



高维非线性守恒律方程组

陈恕行

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: sxchen@fudan.edu.cn

收稿日期: 2012-10-10; 接受日期: 2012-12-30

国家自然科学基金 (批准号: 11031001) 资助项目

摘要 本文根据高维非线性守恒律方程组的研究历程将这一领域的研究大体分为四个阶段: 局部经典解、具扇状波结构弱解、具花状波结构弱解、整体解与混合型方程. 本文据此线索回顾与介绍多年来在该领域所获得的主要成果与进展, 并提出今后所面临的一些未解决的重要问题及困难.

关键词 守恒律 自由边值问题 激波 跨音速流 双曲型方程 混合型方程

MSC (2010) 主题分类 35L65, 35L67, 35L60, 35M10

1 引言

物理学与力学中许多问题的研究都会导致非线性守恒律方程组. 例如, 无粘可压缩流体运动可以用 Euler 方程组来描述, 该方程组的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} E + p \vec{v}) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

很多其他的物理模型也会导致非线性守恒律方程组, 例如磁流体方程组、弹性力学方程组、相对论流体力学方程组等, 但 Euler 方程组是最基本的. 很多更复杂的物理模型所导致的偏微分方程如 Navier-Stokes 方程组、Boltzmann 方程组等都与 Euler 方程组有紧密的联系. 所以, 对于以 Euler 方程组为代表的非线性守恒律方程组的研究一直是偏微分方程理论研究的中心课题之一.

从 20 世纪中叶起, 由于超音速飞行技术与核技术的发展, 将非线性守恒律方程组的研究推到了更重要的地位. 在超音速飞行过程中飞行器周围的空气会产生冲击波, 气体的压力、密度、速度等物理量在冲击波区域中发生急剧的变化. 在数学上通常用一个物理量的间断面来描述冲击波, 也称为激波. 激波以及其他类型非线性波的频繁出现, 促使人们研究非线性守恒律方程组含间断的解, 也称为广义解或弱解. 非线性守恒律方程组弱解理论的系统研究, 涉及到解的概念、解的构造以及适定性等一系列问题的重新考察, 而其广泛的物理背景与重要的应用恰成为这类研究的一个强大推动力. 因此从 20

世纪中叶以后非线性守恒律方程组理论 (主要是指弱解理论) 的研究就成为数学理论的一个分支, 吸引着众多数学家和物理学家投入其中^[1].

三维空间中的 Euler 方程组 (1.1) 是含 5 个方程的方程组, 其中 $\rho, \vec{v}, p$ 和 E 分别表示密度、速度、压力与内能. 由于这些物理量间还通过一个状态方程相连接, 从而实质的未知函数个数是 5 个. 在经典解的范围内, 最后一个方程可以用

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s = 0, \quad (1.2)$$

其中 s 为热力学函数熵.

容易验证, 方程组 (1.1) 关于 t 是双曲型的. 当考虑定常流即不依赖于时间变量 t 的流动时, 方程组 (1.1) 化成

$$\begin{cases} \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \\ \nabla(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p = 0, \\ \nabla(\rho \vec{v} E + p \vec{v}) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

它的类型与流动参数有关. 特别地, 当流动速度为超音速时, (1.3) 为双曲型的; 而当流动速度为亚音速时, (1.3) 中含有椭圆的因素, 在将流特征分离后可得到椭圆型方程.

由于 Euler 方程组具有多个自变量与多个未知函数, 它的求解十分复杂. 为了简化问题的讨论, 常对所考察的问题添加一些限制. 例如, 若限制于讨论等熵无旋流, 则可以引进速度势, 从而将方程组 (1.1) 简化为

$$(\rho(\nabla \phi))_t + \sum_{j=1}^3 (\phi_{x_j} \rho(\nabla \phi))_{x_j} = 0, \quad (1.4)$$

其中 ϕ 是速度势, 满足 $\vec{v} = \nabla \phi$. (1.4) 是一个二阶拟线性双曲型方程.

假定所考察问题中所有的物理量都与 y, z 无关, 那么 (1.1) 可化为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u E + p u)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

这是一个具一个时间变量 t 与一个空间变量 x 的方程组, 它比 (1.1) 大大简化. 当所考察问题中所有的物理量满足其他对称性要求, 例如球对称时, 问题也可化为具一个空间变量的情形, 但此时球心处所产生的奇性往往会带来很多新的困难, 必须特别注意.

一般来说, 求解方程 (1.5) 的各类问题也十分复杂, 因为它还是含有 3 个方程的具有很强非线性的偏微分方程组. 由于它在理论上与应用上的重要性, 从 20 世纪中叶以后, 经过数学家们半个世纪的努力, 已经对一个空间变数的非线性守恒律方程组建立了较系统完整的理论. 其主要内容有:

- 关于弱解的基本概念, 特别是对熵条件的确切理解^[2-4].
- Riemann 问题的求解^[5].
- 局部弱解的存在性^[6, 7].
- BV 整体解的存在性^[8].
- L^∞ 整体解的存在性^[9-12].

- 整体弱解的唯一性与稳定性^[13-15].

关于一个空间变数的非线性守恒律方程组虽然还有很多有意义的问题值得研究, 但它的整个理论框架已经形成. 这是在 20 世纪末令该领域的数学家们十分鼓舞的事情.

但是与非线性守恒律方程组有关的很多问题在三维空间中发生, 且不具有特定的对称性. 于是, 必须直接讨论方程组 (1.1) 的各类定解问题的求解. 而在对含一个空间变量的方程组 (1.5) 的研究取得长足的进展后, 使研究更一般的方程组 (1.1) 也有了可能. 习惯上, 常将多于一个空间变量的方程组 (1.1) 的各类定解问题称为高维问题. 从 20 世纪中叶以来也已有很多人对于高维非线性守恒律方程组进行了一系列的探索与研究, 并取得了相当的研究成果. 但与对一个空间变量的非线性守恒律方程组的研究成果相比较, 要滞后得多. 例如, 在多个空间变量情形下对最为基本的 Riemann 问题的研究距获得系统完整的成果尚差得很远, 就更无法谈论一般情形下的整体解的存在性、唯一性等问题. 所以, 对于高维非线性守恒律方程组的研究, 应当更结合物理问题的需求来考虑, 并有其独特的研究途径^[16,17]. 本文根据以往对于高维非线性守恒律方程组的研究所获得的成果, 将这方面的研究大体分为四个阶段, 据此回顾多年来在该领域的研究进展, 并有助于了解今后所面临的各类问题及困难^[18].

2 局部经典解

对偏微分方程的研究一般都是从经典解开始的. 对高维非线性守恒律方程组的研究也是如此. 我们知道, 在双曲型方程 (组) 的研究中, 特征是一个很重要的概念. 对单个空间变量的情形, 偏微分方程 (组) 的特征是特征线, 沿特征线积分或将偏微分方程组化为积分方程组也是一个重要的方法. 然而, 对多个空间变量的情形, 特征表现为空间中的特征曲面, 沿特征线积分的方法就不能用了. 且当两个特征相交时, 其交集也可能会是一个更复杂的流形, 而不象在一个空间变量的情形交集只是一个点, 这就会导致很多分析上的困难. 在实际研究中容易体会到, 对于高维非线性守恒律方程组, 各种问题的研究中的很多困难都来自特征分布的复杂性.

在经典解的研究中主要用的是能量方法. 由于 (1.1) 是非线性双曲型方程组, 对它来说成立能量不等式. 于是对于方程组 (1.1) 的 Cauchy 问题, 很快可以建立局部经典解的存在性. 这一事实在 20 世纪中叶前已经知道^[19]. 类似地可以讨论初边值问题的解. 当边界为非特征边界时, 只要边界条件的选取满足“最大非负子空间”的要求^[20], 也能得到局部经典解的存在性^[21].

但是, 当边界为特征边界时, 问题就不那么简单. 这是因为在建立高阶能量估计式时, 需要对方程求微分. 由于边界的出现, 这样的微分运算应该是与边界相切的. 所以, 由此所建立的高阶能量估计式只含所求的解关于边界的切向导数的估计. 如果边界是非特征, 则解关于边界法向导数可以利用方程通过解本身及其切向导数表示, 从而解关于边界法向导数也是可估计的. 这样一来, 完整的高阶导数估计可建立, 相应的存在性也就不难得到了. 然而, 在特征边界的情形, 解关于边界法向导数无法利用方程的解本身及其切向导数表示, 于是得不到完整的高阶导数估计. 故此时为证明经典解的存在性就需要有更细致的考虑. 人们发现, 许多应用问题恰好对应于边界为特征的情形. 例如, 讨论在一个固定区域中运动的流体时, 固壁边界就是特征边界. 又, 运动中的流体的自由表面也是特征边界. 所以, 非线性守恒律方程组具有特征边界的初边值问题有重要应用且实际上是不可避免的.

为讨论具特征边界区域中的非线性双曲型方程组初边值问题的求解, 文献 [22] 引入了特定的带权 Sobolev 空间. 该空间的特有性质是在边界法向的一阶正则性增长需要用边界切向的二阶正则性减少作为补偿. 更确切地说, 若 $[0, h] \times \Omega$ 是所考虑的时空区域, 以 $D_q^p u$ 表示函数 u 的导数, 其中 p 是在切向的求导阶数, q 是在边界法向的求导阶数, 以 H_t^s 表示满足 $D_q^p u \in L^2([0, h] \times \Omega)$ ($p \leq s, q \leq t$) 的函

数构成的 Sobolev 空间. 记

$$B_p = \bigcap_{d \leq \frac{p}{2}} H_d^{p-2d}([0, h] \times \Omega), \quad (2.1)$$

利用这样的空间来刻画非线性双曲型方程组解的正则性, 可以证明它在具特征边界区域中的先验估计, 从而得到相应初边值问题解的存在性 (参见 [22]). 在讨论非线性波运动时, 如果此非线性波的承载曲面为特征 (如中心波疏散或接触间断面) 时也需要引入类似的空间, 它们被记为 H_*^p (参见 [23]) 和 $\tilde{E}^p$ (参见 [24]) 等.

对于非线性双曲组的具特征边界初边值问题的研究, 还可参见 [25–27] 等.

3 扇状波结构: 具高维扰动的类一维问题

非线性双曲型方程的一个特点是不管初始时刻解如何光滑, 都有可能从解的内部发展出奇性来. 在一个空间变量的情形, 这个事实可以用一个很简单的例子说明. 用直观的语言可以这样解释: 在用双曲型方程刻画非线性波传播现象时, 不同波幅的波动具有不同的波速, 于是大波幅的波动会追上小波幅的波动从而使连续解最终形成破裂. 然而人们可能会问, 在多个空间变量的情形, 各个不同方向波动的相互作用是否有可能相互抵消, 从而使间断不再产生呢? Sideris^[28] 证明, 对多个空间变量的双曲型方程组的 Cauchy 问题, 只要初始条件满足不强的约束条件 (例如初始速度的径向分量较大), 就不可能存在整体光滑解. 所以整体光滑解的出现对于多个空间变量的非线性双曲型方程组来说是十分罕见的 (与单个空间变量的情形对初始资料的单调性要求相比要更为苛刻, 从而更为罕见). 所以对多个空间变量的非线性双曲守恒律方程组仅研究经典解是远远不够的.

对于一个空间变量的双曲守恒律方程组, 其基本的非线性波有激波、中心波与接触间断三种. 在多个空间变量的情形, 由于特征流形不再是简单的曲线, 故解的奇性结构也会更复杂. 然而最基本的还是激波、中心波与接触间断这三种.

在高维非线性双曲守恒律方程组的各类波结构中最简单的结构是扇状波结构, 它是具高维扰动的类一维结构. 以含两个空间变数的非线性双曲守恒律方程组初值问题为例, 初始资料给定在 $t = 0$ 平面上, 设初始资料含一条光滑的间断线, 而资料在该曲线两边是光滑到边的, 即资料的各阶导数 (阶数视不同问题而定) 到此曲线连续. 那么, 当 $t > 0$ 时就可能有激波、中心波与接触间断等非线性波从此间断线发出. 这些非线性波全体组成了一把打开的扇子. 取一个截面来看, 其形状与一维的情形十分相似. 但由于初始资料不是常态, 这些非线性波也不会是平面波, 而呈现弯曲的形状. 所以我们称这样的波结构为**扇状波结构**. 这一类问题是具高维扰动的类一维问题. 由于该类问题中包含着高维的扰动, 所以在处理一个空间变量的双曲守恒律方程组的各类问题时常用的沿特征线积分的方法不再适用. 相应地在研究方法上必须做全新的处理.

3.1 高维激波

1983 年 Majda^[29] 研究高维非线性双曲守恒律方程组的间断解取得了突破. 他对于上述的具间断初始值的 Cauchy 问题证明了只要两侧的初值满足一定的相容性条件, 这个初值问题就存在一个分片光滑的局部解. 该解含有一个从初始资料间断线上发出的间断面, 解在间断面两侧的值满足 Rankine-Hugoniot 条件和熵条件. 这个结论可简单地称为含高维激波的局部解的存在性. Majda 所应用的方法

也是完全新的. 他首次将微局部分分析方法应用于讨论经典的非线性问题的研究, 也为微局部分分析理论的发展开辟了新的途径. Majda 关于含 n 个空间变量的 Euler 方程组的结果如下:

定理 3.1 若在初始平面 $t = 0$ 原点的邻域 $|x| < R_0$ 中有一条过原点的充分光滑的曲线 Γ , Γ 两侧区域记为 $\Omega_{\pm}$, 在其上给定初始资料 $u_0^{\pm}(x) \in H^{s+1}(\Omega_{\pm}) \cap \{|x| < R_0\}$, $s \geq 2[\frac{n}{2}] + 7$, 在 Γ 上可以找到 $\sigma \in H^{s+1}(\Gamma)$ 使得将 σ 视为激波斜率时, u_0^-, u_0^+, σ 沿 Γ 成立一致稳定的激波条件以及直到 $s-1$ 阶相容性条件, 则存在常数 $c_0 > 0$ 以及充分小的 $T > 0$, 使得在 $0 \leq t \leq T$, $|x| \leq c_0 R_0$ 中存在含激波的 H^s 解, 激波为 H^{s+1} 正则, 且与 $t = 0$ 平面相交于 Γ .

以上的叙述与 Majda 原文的叙述略有差异, 这是为了避免引进过多需要逐一说明的符号. 在本文其它部分引述有关结果时, 也是如此.

下面让我们简述 Majda 的证明方法. 他首先将问题视为一个具不定边界的初边值问题. 将激波边界也用一个未知函数 ϕ 来表示, 原初值问题就化成表示流动参量的向量函数 U 与表示激波的标量函数 ϕ 相耦合的方程组. 对这个方程组的线性化方程组建立一个合适的先验估计, 就成为证明的关键. 由于激波上成立的 Rankine-Hugoniot 条件并不满足 Friedrichs 在研究正对称方程组时所引入的“最大非负子空间”的要求^[20], 因此仅用局部化的处理以及常规的能量积分法不适用于这个耦合方程组. 微局部分分析就在这里发挥了作用. 利用 Kreiss 先前对双曲型方程组初边值问题的细致分析 (实际上也是一种微局部分分析)^[30], 并注意到 Rankine-Hugoniot 条件所导致的耦合方程组对于函数 ϕ 来说是微局部椭圆的, 就可以导出所需要的先验估计. 这个先验估计意味着线性化问题的稳定性. 据此, 以后的工作就是常规的了.

在文献 [31] 中 Majda 与 Thomann 还讨论了位势流方程 (1.4) 的含激波解.

在 Majda 所证明的结论中, 含激波解的存在时间 T 与激波强度有关, 即与初始资料在 Γ 两侧的跃度 $\delta = \sup |u_0^+ - u_0^-|$ 有关. 当 $\delta \rightarrow 0$ 时 $T \rightarrow 0$. 后来, Metivier^[32] 证明了含激波解的存在时间可以不依赖于初始资料的跃度, 而当 $\delta \rightarrow 0$ 时含激波解趋近于一个含弱间断的解, 也称为含声波解. 这里的声波是一个特征曲面, 在其上解连续, 但解的导数 (或某高阶导数) 有间断.

3.2 高维中心疏散波

类似于上述取具有间断初始值的 Cauchy 问题, 当初始资料满足另一类连接条件时, 会从初始资料的间断线处发出一个中心疏散波. 1989 年 Alinhac 研究了这一情形. 中心波是由一族特征面所构成的, 它们在 $t = 0$ 时会聚于承载初始资料间断的曲线 Γ . Alinhac 对初始资料要求是, 当冻结在 Γ 的每一点看原问题时, 它可以视为含一个空间变量的方程组的间断初始值问题. 这时若 Γ 两侧的资料恰可用一个中心疏散波连接, 则称这个条件为中心疏散波连接条件. 对此, Alinhac^[24] 证明了:

定理 3.2 若在初始平面 $t = 0$ 原点的邻域 $|x| < R_0$ 中有一条过原点的充分光滑的曲线 Γ , 将 Γ 两侧区域记为 $\Omega_{\pm}$, 在其上给定初始资料 $u_0^{\pm}(x) \in C^{\infty}(\Omega_{\pm}) \cap \{|x| < R_0\}$, $s_0 \geq \frac{n+3}{2}$, 在 Γ 上 u_0^-, u_0^+ 满足中心波连接条件以及 k 阶相容性条件, 其中 $k > s_0 + d + 5$, 则存在常数 $c_0 > 0$ 以及充分小的 $T > 0$, 使得在 $0 \leq t \leq T$, $|x| \leq c_0 R_0$ 中存在含中心疏散波的 H^s 解, 其中 $s < k - d$. 中心疏散波的边界为特征曲面, 它是 H^{s-1} 正则的, 且与 $t = 0$ 平面相交于 Γ .

与固壁边界的初边值问题的情形相似, 在证明上述定理时, 由于中心疏散波区域边界是特征, 法向正则性要比切向正则性差. 从而需要在类似 (2.1) 所示的空间中寻求解. 但是, 由于边界为特征, 在讨论含激波解的存在性时所利用的关于刻画边界函数方程的微局部椭圆性已不再存在. 所以在非线性叠代过程中不可避免地会出现正则性损失. 为弥补这一损失, Alinhac 使用了 Nash-Moser 叠代技巧.

相应地, 表示线性化方程解的稳定性估计也将换成 Nash-Moser 叠代法所特别要求的 tame 估计. 此外, Alinhac 还对迭代过程中的线性化算子逐次修正以保持中心波边界 (待定边界) 上连接边界条件的成立, 详见 [24].

3.3 高维接触间断

接触间断是非线性双曲守恒律方程组的第三类主要非线性波. 它又称为涡层 (vortex sheets). 这类波的特点是它本身既是特征曲面, 又是强间断面. 在多个空间变量的情形, 接触间断又有不稳定性. 所以, 高维非线性双曲守恒律方程组的含接触间断解的研究比前两种情形更为困难. Coulombel 和 Secchi [33] 于 2008 年对于两个空间变量等熵流 Euler 方程组证明了含接触间断解的存在性.

定理 3.3 给定含两个空间变量的等熵流方程组

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

设已有一个含接触间断的常态解

$$U = \begin{cases} \bar{U}^+ = {}^t(\bar{\rho}, \bar{v}, 0), & \text{若 } x_2 > 0, \\ \bar{U}^- = {}^t(\bar{\rho}, -\bar{v}, 0), & \text{若 } x_2 < 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

满足“超音速条件”

$$\bar{v} > \sqrt{2c(\bar{\rho})}. \quad (3.3)$$

对于 $T > 0$ 以及整数 $\mu \geq 6$, 初始资料 $(U_0^\pm, \phi_0)$ 取成 $U_0^\pm = \bar{U}^\pm + \dot{U}_0^\pm$, 其中 $\dot{U}_0^\pm(x_1, x_2) \in H^{2\mu+3/2}(R_+^2)$, $\phi_0(x_1) \in H^{2\mu+2}(R)$ 具有紧支集, 且满足 $2\mu+1$ 阶相容性条件. 则存在 $\delta > 0$, 使得只要

$$\|\dot{U}_0^\pm\|_{H^{2\mu+3/2}(R_+^2)} + \|\phi_0\|_{H^{2\mu+2}(R)} \leq \delta,$$

方程组 (3.1) 在时间区间 $[0, T]$ 中存在解

$$U = \begin{cases} U^+ = \bar{U}^+ + \dot{U}^+, & \text{若 } x_2 > \phi(t, x_1), \\ U^- = \bar{U}^- + \dot{U}^-, & \text{若 } x_2 < \phi(t, x_1), \end{cases} \quad (3.4)$$

其中 $\dot{U}^\pm \in H^\mu((0, T) \times R_+^2)$, $\phi \in H^{\mu+1}((0, T) \times R)$, 在 $x_2 = \phi(t, x_1)$ 两侧 U 满足方程 (3.1), 在 $x_2 = \phi(t, x_1)$ 上压力与法向速度连续, 且 $(U^\pm, \phi)$ 以 $(U_0^\pm, \phi_0)$ 为初始条件.

定理 3.3 采用了对固定的时间 T 要求初始资料的扰动充分小以保证在给定时间区间 $(0, T)$ 中解的存在性, 这实际上等价于对给定有界的扰动要求在充分小的时间区间中解的存在性. 又在文献 [33] 中为了证明的方便, 引入一个辅助函数 Φ , 将 $x_2 = \phi(t, x_1)$ 嵌入到曲面族 $\Phi = \text{const}$ 中, 这对于定理结论的叙述并无实质的影响.

证明定理 3.3 时遇到的一个新的困难是在含高维激波解的讨论中由原问题所约化出的线性双曲型方程组的初边值问题中边界上的 Kreiss-Lopatinski 条件不满足, 从而难以找到微局部对称化子. Coulombel 和 Secchi [33] 通过更细致的分析, 发现在边界上未知函数向量的法向分量满足弱 Lopatinski 条件, 从而取出非退化部分, 仍可构造微局部对称化子. 当然, Nash-Moser 叠代技巧仍是需要的, 它还是用于补偿边界为特征所造成的正则性损失, 并保持待定特征边界上连接条件所需之信息.

文献 [34] 讨论了两个空间变量非等熵流 Euler 方程组的含接触间断解的存在性. 文献 [35] 讨论了磁流体力学方程组的含接触间断解的存在性, 并研究了磁场对接触间断稳定性的影响.

3.4 各类非线性波的组合

无论是定理 3.1、3.2 还是 3.3, 都要求初始资料在间断线上满足相当高阶的相容性条件. 如果这些条件不满足, 就有可能从间断线处发出多个非线性波. 例如对含两个空间变量的 Euler 方程组 (1.1) 而言, 如果只知道初始资料在曲线 Γ 上有第一类间断, 且在两侧都是直到边界光滑的, 那么, Cauchy 问题的解一般就应含有三个非线性波. 其中两个对应于真正非线性特征, 它们可能是激波或中心疏散波; 一个对应于线性退化特征, 从而是接触间断. 可以证明, 对于将初始条件冻结在 Γ 的一点 O 上所导出的一维问题, 如果能得到稳定的含三个平坦非线性波的解 (平面激波、平面接触间断或由特征平面组成的中心疏散波), 且对于冻结问题, 定理 3.3 中的“超音速条件” (3.3) 满足, 则 (1.1) 的间断初始值问题在 O 点的邻域中存在具扇状波结构的解, 它包含三个非线性波, 分别为一维情形下三个一维非线性波的高维扰动.

对于二阶拟线性双曲型方程或 2×2 非线性守恒律方程组, 若不含线性退化特征, 则接触间断不会出现. 这时非线性波只可能是激波或中心疏散波. 关于它的具扇状波结构解的讨论可见 [32, 36–38]. 此外, 在各类应用问题中也常会遇到具扇状波结构的解. 例如, 文献 [39] 讨论了激波对光滑固壁的反射问题, 文献 [40] 证明了超音速气流越过三维薄翼时含附体激波局部解的存在性, 它们也属于具高维扰动的类一维问题的结果.

4 花状波结构: 本性高维问题

许多高维的问题并不能视为一维问题的扰动, 这类问题称为本性高维问题, 它们在各类应用问题中出现, 也因为其在应用上的重要性而备受人们所重视. 本节将例举几个重要的应用问题.

4.1 锥形体超音速绕流

对一个给定物体的超音速气流绕流问题, 是高维非线性守恒律方程组研究中一个著名的问题. 当超音速气流越过一个给定物体时, 一般在物体前方会产生激波. 当该物体具有钝前缘时, 在其前方的激波是脱体的. 而当该物体为具有尖前缘的薄翼或尖头的锥形体时, 这个激波会附在物体的尖前缘. 激波的出现对于物体周围的流场以及物体的受力状态都会产生很大的影响. 因此, 清晰地了解超音速绕流问题中在物体周围的气流的流动性态十分重要, 从而甚令人关注. 对于超音速气流越过三维薄翼的问题, 可以视为一维问题的高维扰动来处理^[40]. 但当超音速气流越过尖头锥形体时, 整个问题就不能视为一维问题的扰动. Courant 和 Friedrichs 在文献 [1] 中指出, 当超音速气流越过一个顶角小于临界角的正圆锥时, 可以用解常微分方程的打靶法确定附体激波的位置与激波后的流场. 对于一般的锥型物体, 为决定物体周围的流场, 就必须依赖于对偏微分方程边值问题的讨论. 这时, 最困难的地方就在于决定该物体头部周围的流场. 对此, 文献 [41] 对位势流方程的情形进行了讨论.

为了解锥体头部周围的激波结构, 可先讨论定常流的情形, 即不依赖时间 t 的方程. 而且, 采取极坐标系是有方便之处的. 取位于锥体内部且过锥体顶点的一直线为轴, 以 $(z, r = R/z, \theta)$ 为坐标, 其中 (z, R, θ) 为通常的极坐标, 则定常位势流方程可写为

$$z^2 a_{00} \phi_{zz} + a_{11} \phi_{rr} + a_{22} \phi_{\theta\theta} + 2z a_{01} \phi_{zr} + 2z a_{02} \phi_{z\theta} + 2a_{12} \phi_{r\theta} + a_1 \phi_r + a_2 \phi_\theta = 0, \quad (4.1)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{00} &= \left(\frac{v_3}{a}\right)^2 - 1, \quad a_{11} = \frac{(v_r - rv_3)^2}{a^2} - (1 + r^2), \quad a_{22} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{v_\theta^2}{a^2} - 1\right), \\ a_{01} &= \frac{v_3 v_r}{a^2} - r \left(\frac{v_3^2}{a^2} - 1\right), \quad a_{02} = \frac{v_3 v_\theta}{a^2 r}, \quad a_{12} = \frac{v_r v_\theta}{a^2 r} - \frac{v_\theta v_3}{a^2}. \end{aligned}$$

如将锥体的表面用 $r = b(z, \theta)$ 表示, 将激波面用 $r = s(z, \theta)$ 表示, 则物面与激波上的边界条件分别为

$$(b + zb_z)\phi_z + \frac{b_\theta}{r^2} \left(\frac{\phi_\theta}{z}\right) - (1 + b(b + zb_z)) \left(\frac{\phi_r}{z}\right) = 0, \quad (4.2)$$

$$\left(\left(\frac{\phi_r}{z}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\phi_\theta}{z}\right)^2 + \left(\phi_z - \frac{r\phi_r}{z} - q_\infty\right) \left(\phi_z - \frac{r\phi_r}{z}\right)\right) H - \left(\phi_z - \frac{r\phi_r}{z} - q_\infty\right) q_\infty \rho_\infty = 0. \quad (4.3)$$

在方程 (4.1) 中二阶导数前有退化因子, 它来源于尖锥顶的奇性. 这个奇性与原本具有的非线性、不定边界等因素的联合造成新的困难. 文献 [41] 利用部分速度图变换与区域分解及非线性交替迭代相结合的方法证明了如下的结论, 其部分想法在文献 [42] 中已用到.

定理 4.1 设锥体的表面由 $r = b(z, \theta)$ 给定, $q_\infty, a_\infty, p_\infty$ 和 ρ_∞ 分别表示来流的速度、音速、压力与密度, 若以下条件满足:

- (1) $q_\infty > a_\infty (\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty})^{1/2}$,
- (2) $\min b(0, \theta) \leq b_0$, 其中 b_0 是由 $q_\infty, p_\infty, \rho_\infty$ 决定的临界值,
- (3) $\partial_z^k b(0, \theta) = 0$ ($1 \leq k \leq k_1$), 以及 $\|b(0, \theta) - b_0\|_{C^{k_2}} \leq \epsilon_0$ 对适当的 $\epsilon > 0$ 与整数 k_1 和 k_2 成立,

则对锥体的超音速绕流问题存在一个弱熵解, 它具有附着于顶点的锥状激波.

在物理空间中观察所考虑问题的图象. 从锥体顶点发出两个锥形面, 含在里面的为原锥体的表面, 包在外面的为激波面. 整体形状如同含两个花瓣的花朵, 故称这样的波结构为**花状波结构**. 当方程含多重特征面, 或所涉及到的物面更复杂时, 花状波结构的形态也更丰富.

当头部的含附体激波解获得后, 即可进一步讨论该解及相应激波的发展, 从而在对锥体的适当假定下得到在全空间中整体解的存在性以及其渐近性态^[43, 44].

4.2 激波反射

高维非线性守恒律方程组研究中另一个著名的问题是激波对斜坡的反射问题. 在行进中的激波遇到一个障碍物时, 会被物体反射. 如果该障碍物的表面是光滑的, 文献 [39] 获得了激波反射问题局部解的存在性. 当该障碍物的表面非光滑时, 情形就相当复杂. 激波对斜坡的反射问题是由此抽象出来的一个典型问题. 考虑两个空间变量的情形, 当一个平面激波沿水平方向前进, 遇到一个斜坡时就会被斜坡反射. 不同角度的斜坡会导致截然不同的反射图象. 设激波前后的流体状态为常态, 斜坡也是平面斜坡, 又以激波到达斜坡足的时刻为 $t = 0$ 时刻, 则将整个问题在用偏微分方程的边值问题描述时, 它在伸缩变换 $t \rightarrow \alpha t$, $x \rightarrow \alpha x$, $y \rightarrow \alpha y$ 下保持不变. 故问题的解也应在这一变换下不变, 这样的解称为自模解 (或自相似解). 如果该自模解中含有若干非线性波 (例如表现为一些间断面), 则这些波随时间增加而不断扩展. 在时空的乘积空间中就可得到花状波结构.

为得到自模解, 可以引入变量 $\xi = x/t$, $\eta = y/t$, 从而将问题化为以 (ξ, η) 为变量的低一维问题. 这样的问题称为拟定常问题, 因为在问题中变量 t 已不明显地出现. 通过变换将问题中的自变量个数减少一个, 自然会带来不少的便利, 但其代价是必须考虑问题的整体解. 而且, 非线性守恒律方程组 (1.1) 是双曲型的, 而通过引入自相似坐标所诱导出的新方程 (或方程组) 一般是混合型的. 关于这一点我们

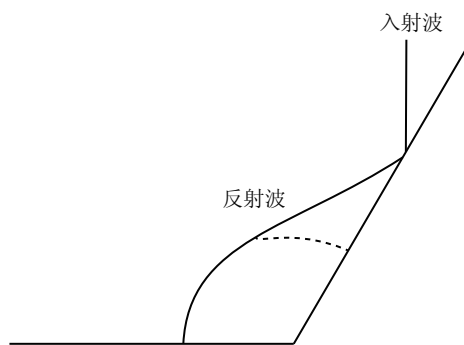


图 1 正则反射

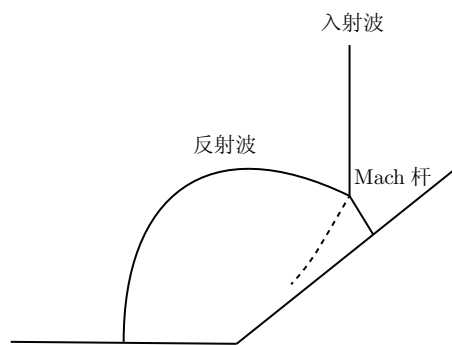


图 2 Mach 反射

在第 5 节中将做进一步的说明.

回到平面激波被斜坡反射的问题. 设一个与水平面垂直的平面激波自左向右行进, 在 $t = 0$ 时刻遇到一个倾角为 θ 的斜坡. 则当 θ 接近于 $\frac{\pi}{2}$ 时, 反射波从平面激波与斜坡的交点发出, 然后弯曲至水平面并与水平面垂直相交. 反射激波面构成一个鼓包, 这个鼓包将随时间行进而不断扩大并保持形状不变. 这样的波结构称为正则反射 (见图 1). 相反, 当斜坡倾角 θ 较小时, 入射平面激波与反射波的交点就不在斜坡上, 而要通过另一个称为 Mach 杆的激波与斜坡相连接. 此外在激波、反射波与 Mach 杆的三叉交点后面还会有一个附加的接触间断. 这样的反射模式称为 Mach 反射 (见图 2), 而前述的激波、反射波、Mach 杆加一个接触间断的波结构称为 Mach 结构^[45]. 这样的结构在实验和计算中都得到了验证, 但是理论上的证明一直是空缺的. 数学家们首先试图在一般 Euler 方程组 (1.1) 的各种简化模型中证明上述结论. 例如 Keyfitz 等作者^[46, 47] 以不定常跨音速小扰动方程 (UTSD 方程)

$$\begin{cases} u_t + uu_x + v_y = 0, \\ u_y - v_x = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

为模型证明了激波正则反射问题的解的存在性. 最近, Chen 与 Feldman 等作者^[48, 49] 以位势流方程 (1.4) 为模型证明了激波正则反射问题的解的存在性:

定理 4.2 对于一个给定的一致超音速来流, 可以找到角度 θ_c 与常数 $\alpha > 0$, 使得当斜坡倾角 $\theta_w \in (\theta_c, \frac{\pi}{2})$ 时, 方程 (1.4) 具有一个整体自模解, 它具有激波正则反射的波结构; 此解在斜坡上满足固壁边界条件, 在激波面上满足 Rankine-Hugoniot 条件与熵条件. 这个解是整体 $C^{1,\alpha}$ 正则的, 在激波与音速线外是 C^∞ 的. 此外, 当 $\theta_w \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, 该问题的解趋近于正激波问题的解.

对于 Mach 反射问题, 至今尚无整体解存在性的结果. 从解的局部结构来看, 对于定常流与拟定常流都可以证明这样结构的稳定性. 文献 [50–52] 已证明了如下的结论.

定理 4.3 在 (x, y) 平面上, 若有一个平坦的 Mach 结构, 即从一点发出的入射激波 S_1 、反射激波 S_3 、Mach 杆 S_2 以及接触间断 D 均为直线, 波前状态 U_0 、入射波与反射波间的状态 U_1 以及入射波与 Mach 杆间的状态 U_2 都是常态, 且 U_0 为超音速流; 若 $\tilde{U}_0$ 与 $\tilde{S}_1$ 为 U_0 与 S_1 的非平坦扰动, 则只要 $\|\tilde{U}_0 - U_0\|_{C^{2+\alpha_0}} < \epsilon$, 整个 Mach 结构仍保持, 且存在 $C > 0, 0 < \alpha < \alpha_0$, 使扰动后的反射激波 $\tilde{S}_3$ 、激波杆 $\tilde{S}_2$ 、接触间断 $\tilde{D}$ 满足

$$\|\tilde{\phi}_i(x) - \phi_{i0}x\|_{C^{2,\alpha}} < C\epsilon,$$

其中 $\tilde{\phi}_i(x)$, $\phi_{i0}x$ 分别为表示曲线 $\tilde{S}_3, \tilde{S}_2, \tilde{D}$ 以及 S_3, S_2, D 的函数. 在相应区域中的流动参量 $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$ 的扰动满足

$$\|\tilde{U}_i - U_i\|_{C^{1+\alpha}} < C\epsilon.$$

在以上定理中流体扰动的表达方式以及定理的证明可参见有关文献, 这里从略. 需特别说明的是, 在反射激波 $\tilde{S}_3$ 的流动状态可以是超音速的, 也可以是亚音速的. 据此, 可以将 Mach 结构分成椭圆 - 椭圆型 (E-E 型) 结构与椭圆 - 双曲型 (E-H 型) 结构. 而在后一种结构的稳定性的证明中会涉及到非线性混合型方程的研究.

4.3 高维 Riemann 问题

在第 1 节中已说到, 在含一个空间变量的非线性守恒律方程组的研究中, Riemann 问题是最基本和重要的问题, 它的特点是初始资料在原点两侧取不同的常状态, 从而在伸缩变化下不变. 高维 Riemann 问题的初始资料也应该是在伸缩变换下不变的. 以两个空间变量的情形为例, 若初始平面可以分成若干个角状区域, 且初始资料在这些角状区域中为不同的常状态, 则这样的初值问题就称为高维 Riemann 问题.

例如, 类似于一个空间变量的情形, 我们可以提出寻求含变量 t, x, y (不依赖变量 z) 的方程组 (1.1) 的 Riemann 问题, 即寻求它满足初始条件

$$U(0, x, y) = U_{0i}, \quad \text{若} \quad \frac{2(i-1)}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{2i}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi, \quad (4.5)$$

的解, 其中 U_{0i} 为常值向量, $\theta = \arctan y/x$. 在原点影响区域以外的地方, 这个 Riemann 问题局部地可视为一个含单个空间变量的方程组的初始值问题, 它会产生一些平行的非线性波. 于是, 在不同方向上来自无穷远处的各类非线性波会相交或相互干扰, 整体的波结构就会十分复杂. 对这样的问题首先想到的就是求其自模解. 这个解在时空空间中必定是具有花状波结构的解. 高维 Riemann 问题虽然早就引起人们的注意 (如文献 [53]), 但目前还没有一个一般的处理办法, 仅在很特殊的情形下能获得解的存在性.

一个特殊的情形是在楔形区域中气体向真空的扩散. 若初始时刻在一个楔形区域中有静止的常态气体, 在该楔形区域外为真空, 在 $t = 0$ 时抽去区域的边界, 则气体就往真空中扩散^[54]. 这个问题也被称为水坝坍塌问题 (dam-collapse problem), 在一个楔形的水库中存放的水在水坝突然全部坍塌时, 水流就流向水库外. 因为浅水波方程与向真空扩散的气体所服从的 Euler 方程相似, 故上述两问题实质相同. 由于一维情形下静止常态气体向真空的扩散可以用单个完整的中心疏散波表示, 所以当楔形区域的边界被突然抽去时, 我们遇到的只是两个中心疏散波的相互作用, 这就使问题比一般的二维 Riemann 问题大大简化了. 一般的二维 Riemann 问题在求自模解时会遇到部分区域双曲、部分区域椭圆的混合型方程, 而真空区域的出现使得椭圆区域退缩为一点, 从而只需考虑一个纯双曲的问题. Li 和 Zheng 在文献 [55] 中证明了这一问题解的存在性, 并对解的性质以及特征分布作了深入的分析. 他们还由此发展了特征分解方法, 它将是处理拟定常问题的一个有用的工具.

另一个特殊情形是 Chaplygin 气体的二维 Riemann 问题. 状态方程为 $p = a - \frac{1}{\rho}$ 的气体称为 Chaplygin 气体, 由于该气体特殊的状态方程, 它的中心疏散波退化为零宽度的非线性波, 恰如具备反向跃度的激波. 文献 [56, 57] 对 Chaplygin 气体的 Euler 方程组的二维 Riemann 问题进行了详细的研究. 此时, 在椭圆区域外诸非线性波的相互作用可以用代数方法全部定出. 于是, 问题进一步就化成一个退化椭圆方程的 Dirichlet 问题. 文献 [57] 在等熵的条件下给出了 Chaplygin 气体 Euler 方程组的二维 Riemann 问题各种情形下非线性波的全部结构.

Riemann 问题的特点是它的初始资料在各个扇形区域中解取为常值. 如果在初始平面上允许某些区域为禁止流体进入的固体, 并在 $t > 0$ 时保持如此, 则可得到一个初边值问题, 并可考虑它的自模

解. 这样的初边值问题称为 **Riemann 初边值问题**. 我们发现, 很多物理上重要的边值问题也可以视为 Riemann 初边值问题来考虑. 例如, 在 (t, x, y) 空间中讨论以 (1.4) 描写的流动. 若给定 θ_0 为在 $(0, \pi/2)$ 中的一个角度, 给出 (1.4) 的初始资料为

$$U = \begin{cases} U_0 = (u_0, 0, \rho_0), & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \\ U_1 = (0, 0, \rho_1), & \theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (4.6)$$

而 $-\pi < \theta < \theta_0$ 为流体禁入区域. 又要求状态 U_0, U_1 可决定一个向右的激波, 则 (1.4) 在区域 $(0, \infty) \times \{\theta_0 < \arctan(y/x) < \pi\}$ 中的初边值问题就可用以描述运动激波被斜坡反射的问题. 但是, 形式为 (1.4), (4.5) 的初边值问题可包含更丰富的内容. 例如, 若 θ_0 为小于零的一个角度, 就导致运动激波绕一个凸角的问题. 又如, 若在 $t = 0$ 时的状态 U_0, U_1 可决定一个向右的疏散波, 就得到疏散波被斜坡反射或疏散波绕射凸角的问题. 这些都是很值得研究的问题.

Elling 和 Liu^[58] 研究了一个运动的楔冲击静止气体的问题. 给定一个无限延伸的尖楔, 在 $t = 0$ 时刻它突然以一个恒定的速度冲向静止的常态气体, 则在楔的外方会产生一个激波. 如果楔的运动速度是超音速, 则在其顶角不超过一个临界值时, 这个激波必定是附体激波. 利用相对运动的观点, 将楔视为静止, 它所占的区域为气体禁入区, 而在初始时刻给其周围气体一个速度 (与前面所说的楔的速度绝对值相同, 方向相反), 即可得到相同的运动与周围的非线性波结构. 故这个问题也可视为 Riemann 初边值问题, 文献 [58] 建立了此 Riemann 初边值问题解的存在性.

5 整体弱解与混合型方程

高维非线性守恒律方程组理论的进一步发展依赖于对混合型方程的深入研究. 首先我们指出, 混合型方程的出现在高维非线性守恒律方程组的研究中是不可避免的. 以含两个空间变量的位势流方程 (1.4) 为例, 在自模坐标变量 $\xi = x/t, \eta = y/t$ 下, 方程 (1.4) 可以写为

$$(c^2 - (\phi_\xi - \xi)^2)\phi_{\xi\xi} - 2(\phi_\xi - \xi)(\phi_\eta - \eta)\phi_{\xi\eta} + (c^2 - (\phi_\eta - \eta)^2)\phi_{\eta\eta} = 0, \quad (5.1)$$

其中 ϕ 是速度势, $(\phi_\xi, \phi_\eta) = (u, v)$. 容易计算得该方程的判别式为 $\Delta = c^2(c^2 - (u - \xi)^2 - (v - \eta)^2)$, 因此当 $c^2 > (u - \xi)^2 + (v - \eta)^2$ 时方程为椭圆型, 而当 $c^2 < (u - \xi)^2 + (v - \eta)^2$ 时方程为双曲型. 所以, 在离原点很远处方程必为双曲型, (ξ, η) 全平面上, 又总能找到点使在该点 $(u, v) = (\xi, \eta)$, 从而在这点附近方程为椭圆型. 于是, 在全平面上方程 (5.1) 为混合型.

对于描述定常流的方程组, 当速度为超音速时该方程组为双曲型, 当速度为亚音速时, 方程组就含有两个虚特征, 从而可称为双曲 - 椭圆型. 在设法撇去流特征后就得到混合型方程.

在上节中遇到的激波被斜坡反射的问题就会导致混合型方程的边值问题. 幸运的是, 在正则反射问题中, 在双曲区域的流动可以从 Rarline-Hugoniot 条件出发用代数方法确定诸流动参量以及音速线的位置. 于是, 混合型方程的边值问题就简化成了一个退化椭圆型方程的边值问题. 但是, 如果讨论疏散波被斜坡的反射, 就必须整体地考虑非线性混合型方程的求解. 这时, 变型线的位置是待定的, 且在变型线附近的双曲区域中特征分布呈现从横截到相切的复杂现象^[59].

下面, 我们再介绍几个重要的物理问题, 从数学的角度对它们讨论时都涉及到定常跨音速流或混合型方程, 且在变型线附近的性态各具特点 (亦参见 [60]).

5.1 E-H 型 Mach 反射

如上节中提到的, 在出现 Mach 结构的激波反射问题中, 根据反射激波后气体速度是亚音速还是超音速可以将 Mach 反射分为 E-E 型与 E-H 型两种, 在 E-H 型 Mach 反射的研究中会碰到混合型方程. 对于含两个变量的定常流或拟定常流来说, 在 E-H 型的 Mach 结构中接触间断线的位置虽然是未知的, 却可以通过 Lagrange 变换将它变成坐标线. 在设法撇除流特征后, 用以描述气体运动的方程就可化为一个二阶非线性混合型方程. 由于接触间断线上流动参量有间断, 所以这个混合型方程的系数也是有间断的. 在变型线上未知函数满足由 Rankine-Hugoniot 条件所导出的连接条件. 有意思的是, 这个非线性混合型方程的线性化方程恰是 Lavrentiev-Bitsadze 方程

$$\operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5.2)$$

后者最早由 Lavrentiev 与 Bitsadze 引入, 它本是为研究混合型方程而设计的一个模型方程, 现在恰在实际的物理问题研究中发现了它的应用. 关于定常 E-H 型 Mach 结构的稳定性已在文献 [52] 中得到了证明.

5.2 de Laval 喷管

de Laval 喷管 (见图 3) 是工程与实验中用于生成超音速气流的装置. 这个喷管两头粗、中间细. 气流从一端进而从另一端出. 已知亚音速气流在行进中通道变窄会促使速度增加, 而超音速气流则恰好相反, 它在行进中通道变窄会促使速度降低, 而通道变宽会促使速度增加. 于是, 如果在适当管道形状的设计以及来流速度的控制下, 在入口处的亚音速流可以在喷管的喉部处气体速度恰好达到音速, 然后在管道再扩张时转化为超音速流. 在管道中形成的超音速流有可能一直流向出口处而直接喷出, 也有可能在某些条件下生成一个激波, 在越过此激波后再次变为亚音速流从出口处喷出. 在文献 [1] 中, Courant 和 Friedrichs 又作了这样的猜测: 在入口处一定的速度范围内, 可以用出口处的压强来控制管道内的流动. 使得经过喉部的超音速流又会生成一个激波, 在越过激波后变为亚音速流并在到达出口处流体的压强等于所控制的压强. 此外, 在出口处的压强变化可用来控制流管中激波的位置.

已有很多作者关心于这个问题, 并展开了一系列的研究, 参见 [61–63]. 局限在超音速段来看, 文献 [64–66] 已经证明, 用出口处的压强确实可以控制超音速段气体所产生的激波位置. 此时, 管道不断扩张的特点是至关重要的. 但由于在 de Laval 喷管的喉部流动是跨音速的, 故为了整体地了解在 de Laval 喷管中的流动并最终证明文献 [1] 中的猜测, 必须讨论混合型方程的求解并详细研究解在变型线附近的性质.

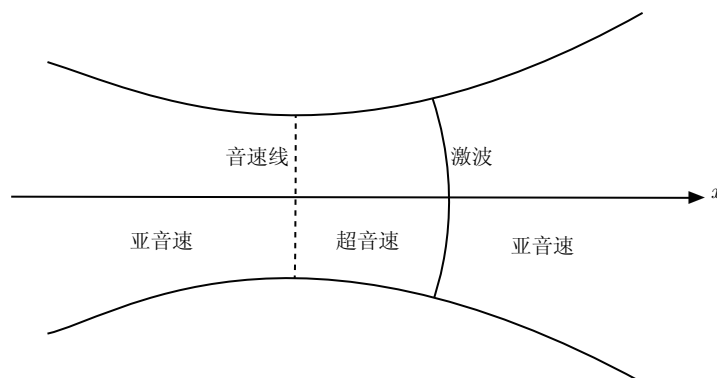


图 3 de Laval 喷管

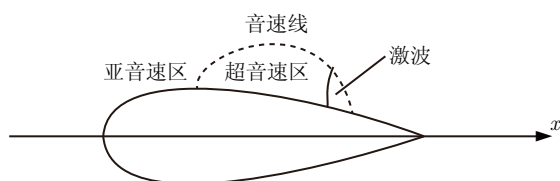


图 4 机翼的跨音速绕流

5.3 机翼的跨音速绕流问题

考察机翼的绕流问题 (见图 4). 当来流是亚音速时, 在机翼头部一般不会产生激波. 但即使来流是亚音速的, 由于物体表面的弯曲, 在表面附近流速一般会增大. 于是, 若无穷远处未被扰动的常态气流速度较小, 则可能在被绕流的物体的整个区域中都是亚音速气流. 相反, 若来自无穷远处的气流速度较接近于音速, 则在物体表面就有可能出现超音速的区域. 从而在物体的整个外部区域中的流动是跨音速的^[67]. 对于前一种情形, 描述流动的方程是椭圆型的, 其解的存在性、唯一性等问题已被解决. 对于后一种情形, 需要用混合型方程来描述流动, 问题就复杂得多. Morawetz^[68, 69] 进行了深入的研究后指出, 在机翼的两个侧面出现超音速区域时, 整体光滑的流动是不稳定的, 从而实际上不可能出现. 一个猜测是, 在超音速区域的后方可能还会出现一个激波, 气体越过这个激波后重新回到亚音速状态. 这种情况似与 de Laval 喷管的情形有些相似. 但是, 由于在本问题中未知的音速线还将与未知的激波相交, 因而其讨论更为困难.

基于流动的细致结构的复杂性, Morawetz^[70] 建议先不讨论音速线与激波的位置, 而在 L^∞ 空间中寻求弱解, 这时补偿紧的方法将发挥其作用. 文献 [71] 从粘性消失法出发对此作了尝试, 在关于近似解的流速与流向角的一致有界的假设条件下得到了熵解的存在性.

5.4 钝头超音速绕流问题

在超音速气流绕流问题中, 当障碍物是钝头体时在障碍物前方生成的激波是脱体激波 (见图 5). 设来流是均匀的超音速气流 (相当于物体以特定的超音速在静止的气体中运动). 由于在正前方来流与激波面接近于垂直, 故激波后必定为亚音速流. 另一方面, 由于实际被绕流的物体都是有限的, 所以在离物体较远处, 激波与来流的夹角就很小, 从而越过激波气流受到影响不大, 故仍保留为超音速. 于是, 在激波与物体表面之间的整个区域中存在一个跨音速气流, 它需要用混合型方程来刻画. 此外, 在这个问题中脱体激波与音速线的位置都未知, 它们只能在求解的过程中得知. 于是, 在这一问题中集中了非线性、不定边界、方程类型的转换、整体求解等诸困难因素的综合. 对于这样的问题, 尽管在应用上

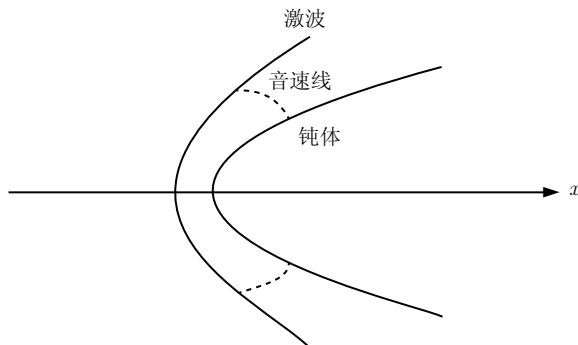


图 5 钝头超音速绕流

十分重要, 但至今只有计算与实验的结果. 理论上关于解的存在性等结果尚是空白的.

6 结语

总之, 高维非线性守恒律方程组的研究, 虽已取得了很大的进展, 就整体来说尚不成熟. 其局部经典解的理论已经建立, 而在弱解理论的研究中, 关于局部解的理论与非线性波的结构成果距完备尚相差很远. 虽然关于具扇状波结构的解的研究已渐趋完整, 但对于具花状波结构的解的研究才刚刚开始. 进一步的研究强烈地依赖于对非线性混合型方程的了解, 这可能是最困难也是最被期望取得突破的难题.

参考文献

- 1 Courant R, Friedrichs K O. Supersonic Flow and Shock Waves. New York: Interscience, 1948
- 2 Lax P D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm Pure Appl Math*, 1954, 7: 139–193
- 3 Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws. *Comm Pure Appl Math*, 1957, 10: 537–566
- 4 Oleinik O. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *Uspekhi Mat Nauk*, 1957, 12: 3–73
- 5 Lax P D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. Philadelphia: SIAM, 1973
- 6 Gu C H, Li T T, Hou Z Y. The Cauchy problem of hyperbolic systems with discontinuous initial values I, II, III. *Acta Math Sin*, 1961, 4: 314–323; 1962, 5: 132–143
- 7 Li T T, Yu W C. Some existence theorems for quasilinear hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables, I, II. *Sci Sin*, 1964, 4: 529–550, 551–562
- 8 Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm Pure Appl Math*, 1965, 18: 697–715
- 9 Diperna Ronald J. Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics. *Comm Math Phys*, 1983, 91: 1–30
- 10 Ding X, Chen G Q, Luo P. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for the isentropic gas dynamics, I, II, III. *Acta Math Sci*, 1985, 5: 483–500; 1985, 5: 501–540; 1987, 7: 467–480
- 11 Lions P L, Perthame B, Souganidis P. Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates. *Comm Pure Appl Math*, 1996, 49: 599–630
- 12 Lions P L, Perthame B, Tadmor E. Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p -systems. *Comm Math Phys*, 1994, 163: 415–431
- 13 Bressan A, Crasta G, Piccoli B. Well-posedness of the Cauchy Problem for $n \times n$ Systems of Conservation Laws. *Mem Amer Math Soc*, 694. Providence, RI: Amer Math Soc, 2000
- 14 Bressan A, Liu T P, Yang T. L^1 stability estimates for $n \times n$ conservation laws. *Arch Ration Mech Anal*, 1999, 149: 1–22
- 15 Bianchini S, Bressan A. Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems. *Ann Math*, 2005, 161: 223–342
- 16 Majda A. One perspective on open problems in multi-dimensional conservation laws. *IMA Math Appl*, 1991, 29: 217–237
- 17 Liu T P. Shock theory. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2002*, vol. 3. Beijing: Higher Education Press, 2003, 185–188
- 18 Chen S X. Study of multidimensional systems of conservation laws: Problems, difficulties and progress. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010*, vol. 3. Singapore: World Scientific, 2011, 1884–1900
- 19 Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. New York: Interscience, 1962
- 20 Friedrichs K O. Symmetric positive linear differential equations. *Comm Pure Appl Math*, 1958, 11: 333–418
- 21 Chen S X. On the initial-boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic system and their applications. *Chin Ann Math*, 1980, 1: 511–521
- 22 Chen S X. On the initial-boundary value problems for the quasilinear symmetric hyperbolic system with characteristic boundary. *Chin Ann Math*, 1982, 3: 223–232 (Chinese version); *Front Math China*, 2007, 2: 87–102 (translated English)

- version)
- 23 Secchi P. Well-posedness of characteristic symmetric hyperbolic systems. *Arch Ration Mech Anal*, 1996, 134: 155–197
 - 24 Alinhac S. Existence d'ondes de rarefaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. *Comm Partial Differential Equations*, 1989, 14: 173–230
 - 25 Agemi R. The initial boundary value problem for inviscid barotropic fluid motion. *Hokkaido Math J*, 1981, 10: 156–182
 - 26 Ebin D G. The initial-boundary value problem for subsonic fluid motion. *Comm Pure Appl Math*, 1979, 32: 1–19
 - 27 Ohno M, Shizuta Y, Yanagisawa T. The initial boundary value problem for linear symmetric hyperbolic system with characteristics of constant multiplicity. *J Math Kyoto Univ*, 1995, 35: 143–210
 - 28 Sideris T. Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids. *Comm Math Phys*, 1985, 101: 475–485
 - 29 Majda A. The Stability of Multi-dimensional Shock Front. *The Existence of Multi-dimensional Shock Front*. Mem Amer Math Soc, 275, 281. Providence, RI: Amer Math Soc, 1983
 - 30 Kreiss H O. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm Pure Appl Math*, 1970, 23: 277–298
 - 31 Majda A, Thomann E. Multi-dimensional shock fronts for second order wave equations. *Comm Partial Differential Equations*, 1987, 12: 777–828
 - 32 Metivier G. Stability of multi-dimensional weak shocks. *Comm Partial Differential Equations*, 1990, 15: 983–1028
 - 33 Coulombel J-F, Secchi P. Nonlinear compressible vortex sheets in two space dimensions. *Ann Sci Ec Norm Super*, 2008, 41: 85–139
 - 34 Morando A, Trebeschi P. Stability of contact discontinuities for the nonisentropic Euler equations in two-space dimensions. *Hyperbolic problems: theory, numerics, applications*. Berlin: Springer, 2008, 1053–1060
 - 35 Chen G-Q, Wang Y G. Existence and stability of compressible current vortex sheets in three-dimensional magnetohydrodynamics. *Arch Rat Mech Anal*, 2007, 187: 369–408
 - 36 Mnif M. Probleme de Riemann pour une loi conservation scalaire hyperbolique d'ordre deux. *Comm Partial Differential Equations*, 1997, 22: 1589–1627
 - 37 Metivier G. Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation en dimension deux d'espace. *Trans Amer Math Soc*, 1986, 296: 431–479
 - 38 Li D. Rarefaction and shock waves for multi-dimensional hyperbolic conservation laws. *Comm Partial Differential Equations*, 1991, 16: 425–450
 - 39 Chen S X. On reflection of multidimensional shock front. *J Differential Equations*, 1989, 80: 199–236
 - 40 Chen S X. Existence of local solution to supersonic flow around a three dimensional wing. *Adv Appl Math*, 1992, 13: 273–304
 - 41 Chen S X. Existence of stationary supersonic flows past a pointed body. *Arch Rat Mech Anal*, 2001, 156: 141–181
 - 42 Chen S X, Li D N. Supersonic flow past a symmetric curved cone. *Indiana Univ Math J*, 2000, 49: 1411–1435
 - 43 Lien W C, Liu T P. Nonlinear stability of a self-similar 3-D gas flow. *Comm Math Phys*, 1999, 304: 524–549
 - 44 Chen S X, Xin Z P, Yin H C. Global shock waves for the supersonic flow past a perturbed cone. *Comm Math Phys*, 2002, 228: 47–84
 - 45 Ben-Dor G. *Shock Waves Reflection Phenomena*, 2nd ed. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2007
 - 46 Canic S, Keyfitz B, Lieberman G M. A proof of existence of perturbed steady transonic shocks via a free boundary problem. *Comm Pure Appl Math*, 2000, 53: 484–511
 - 47 Canic S, Keyfitz B, Kim E H. A free boundary problem for a quasilinear degenerate elliptic equation: regular reflection of weak shocks. *Comm Pure Appl Math*, 2002, 55: 71–92
 - 48 Chen G Q, Feldman M. Global solution to shock reflection by large-angle wedges for potential flow. *Ann Math*, 2010, 171: 1067–1182
 - 49 Bae M, Chen G Q, Feldman M. Regularity of solutions to regular shock reflection for potential flow. *Invent Math*, 2009, 175: 505–543
 - 50 Chen S X. Stability of a Mach Configuration. *Comm Pure Appl Math*, 2006, 59: 1–33
 - 51 Chen S X. Mach configuration in pseudo-stationary compressible flow. *J Amer Math Soc*, 2008, 21: 63–100
 - 52 Chen S X. E-H type Mach configuration and its stability. *Comm Math Phys*, 2012, 315: 563–602
 - 53 Zhang T, Zheng Y. Conjecture on the structure of solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics systems. *SIAM J Math Anal*, 1990, 21: 593–619
 - 54 Suchkov V A. Flow into a vacuum along an oblique wall. *J Appl Math Mech*, 1963, 27: 1132–1134
 - 55 Li J Q, Zheng Y. Interaction of rarefaction waves of the two-dimensional self-similar Euler equations. *Arch Rat Mech Anal*, 2009, 193: 623–657
 - 56 Serre D. Multidimensional shock interaction for a Chaplygin gas. *Arch Ration Mech Anal*, 2009, 191: 539–577
 - 57 Chen S X, Qu A F. Two dimensional Riemann problems of Euler system for the Chaplygin gas. *SIAM Math Anal*,

- 2012, 44: 2146–2178
- 58 Elling V, Liu T P. Supersonic flow onto a solid wedge. *Comm Pure Appl Math*, 2008, 61: 1347–1448
- 59 Li J Q, Zheng Y. Semi-hyperbolic patches of solutions to the two-dimensional Euler equations. *Arch Ration Mech Anal*, 2011, 201: 1069–1096
- 60 Chen S X. Mixed type equation in Gas Dynamics. *Quat Appl Math*, 2010, 68: 487–511
- 61 Chen G Q, Feldman M. Multidimensional transonic shocks and free boundary problems for nonlinear equations of mixed type. *J Amer Math Soc*, 2003, 16: 464–491
- 62 Xin Z P, Yin H C. Transonic shock in a nozzle I: Two-dimensional case. *Comm Pure Appl Math*, 2005, 58: 999–1050
- 63 Chen S X. Transonic in 3-D compressible flow passing a duct with a general section for Euler systems. *Trans Amer Math Soc*, 2008, 360: 5265–5289
- 64 Chen S X. Compressible flow and transonic shock in a diverging nozzle. *Comm Math Phys*, 2009, 289: 75–106
- 65 Li J, Xin Z P, Yin H C. The existence and monotonicity of a three-dimensional transonic shock in a finite nozzle with axisymmetric exit pressure. *Pacific J Math*, 2010, 247: 109–161
- 66 Li J, Xin Z P, Yin H C. On transonic shocks in a conic divergent nozzle with axisymmetric exit pressures. *J Differential Equations*, 2010, 248: 423–469
- 67 Bers L. *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1958
- 68 Morawetz C S. On the non-existence of continuous transonic flows past profiles I, II, III. *Comm Pure Appl Math*, 1956, 9: 45–68; 1957, 10: 107–131; 1958, 11: 129–144
- 69 Morawetz C S. On a weak solution for a transonic flow problem. *Comm Pure Appl Math*, 1985, 38: 797–818
- 70 Morawetz C S. On steady transonic flow by compensated compactness. *Meth Appl Anal*, 1995, 2: 257–268
- 71 Chen G Q, Slemrod M, Wang D. Vanishing viscosity method for transonic flow. *Arch Ration Mech Anal*, 2008, 189: 159–188

Multidimensional nonlinear systems of conservation laws

CHEN ShuXing

Abstract In this paper, we review the history and progress of the study in the field of multidimensional nonlinear systems of conservation laws. The course of the study can be described as local classical solutions, solutions with fan-shaped wave structure, solutions with flower-shaped wave structure, global solutions and mixed type equations. According to this line, we introduce main results obtained in recent decades, and present some open problems and difficulties.

Keywords conservation laws, free boundary value problem, shock, transonic flow, hyperbolic equation, mixed type equation

MSC(2010) 35L65, 35L67, 35L60, 35M10

doi: 10.1360/012012-490