon)$ 存在. 在 (3.6) 式中令 $\tau \rightarrow 0$, 得到 $\left| \frac{d}{dt}\hat{p}_j(t, \epsilon) \right| \leq l_j$.

引理 3.3 若 $p_j(t)$ ($j = n+1, \dots, 2n$) 满足定理 0.1 的假设 (A₂), 则对 $n+1 \leq j \leq 2n$, 有 $\left| \frac{d^2}{dt^2}\hat{p}_j(t, \epsilon) \right| \leq L_j$, 其中 L_j 是 (A₂) 中那些独立于 ϵ 的常数.

证 任给 $\tau > 0$, 据 (3.5) 式有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\tau} (\hat{p}_j(t+2\tau, \epsilon) - 2\hat{p}_j(t+\tau, \epsilon) + \hat{p}_j(t, \epsilon)) \right| \leq \\ & \frac{1}{\tau^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_{\epsilon} \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 |p_j(t+2\tau+\xi) - 2p_j(t+\tau+\xi) + p_j(t+\xi)| d\xi \leq \\ & \frac{1}{\tau^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_{\epsilon} \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 L_j \tau^2 d\xi = L_j. \end{aligned} \quad (3.7)$$

由引理 3.1 知, $\frac{d^2}{dt^2}\hat{p}_j(t, \epsilon)$ 存在. 在 (3.7) 式中令 $\tau \rightarrow 0$, 有 $\left| \frac{d^2}{dt^2}\hat{p}_j(t, \epsilon) \right| \leq L_j$.

引理 3.4 若 $p_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots, 2n$) 满足假设 (A₁), 且置 $\tilde{p}_j(t, \epsilon) = p_j(t) - \hat{p}_j(t, \epsilon)$, 则对 $0 \leq j \leq 2n$, 有 $|\tilde{p}_j(t, \epsilon)| / \epsilon \leq l_j$, 其中 l_j 是 (A₁) 中那些独立于 ϵ 的常数.

证 据 (3.1) 和 (3.2) 式有

$$p_j(t) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_{\epsilon} \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 p_j(t) d\xi. \quad (3.8)$$

由 (3.5) 式有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} |\tilde{p}_j(t, \epsilon)| &= \frac{1}{\epsilon} \left| \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_{\epsilon} \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 (p_j(t) - p_j(t+\xi)) d\xi \right| \leq \\ & \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_{\epsilon} \left(1 - \frac{\xi^4}{\epsilon^4} \right)^4 l_j |\xi| d\xi \leq l_j. \end{aligned} \quad (3.9)$$

4 定理的证明

设 $p_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots, 2n$) 满足定理 0.1 的假设 (A₁) 和 (A₂). 据 (1.6) 式, (0.2) 式的 Hamilton 函数为

$$H(\lambda, \theta, t) = \lambda^{\frac{2n+2}{n+2}} + H_1(\lambda, \theta, t) + H_2(\lambda, \theta, t) + \epsilon H_3(\lambda, \theta, t), \quad (4.1)$$

其中

$$H_1(\lambda, \theta, t) = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j+1} \hat{p}_j(t, \epsilon) \lambda^{\frac{j+1}{n+2}} (x_0(\theta T_0))^{j+1}, \quad (4.2)$$

$$H_2(\lambda, \theta, t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \hat{p}_j(t, \epsilon) \lambda^{\frac{j+1}{n+2}} (x_0(\theta T_0))^{j+1}, \quad (4.3)$$

$$H_3(\lambda, \theta, t) = \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j+1} \left[\frac{1}{\epsilon} \tilde{p}_j(t, \epsilon) \right] \lambda^{\frac{j+1}{n+2}} (x_0(\theta T_0))^{j+1}. \quad (4.4)$$

注 1 在下面的证明中, 只关心 $\hat{p}_j(t, \epsilon)$ 和 $\tilde{p}_j(t, \epsilon)$ 及有关各阶导数的界而不关心其取值的大小, 据第 3 节各引理知这些界是独立于 ϵ 的. 因而为了方便简记 $H_j(\lambda, \theta, t, \epsilon)$ 为 $H_j(\lambda,$

$\theta, t)(j=1, 2, 3)$.

利用第3节的引理易得

引理 4.1 (i) $H_1 \in F_2\left[\frac{2n+1}{n+2}\right]$, (ii) $H_2 \in F_1\left[\frac{n+1}{n+2}\right]$, (iii) $H_3 \in F_0\left[\frac{2n+1}{n+2}\right]$.

引理 4.2 设 H 如 (4.1) 式所示, 则存在一个周期地依赖于时间 t 的辛微分同胚 $\Psi_1^*(t)$, 对某些大的 $\mu_- < \mu_0 < \mu_+$, 有 $A_{\mu_+} \subset \Psi_1^*(t)(A_{\mu_0}) \subset A_{\mu_-}$, 此时 H 被变为

$$H(\mu, \phi, t) = \mu^{\frac{2n+2}{n+2}} + \hat{h}_1(\mu, t) + H_1(\mu, \phi, t) + \epsilon H_3(\mu, \phi, t), \quad (4.5)$$

其中 $\hat{h}_1 \in F_0\left[\frac{2n+1}{n+2}\right]$, $H_1 \in F_0\left[\frac{1}{n+2}\right]$, $H_3 \in F_0\left[\frac{2n+1}{n+2}\right]$.

证 步骤 1 令

$$h := \lambda^{\frac{2n+2}{n+2}} + h_1(\lambda, t) + h_2(\lambda, \theta, t), \quad (4.6)$$

其中, $h_1(\lambda, t) \equiv 0$, $h_2(\lambda, \theta, t) \equiv H_1(\lambda, \theta, t)$. 显然, $h_1 \in F_2(0)$. 据引理 4.1(i) 有: $h_2 \in F_2\left[\frac{2n+1}{n+2}\right]$. 现在

$$H = \lambda^{\frac{2n+2}{n+2}} + h_1(\lambda, t) + (h_2 + H_2 + \epsilon H_3)(\lambda, \theta, t). \quad (4.7)$$

在命题 2.1 中令 $a = \frac{2n+2}{n+2}$, $b = \frac{2n+1}{n+2}$, $c = 0$, 并利用此命题到 h 上, 得到一个辛微分同胚 Ψ_1 :

$$\begin{cases} \lambda = \mu + u(\mu, \phi, t), \\ \theta = \phi + v(\mu, \phi, t), \end{cases} \quad (4.8)$$

其中, $u \in F_2\left[\frac{n+2}{n+1}\right]$, $v \in F_2\left[-\frac{1}{n+2}\right]$, 它使得 h 变为

$$h^* := h(\mu + u, \phi + v, t) = \mu^{\frac{2n+2}{n+2}} + \hat{h}_1(\mu, t) + (\hat{h}_2 + \bar{h}_2)(\mu, \phi, t), \quad (4.9)$$

这里 $\hat{h}_1 \in F_2\left[\frac{2n+1}{n+2}\right]$, $\hat{h}_2 \in F_2\left[\frac{2n}{n+2}\right]$, $\bar{h}_2 \in F_1\left[\frac{n+1}{n+2}\right]$.

现在 H 被 Ψ_1 变为 $H(\mu, \phi, t) \equiv H(\mu + u, \phi + v, t)$. 据 (4.6) ~ (4.9) 式知 H 有如下形式:

$$H = \mu^{\frac{2n+2}{n+2}} + \hat{h}_1(\mu, t) + (\hat{h}_2 + \bar{h}_2)(\mu, \phi, t) + (H_2 + \epsilon H_3)(\mu + u, \phi + v, t). \quad (4.10)$$

令

$$\hat{h}(\mu, \phi, t) = \mu^{\frac{2n+2}{n+2}} + \hat{h}_1(\mu, t) + H_2(\mu, \phi, t), \quad (4.11)$$

$$H_2(\mu, \phi, t) = \bar{h}_2(\mu, \phi, t) + H_2(\mu + u, \phi + v, t), \quad (4.12)$$

$$H_3(\mu, \phi, t) = H_3(\mu + u, \phi + v, t). \quad (4.13)$$

据引理 2.1(vi) 有 $H_2 \in F_1\left[\frac{1}{n+2}\right]$ 和 $H_3 \in F_0\left[\frac{2n+1}{n+2}\right]$, 故有

$$H = \mu^{\frac{2n+2}{n+2}} + \hat{h}_1(\mu, t) + (\hat{h}_2 + H_2 + \epsilon H_3)(\mu, \phi, t). \quad (4.14)$$

注意到 (4.14) 和 (4.7) 式形式相同, 且 $\hat{h}_2$ 关于时间 t 仍是 C^2 的, 重复上述步骤 n 次, 得到一

个辛微分同胚 $\Psi_1 = \Psi_n \circ \Psi_{n-1} \circ \dots \circ \Psi_1$, 其中, 对某些大的 $\mu_- < \mu_0 < \mu_+$ 有 $A_{\mu_+} \subset \Psi_1(A_{\mu_0}) \subset A_{\mu_-}$. 此时, Hamilton 函数 H 变为

$$H^* = \rho^{\frac{2n+2}{n+2}} + h_1^*(\rho, t) + (\hat{h}_2^* + H_2^* + \epsilon H_3^*)(\rho, \tau, t), \quad (4.15)$$

其中, $h_1^* \in F_2\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$, $\hat{h}_2^* \in F_2\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$, $H_2^* \in F_1\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$, $H_3^* \in F_0\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$.

步骤 2 为了不引入太多符号, 改记(4.15)式为

$$H = \lambda^{\frac{2n+2}{n+2}} + h_1(\lambda, t) + (\hat{h}_2 + H_2 + \epsilon H_3)(\lambda, \theta, t), \quad (4.15')$$

其中, $h_1 \in F_2\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$, $\hat{h}_2 \in F_2\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$, $H_2 \in F_1\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$, $H_3 \in F_0\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$. 令 $h_2 = \hat{h}_2 + H_2$, 则 $h_2 \in F_1\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$, 而且

$$H = \lambda^{\frac{2n+2}{n+2}} + h_1(\lambda, t) + (h_2 + \epsilon H_3)(\lambda, \theta, t). \quad (4.16)$$

置 $h = \lambda^{\frac{2n+2}{n+2}} + h_1(\lambda, t) + h_2(\lambda, \theta, t)$. 用命题 2.1 于 h , 得到一个辛微分同胚 Ψ_{n+1} , 使得 h 变为

$$\hat{h} = \mu^{\frac{2n+2}{n+2}} + \hat{h}_1(\mu, t) + (\hat{h}_2 + h_2)(\mu, \phi, t),$$

这里, $\hat{h}_1 \in F_1\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$, $\hat{h}_2 \in F_1\left(\frac{n}{n+2}\right)$, $h_2 \in F_0\left(\frac{1}{n+2}\right)$. 注意到 $\hat{h}_2$ 关于时间 t 仍然是 C^1 的. 像步骤 1 那样 n 次利用命题 2.1, 得到一个辛微分同胚 $\Psi_2 = \Psi_{2n} \circ \dots \circ \Psi_{n+1}$. 注意到 Ψ_1 和 Ψ_2 周期地依赖时间 t . 令 $\Psi_1^*(t) = \Psi_2 \circ \Psi_1$. 最后, 在微分同胚 $\Psi_1^*(t)$ 作用下, 被变换后的 Hamilton 函数形如(4.5)式.

据引理 4.2, (0.2)式的被变换后的 Hamilton 函数可写为

$$H = \lambda^{\frac{2n+2}{n+2}} + h_1(\lambda, t) + (h_2 + \epsilon h_3)(\lambda, \theta, t), \quad (4.17)$$

这里, $h_1 \in F_0\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$, $h_2 \in F_0\left(\frac{1}{n+2}\right)$, $h_3 \in F_0\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$. 对应的 Hamilton 方程是

$$X_H: \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \theta} h_2 - \epsilon \frac{\partial}{\partial \theta} h_3, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{2n+2}{n+2} \lambda^{\frac{n}{n+2}} + \frac{\partial}{\partial \lambda} h_1 + \epsilon \frac{\partial}{\partial \lambda} h_3. \end{cases} \quad (4.18)$$

定义一个微分同胚 $\Psi_2^*: (\lambda, \theta) \rightarrow (\rho, \phi)$ 如下:

$$\begin{cases} \rho = \frac{2n+2}{n+2} \lambda^{\frac{n}{n+2}}, \\ \phi = \theta, \end{cases} \quad (4.19)$$

它变(4.18)式为

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{(2n+2)n}{(n+2)^2} \lambda^{\frac{-2}{n+2}} \frac{\partial}{\partial \phi} (h_2 + \epsilon h_3)(\lambda, \phi, t), \\ \frac{d\phi}{dt} = \rho + \frac{\partial}{\partial \lambda} h_1(\lambda, t) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (h_2 + \epsilon h_3)(\lambda, \phi, t), \end{cases} \quad (4.20)$$

这里, $\lambda := \lambda(\rho) = \left(\frac{n+2}{2n+2} \right)^{\frac{n+2}{n}} \rho^{\frac{n+2}{n}}$ 由 (4.19) 式定义.

利用引理 2.1 和 $h_1 \in F_0 \left(\frac{2n+1}{n+2} \right)$, $h_2 \in F_0 \left(\frac{1}{n+1} \right)$, $h_3 \in F_0 \left(\frac{2n+1}{n+2} \right)$, 有

$$\begin{cases} f_1(\rho, \phi, t) := -\frac{(2n+2)n}{(n+2)^2} (\lambda(\rho))^{\frac{-2}{n+2}} \frac{\partial}{\partial \phi} h_2(\lambda(\rho), \phi, t) \in F_0 \left(-\frac{1}{n} \right), \\ f_2(\rho, \phi, t) := -\frac{(2n+2)n}{(n+2)^2} (\lambda(\rho))^{\frac{-2}{n+2}} \frac{\partial}{\partial \phi} h_3(\lambda(\rho), \phi, t) \in F_0 \left(2 - \frac{1}{n} \right), \\ g_1(\rho, \phi, t) := \frac{\partial}{\partial \lambda} h_1(\lambda(\rho), t) \in F_0 \left(1 - \frac{1}{n} \right), \\ g_2(\rho, \phi, t) := \frac{\partial}{\partial \lambda} h_2(\lambda(\rho), \phi, t) \in F_0 \left(-1 - \frac{1}{n} \right), \\ g_3(\rho, \phi, t) := \frac{\partial}{\partial \lambda} h_3(\lambda(\rho), \phi, t) \in F_0 \left(1 - \frac{1}{n} \right). \end{cases} \quad (4.21)$$

可把 (4.20) 式写为

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = (f_1 + \epsilon f_2)(\rho, \phi, t), \\ \frac{d\phi}{dt} = \rho + g_1(\rho, t) + (g_2 + \epsilon g_3)(\rho, \phi, t). \end{cases} \quad (4.22)$$

设 $\{\rho_m\}$ 是一串满足当 $m \rightarrow +\infty$ 时 $\rho_m \rightarrow +\infty$ 和 $\rho_{m+1} - \rho_m \geq 2$ 的序列. 置 $f = f_1 + \epsilon f_2$, $g = g_2 + \epsilon g_3$, 且令 $\epsilon = \rho_m^{-2}$. 注意到 (4.21) 式, 有

引理 4.3 (0.2) 式被变换后可写为

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = f(\rho, \phi, t), \\ \frac{d\phi}{dt} = \rho + g_1(\rho, t) + g(\rho, \phi, t), \end{cases} \quad (4.23)$$

对 $(\rho, \phi, t) \in A_{\rho_m}^{\rho} \setminus A_{\rho_{m+1}}^{\rho}$ 和所有满足 $j+l \leq 6$ 的非负整数 j 和 l , 以及充分大的 m , 有

$$|D_x^j D_t^l f(\rho, \phi, t)|, |D_x^j D_t^l g(\rho, \phi, t)| \leq \rho_m^{-1/n}, \quad (4.24)$$

$$|D_x^j g_1(\rho, t)| \leq \rho_m^{1-\frac{1}{n}}. \quad (4.25)$$

注意到 (4.24) 式, 易证若 $\lambda \in [\rho_m, \rho_{m+1}]$ 且 m 充分大, 则 (4.23) 式的初值 $\rho(0) = \lambda$ 的解在 $0 \leq t \leq 1$ 上存在; 因而 (4.23) 式的流的时间 1 映射存在. 在下述引理中将证明此映射靠近一个扭转映射.

引理 4.4 (4.23) 式的流的时间 1 映射 Φ^1 具有如下形式:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + r(\lambda) + f(\lambda, \theta), \\ \lambda_1 = \lambda + \hat{g}(\lambda, \theta), \end{cases} \quad (4.26)$$

其中, $r(\lambda) = \lambda + \int_0^1 g_1(\lambda, s) ds$, 且 $\rho_m \leq \lambda \leq \rho_{m+1}$ (对充分大的 m), $\theta \in S^1$. 进而对每对满足 $l+j \leq 6$ 的非负整数 j 和 l 有

$$|D_x^j D_t^l f(\lambda, \theta)|, |D_x^j D_t^l \hat{g}(\lambda, \theta)| \leq \rho_m^{-1/n},$$

$$\left| D_{\lambda} \int_0^1 g_1(\lambda, s) ds \right| \leq \rho_m^{-\frac{1}{n}}.$$

证 利用引理 4.3 和文献[7] 中引理 4 的证明方法即得.

引理 4.5 映射 Φ^1 在下列区域内有相交性:

$$\Omega_m := \{(\lambda, \theta) \mid \rho_m \leq \lambda \leq \rho_{m+1}, \theta \in S^1\},$$

即若 C 是在 Ω_m 中的同伦于一个 $\lambda = \text{const}$ 的拓扑圆, 那么 $\Phi^1(C) \cap C \neq \emptyset$.

证 设 H 是由 (1.6) 式定义的 Hamilton 函数且令 Φ^1 是下列方程的流的时间 1 映射,

$$X_H: \lambda = -\frac{\partial}{\partial \theta} H, \theta = \frac{\partial}{\partial \lambda} H.$$

令 $\Psi(t) = \Psi_2^* \circ \Psi_1^*(t)$, 其中, $\Psi_1^*(t)$ 由引理 4.2 给出, Ψ_2^* 由 (4.19) 式定义. 注意到 (1.6) 式被 $\Psi(t)$ 变为 (4.23) 式, 有 $\Phi^1 \circ \Psi(0) = \Psi(1) \circ \Phi^1$. 因 $\Psi_1^*(t)$ 周期地依赖于时间 t 且其周期为 1, 故 $\Psi(1) = \Psi(0)$, 于是 $\Phi^1 \circ \Psi(0) = \Psi(0) \circ \Phi^1$, 即 Φ^1 和 Φ^1 是拓扑共轭的. 据文献[7] 的引理 5, Φ^1 在 $(\Psi(0))^{-1} \Omega_m$ 上有相交性. 因此 Φ^1 在 Ω_m 上有相交性.

定理 0.1 的证 据引理 4.4 和 4.5 知 Φ^1 满足 Moser 扭转定理^[4, 5, 12] 的条件, 故 Φ^1 在 Ω_m 上至少有一条不变闭曲线 C_m . (4.23) 式的在时间 $t=0$ 时从此曲线上出发的解在空间 $(\rho, \phi, t) \in \Omega_m \times \mathbb{R}$ 中形成一个 1 周期的柱面. 因 (4.23) 式是时间 1 周期的, 故相空间是 $\Omega_m \times S^1$. 注意到当 $m \rightarrow \infty$ 时 Ω_m 的半径趋于 $+\infty$, 得到: 在原始坐标中, 每对 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 必在方程 (0.2) 的流 $(x, \dot{x})$ 的时间 1 映射的某不变曲线内. 因而从 (x, y) 出发的方程 (0.2) 的解必被限制在上述不变曲线形成的时间周期的柱面内, 于是它是有界的.

致谢 感谢李训经和 同仁以及柳彬先生的极有价值的建议和帮助.

参 考 文 献

- 1 Littlewood J. Unboundedness solutions of an equation $\ddot{y} + g(y) = p(t)$, with $p(t)$ periodic and bounded and $g(y)/y \rightarrow \infty$ as $y \rightarrow \pm\infty$. J Lond Math Soc. 1966, 41: 497~507
- 2 Long Y. Unbounded solutions of a superlinear Duffing equation. Acta Math Sinica (New Series), 1991, 7: 360~369
- 3 Morris G. A case of boundedness in Littlewood's problem on oscillatory differential equations. Bull Austr Math Soc. 1976, 14: 71~93
- 4 Moser J. On invariant curves of area-preserving mapping of annulus. Nachr Akad Wiss Göttingen Math Phys. 1962, 2: 1~20
- 5 Moser J. Stable and Random Motion in Dynamical Systems. Princeton: Princeton University Press. 1973
- 6 Liu B. Boundedness for solutions of nonlinear Hill's equations with periodic forcing terms via Moser's twist theorem. Journal of Differential Equation. 1989, 79: 304~315
- 7 Dieckerhoff R, Zehnder E. Boundedness of solutions via the twist theorem. Ann Scuola Norm Sup Pisa, 1987, 2: 79~95
- 8 Liu B. Boundedness for solutions of nonlinear periodic differential equation via Moser's twist theorem. Acta Math Sinica (New Series), 1992, 8: 91~98
- 9 Laederich S, Levi M. Invariant curves and time-dependent potentials. Ergod Th and Dynam Sys. 1991, 11: 365~378
- 10 Levi M. Quasiperiodic motions in superquadratic time-periodic potentials. Commun Math Phys. 1991, 143: 43~84
- 11 Yuan X. Invariant tori of Duffing-type equations. Advances in Mathematics (China), 1995, 4: 375~376
- 12 Russmann H. On the existence of invariant curves of twist mappings of annulus. In: Palis J. ed. Geometric Dynamics. Lecture Notes in Math, Vol 1 007. New York: Springer-Verlag. 1987. 677~718