完全保持能量守恒的可压缩流体时-空差分格式和协调的分解算法

曾庆存　张学洪
（中国科学院大气物理研究所）

摘　要

本文通过坐标变换法或变量变换法对原始方程进行了变换，最终设计出一些完全保持总能量守恒和总质量守恒等整体性质的时-空差分格式，从而完全解决了计算稳定性问题.

文中还提出了一种协调的分解算法，其中只需逐个求解一维空间非定常问题，就可以构造出完全保证计算稳定性且使用非常经济的追赶公式求解，使计算量大大减少，便于在日常工作中应用.

用差分法或者谱展开法来求各种数学物理方程的近似解时，计算稳定性和计算准确性是两大基本问题. 但只有当具有计算稳定性时才能谈得上计算的准确度问题，所以，计算稳定性问题显得非常突出.

一般说来，如果原来适定的数学物理方程的整体性质，在计算格式中仍然成立，则才有计算稳定性. 在理想流体动力学方程中，有能量守恒等这些整体性质，已被广泛地用来设计计算格式. 可以证明：能量守恒（严格地说是平方守恒）是保证计算稳定性的充分性条件. 但对可压缩流体（例如正压和斜压大气原始方程）来说，目前国内外已发表的格式都只能保证瞬时能量守恒，一当再沿时间作差分时，都不能保证具有完全的能量守恒. 因而计算稳定性问题没有完全解决. 曾庆存和季仲贞等[1—3]指出，对于一维平流方程（或称激波方程）和二维不可压流体的涡度方程的格式，只要不具有完全能量守恒或能量衰减的性质，都可以找到一些计算不稳定的特解，即使具有瞬时能量守恒性质的 Lilly 格式和 Arakawa 格式也不例外（如果时间方向用中央差分的话）. 由此看来，设计完全保持能量守恒的时-空差分格式是非常重要和很值得研究的问题. 事实上，只要充分分析原物理问题的能量守恒方程的推导过程，我们是可以找到设计这种格式的途径的[4]. 在这基础上，我们得到了对任何初始场都能严格保持能量守恒的时-空差分格式，从而完全解决了计算稳定性问题.

一、坐标变换法

先从正压大气原始方程说起：

本文 1980 年 12 月 11 日收到.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}+fv, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial \phi}{\partial y}-fu, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial \phi u}{\partial x}+\frac{\partial \phi v}{\partial y}=0, \tag{3}$$

其中符号均为一般常用的. 为简单起见，设边界为 $x=0$, L_1 和 $y=0$, L_2, 并设在边界上有刚壁条件. 这时(1)—(3)式具有能量守恒和质量守恒:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\phi\left(\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{\phi}{2}\right)dxdy=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\phi dxdy=0. \tag{5}$$

在(4)式中，被积函数有一个因子 $\phi(x, y, t)$，它使按常法来设计差分格式时，不能保证有完全的能量守恒. 曾庆存[1)]在 1964 年曾提出坐标变换法来克服这个困难，并由此设计了一种保证完全能量守恒的格式. 今先对该法作一介绍，设新坐标为:

$$\xi=\xi(x, y, t), \quad \eta=\eta(x, y, t), \quad \tau=t. \tag{6}$$

满足 $\partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)=M\phi^{-1}$, 或即

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}=\phi/M, \tag{7}$$

并设

$$\begin{cases}\xi(0, y, t)=0, & \xi(L_1, y, t)=1,\\ \eta(x, 0, t)=0, & \eta(x, L_2, t)=1,\end{cases} \tag{8}$$

则(4)式变为:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{\phi}{2}\right)d\xi d\eta=0. \tag{9}$$

(注意: 因 ϕ 为正，故由(7)式可知，$|\partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)|=\partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)$.)

今取

$$\xi(x, y, t)=\int_0^x\frac{\phi}{\Phi}dx, \quad \eta=\int_0^y\frac{\Phi}{M}dy, \quad \tau=t_3, \tag{10}$$

$$\Phi(y, t)\equiv\int_0^{L_1}\phi(x, y, t)dx, \quad M\equiv\int_0^{L2}\Phi(y, t)dy=\text{常数}. \tag{11}$$

不难验证它们满足(7)和(8)式.

在新坐标系中，(1)—(3)式变为:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+U\frac{\partial u}{\partial \xi}+V\frac{\partial u}{\partial \eta}-fv=-\left(\frac{1}{2\Phi}\right)\frac{\partial \phi^2}{\partial \xi}\equiv G_x, \tag{1$'$}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}+U\frac{\partial v}{\partial \xi}+V\frac{\partial v}{\partial \eta}+fu=\left(\frac{\partial x}{2M\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \phi^2}{\partial \xi}\right)-\left(\frac{\partial x}{2M\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \phi^2}{\partial \eta}\right)\equiv G_y, \tag{2$'$}$$

---

1) 曾庆存: 计算稳定性问题，1964 (中国科学院地球物理研究所的学术报告).

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}+U\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+V\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\phi^2}{\Phi}u\right)+\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{M\,\partial\eta}v\phi^2\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(-\frac{\partial x}{M\,\partial\xi}v\phi^2\right)\right]-2(uG_x+vG_y),\tag{3$'$}$$

当取刚壁条件时，则

$$U(\xi,\eta,\tau)\equiv\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial\Psi}{\partial\eta},\quad V(\xi,\eta,\tau)\equiv\frac{d\eta}{dt}=-\frac{\partial\Psi}{\partial\xi},\tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{M}{\Phi}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^1 v(\xi,\eta,\tau)d\xi,\tag{13}$$

$$\Psi(\xi,\eta,\tau)\equiv\frac{1}{M}\left\{\xi\int_0^1 v\Phi d\xi-\int_0^\xi v\Phi d\xi\right\},\tag{14}$$

$$x(\xi,\eta,\tau)=\int_0^\xi\frac{\Phi}{\phi}d\xi,\quad y(\eta,\tau)=\int_0^\eta\frac{M}{\Phi}d\eta.\tag{15}$$

不难验证：$\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\eta}=0$，且有 $x(0,\eta,\tau)=0$，$x(1,\eta,\tau)=L_1$，$y(\xi,0,\tau)=0$，$y(\xi,1,\tau)=L_2$ 以及 $U(0,\eta,\tau)=U(1,\eta,\tau)=V(\xi,0,\tau)=V(\xi,1,\tau)=0$.

今用有限差分法．设空间步长为 $(\delta\xi,\delta\eta)$，时间步长为 $\delta\tau$；$\xi_i=i\delta\xi$，$\eta_j=j\delta\eta$，$\tau_n=n\delta\tau$；$i=0,1,\cdots,I$，$j=0,1,\cdots,J$，$n=0,1,\cdots$ 以及 $F_{ij}^n\equiv F(\xi_i,\eta_j,\tau_n)$．记

$$\frac{\delta_\tau^+F}{\delta\tau}\equiv\frac{F^{n+1}-F^n}{\delta\tau},\quad \bar F\equiv\frac{1}{2}[F^{n+1}+F^n],\tag{16}$$

$$\frac{\delta_\xi F}{\delta\xi}\equiv\begin{cases}\dfrac{F_{i+1}-F_{i-1}}{2\delta\xi} & (1\leqslant i\leqslant I-1),\\[2mm] \dfrac{F_1-F_0}{\delta\xi} & (i=0),\\[2mm] \dfrac{F_I-F_{I-1}}{\delta\xi} & (i=I),\end{cases}\tag{17}$$

$$\frac{\delta_\xi UF}{\delta\xi}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\delta\xi}[(U_{i+1}+U_i)(F_{i+1}+F_i)-(U_i+U_{i-1})(F_i+F_{i-1})] & (1\leqslant i\leqslant I-1),\\[2mm] \dfrac{1}{2\delta\xi}[U_1(F_1+F_0)] & (i=0),\\[2mm] \dfrac{-1}{2\delta\xi}[U_{I-1}(F_I+F_{I-1})] & (i=I).\end{cases}\tag{18}$$

关于 η 方向的差分和 (17)，(18) 式有相同的形式．于是差分格式可取作

$$\begin{cases}\dfrac{\delta_\tau^+u}{\delta\tau}+\alpha_1\left(\dfrac{\partial_\xi U^*\bar u}{\delta\xi}+\dfrac{\partial_\eta V^*\bar u}{\delta\eta}\right)=\beta_1G_x+\gamma f\bar v,\\[2mm] \dfrac{\delta_\tau^+v}{\delta\tau}+\alpha_2\left(\dfrac{\partial_\xi U^*\bar v}{\delta\xi}+\dfrac{\partial_\eta V^*\bar v}{\delta\eta}\right)=\beta_2G_y-\gamma f\bar u,\\[2mm] \dfrac{\delta_\tau^+\phi}{\delta\tau}+\alpha_3\left(\dfrac{\partial_\xi U^*\bar\phi}{\delta\xi}+\dfrac{\partial_\eta V^*\bar\phi}{\delta\eta}\right)=-2(\beta_1\bar uG_x+\beta_2\bar vG_y)+\beta_3E_3+\beta_4E_4.\end{cases}\tag{19}$$

仿照文献 [4, 5] 亦可将此格式称为灵活性差分格式，其中 α_k，β_k，γ 等为灵活性常数，可交替

取某一个不为零,而其余为零.由此可得到分解算法.又

$$G_x = -\frac{1}{2\Phi^*}\frac{\delta_\xi(\phi^{**}\phi^*)}{\delta\xi},$$

$$G_y = \left(\frac{1}{2M}\frac{\delta_\eta x^*}{\delta\eta}\right)\frac{\delta_\xi(\phi^{**}\phi^*)}{\delta\xi} - \left(\frac{1}{2M}\frac{\delta_\xi x^*}{\delta\xi}\right)\frac{\delta_\eta(\phi^{**}\phi^*)}{\delta\eta},$$

$$E_3 = -\frac{\delta_\xi}{\delta\xi}\left(\frac{\phi^{**}\phi^*}{\Phi^*}u^*\right),$$

$$E_4 = \frac{\delta_\xi}{\delta\xi}\left(\frac{\delta_\eta x^*}{\delta\eta}v^*\phi^{**}\phi^*\right) + \frac{\delta_\eta}{\delta\eta}\left(-\frac{\delta_\xi x^*}{\delta\xi}u^*\phi^{**}\phi^*\right),$$

其中带星号的量为该量沿时间和空间的某种线性组合或平均值,而 U^*, V^*, Φ^*, x^*, y^* 则可由(12)—(15)式,按相应的数值求积公式和差分法求得,其中被积函数取为相应的带星号的值.不管 U^*, V^*, G_x, G_y, E_3, E_4 取任何时刻的值,皆可由(19)式和刚壁条件导出总能量守恒:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}[(u_{ij}^n)^2 + (v_{ij}^n)^2 + \phi_{ij}^n]\varepsilon_i\varepsilon_j\delta_\xi\delta_\eta = \text{常数}; \tag{20}$$

其中 $\varepsilon_i = 1$, 当 $i \neq 0, I$; $\varepsilon_i = 1/2$, 当 $i = 0, I$; ε_j 与此相似.

顺便指出: 在计算中 U^*, V^*, ϕ^*, u^*, v^* 等以取为前一时刻的值(或前些时刻的平均值)更方便;但考虑到动能和位能的相互转换过程,在 G_x, G_y, E_3 和 E_4 中, ϕ^{**} 以取 $\bar{\Phi}$ 再加上空间平均为宜.

这种格式要计算 E_3, E_4 以及 U^*, V^*, x^* 等,增加了计算量.但平流项保持原来的简单形式,而且当用分解算法时,和地转适应过程相对应的方程可用显式差分求解,这些却带来不少方便之处.

二、变量变换法

如果仍取原来的自变量 (x, y, t), 但因变量用

$$U = \sqrt{\phi}\,u, \quad V = \sqrt{\phi}\,v, \quad \phi, \tag{21}$$

则(5)式不变,而(4)式变为:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left(\frac{U^2 + V^2 + \phi^2}{2}\right)dxdy = 0. \tag{22}$$

从而亦可以消去因子 ϕ, 且(22)式中被积函数为三函数的平方和,这点尤为方便.

当使用(21)式时,我们有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial uU}{\partial x} + u\dfrac{\partial U}{\partial x}\right] + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial vU}{\partial y} + v\dfrac{\partial U}{\partial y}\right] - fV = -\Phi\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial uV}{\partial x} + u\dfrac{\partial V}{\partial x}\right] + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial vV}{\partial y} + v\dfrac{\partial V}{\partial y}\right] + fU = -\Phi\dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \left[\dfrac{\partial U\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial V\Phi}{\partial y}\right] = 0,\end{cases} \tag{23}$$

其中 $\Phi = \sqrt{\phi}$. 相应的差分格式是

$$\begin{cases}\dfrac{\delta_t^+ U}{\delta t}+\alpha_1\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\delta_x u^*\bar{U}}{\delta x}+u^*\dfrac{\delta_x\bar{U}}{\delta x}\right]+\alpha_1'\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\delta_y v^*\bar{U}}{\delta y}+v^*\dfrac{\delta_y\bar{U}}{\delta y}\right]\\ =-\beta_1\Phi^*\dfrac{\delta_x\bar{\phi}}{\delta x}+\gamma f\bar{V},\\ \dfrac{\delta_t^+ V}{\delta t}+\alpha_2\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\delta_x u^*\bar{V}}{\delta x}+u^*\dfrac{\delta_x\bar{V}}{\delta x}\right]+\alpha_2'\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\delta_y v^*\bar{V}}{\delta y}+v^*\dfrac{\delta_y\bar{V}}{\delta y}\right]\\ =-\beta_2\Phi^*\dfrac{\delta_y\bar{\phi}}{\delta y}-\gamma f\bar{U},\\ \dfrac{\delta_t\phi}{\delta t}+\beta_1\dfrac{\delta_x\bar{U}\Phi^*}{\delta x}+\beta_2\dfrac{\delta_y\bar{V}\Phi^*}{\delta y}=0,\end{cases}\tag{24}$$

其中带星号的量可以取任意时刻的值，而有

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}[(U_{ij}^n)^2+(V_{ij}^n)^2+(\phi_{ij}^n)^2]\ \frac{\varepsilon_i\varepsilon_j}{2}\delta x\delta y=\text{常数},\tag{25}$$

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\phi_{ij}^n\varepsilon_i\varepsilon_j\delta x\delta y=\text{常数}.\tag{26}$$

格式(24)式不仅保持质量守恒和能量守恒，而且计算量可能不增加．虽然左端与 u^*, v^* 有关的量虽然看起来比较复杂，但以下两节我们将说明，这时可以方便地使用沿 x, y 交替分解的算法，反而有可能减小计算量．另外，虽然 α_1, α_1' 和 α_2, α_2' 诸项中包含有非平流过程，但由于是隐式格式，只要解法得当，仍可取得优于单纯平流过程的时间步长．

三、协调的分解算法

以下以求解(24)式为例，提出一些协调的分解算法．

1. 取 $\alpha_1=\alpha_1'=\alpha_2=\alpha_2'=0$, $\delta t'=\delta t/M$，按下列差分方程计算适应过程经过 M 个 $\delta t'$ 所引起的变化

$$\begin{cases}\dfrac{\delta_t^+ U}{\delta t'}=-\beta_1\Phi^*\dfrac{\delta_x\bar{\phi}}{\delta x}+\gamma f\bar{V},\\ \dfrac{\delta_t^+ V}{\delta t'}=-\beta_2\Phi^*\dfrac{\delta_y\bar{\phi}}{\delta y}-\gamma f\bar{U},\\ \dfrac{\delta_t^+\phi}{\delta t'}=-\beta_1\dfrac{\delta_x\bar{U}\Phi^*}{\delta x}-\beta_2\dfrac{\delta_y\bar{V}\Phi^*}{\delta y},\end{cases}\tag{27}$$

其中 Φ^* 由初值或每一小时间步的初值给出．

2. 其次取 $\beta_1=\beta_2=\gamma=0$，用由(27)式算得的 $M\delta t'$ 时刻的 U, V 作初值，并由这 M 个小时间步的 u, v, ϕ 计算 u^*, v^*，按下列公式计算一步主要由平流过程引起的变化

$$\begin{cases}\dfrac{\delta_t^+ U}{\delta t}=-\alpha_1\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\delta_x u^*\bar{U}}{\delta x}+u^*\dfrac{\delta_x\bar{U}}{\delta x}\right]-\alpha_1'\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\delta_y v^*\bar{U}}{\delta y}+v^*\dfrac{\delta_y\bar{U}}{\delta y}\right],\\ \dfrac{\delta_t^+ V}{\delta t}=-\alpha_2\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\delta_x u^*\bar{V}}{\delta x}+u^*\dfrac{\delta_x\bar{V}}{\delta x}\right]-\alpha_2'\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\delta_y v^*\bar{V}}{\delta_y}+v^*\dfrac{\delta_y\bar{V}}{\delta y}\right].\end{cases}\tag{28}$$

如此循环下去，由于(27)和(28)式都完全保持能量守恒，故总的结果仍然完全保持能量守恒．类似的分解算法我们已经大规模的试验过[6]，即使作长时间的计算，按分解算法算得的

结果和按原格式计算的结果也相差非常小,而计算量可以减为原来的 1/5.

还可将(27)和(28)式分别再分解为一维空间的问题,并用追赶法求解隐式差分格式.这样可以更省时间,而且由此所得的分解法每一步仍保持能量守恒,因而也是计算稳定的.这种做法还可以进一步完善化.因为在一般情况下,风场和气压场处于准地转平衡,故(27)式每个方程的右端每一项都是大量,但两项之和却是小量.因此若不作适当处理,直接将二维问题分解为一维问题来求解,将会出现预报场在时间上的大起大落现象,这是很不方便的,有时也会引起很大的麻烦.如果经过适当处理使右端每一项均为小量,则将二维问题分解为一维问题来求解就不会引起任何麻烦了.

先处理(27)式,令

$$U = \hat{U} + U', \quad V = \hat{V} + V', \quad \phi = \hat{\phi} + \phi', \tag{29}$$

$$\hat{U}^{(n)} = -f_0^{-1}\Phi^* \frac{\delta_y \hat{\phi}^{(n)}}{\delta y}, \quad \hat{V}^{(n)} = f_0^{-1}\Phi^* \frac{\delta_x \hat{\phi}^{(n)}}{\delta x}, \tag{30}$$

$$U'^{(n)} = U^{(n)} - \hat{U}^{(n)}, \quad V'^{(n)} = V^{(n)} - \hat{V}^{(n)}, \quad \phi'^{(n)} = \phi^{(n)} - \hat{\phi}^{(n)}. \tag{31}$$

由于在(27)式中 Φ^* 为已知函数,故(27)式的解可以化为两个线性问题的解之和,其中 U', V', ϕ' 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\delta_t^+ U'}{\delta t'} = -\beta_1 \Phi^* \dfrac{\delta_x \overline{\phi}'}{\delta x} + \gamma f \overline{V}', \\ \dfrac{\delta_t^+ V'}{\delta t'} = -\beta_2 \Phi^* \dfrac{\delta_y \overline{\phi}'}{\delta y} - \gamma f \overline{U}', \\ \dfrac{\delta_t^+ \phi'}{\delta t'} = -\beta_1 \dfrac{\delta_x \overline{U}'\Phi^*}{\delta x} - \beta_2 \dfrac{\delta_y \overline{V}'\Phi^*}{\delta y}. \end{cases} \tag{32}$$

若"初始场" $U'^{(n)}$, $V'^{(n)}$, $\phi'^{(n)}$ 为小量,则(32)式右端各项均为小量,从而(32)式左右两端每一项在量级上是协调的.于是我们可作进一步的分解,将二维问题化为两个一维问题,且将科氏力项分出,取作

$$U''^{\left(n+\frac{m'}{m}\right)} = U'^{\left(n+\frac{m'}{m}\right)}, \quad V''^{\left(n+\frac{m'}{m}\right)} = V'^{\left(n+\frac{m'}{m}\right)}, \tag{33}$$

$$\begin{cases} U''^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k+1}{m''}\right]\right)} - U''^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k}{m''}\right]\right)} \\ \quad = -\beta_1 \dfrac{\delta t}{2m'm''} \Phi^* \dfrac{\delta_x}{\delta x} \left[\phi''' + \phi'^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k}{m''}\right]\right)}\right], \\ \phi''' - \phi'^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k}{m''}\right]\right)} = -\beta_1 \dfrac{\delta t}{2m'm''} \cdot \\ \quad \dfrac{\delta_x}{\delta x} \left[\Phi^* U''^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k+1}{m''}\right]\right)} + \Phi^* U''^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k}{m''}\right]\right)}\right], \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} V''^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k+1}{m''}\right]\right)} - V''^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k}{m''}\right]\right)} \\ \quad = -\beta_2 \dfrac{\delta t}{2m'm''} \Phi^* \dfrac{\delta_y}{\delta y} \left[\phi''' + \phi'^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k+1}{m''}\right]\right)}\right], \\ \phi'^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k+1}{m''}\right]\right)} - \phi''' = -\beta_2 \dfrac{\delta t}{2m'm''} \dfrac{\delta_y}{\delta y} \left[\Phi^* V''^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k+1}{m''}\right]\right)} \right. \\ \quad \left. + \Phi^* V''^{\left(n+\frac{1}{m}\left[m'+\frac{k}{m''}\right]\right)}\right], \end{cases} \tag{35}$$

$$(k = 0, 1, \cdots, m'' - 1)$$

$$
\begin{cases}
U'^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} - U''^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} = \gamma f \dfrac{\delta t}{2m}\left[V'^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} + V''^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)}\right], \\
V'^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} - V''^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} = -\gamma f \dfrac{\delta t}{2m}\left[U'^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} + U''^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)}\right] \\
\qquad (m' = 0, 1, 2, \cdots, m).
\end{cases} \tag{36}
$$

若 $U'^{(n)}$, $V'^{(n)}$ 不为小量，则 (27) 式右端就不是小量，从而作不作上面的进一步分解都会有较大的变化，所以上述进一步分解是可取的.

(34)—(36) 式每一小步都保持能量守恒，并且易于推得

$$
\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_i\varepsilon_j\delta x\delta y\{[U'^2_{ij} + V'^2_{ij} + \phi'^2_{ij}]^{(n+1)} - [U'^2_{ij} + V'^2_{ij} + \phi'^2_{ij}]^{(0)}\} = 0. \tag{37}
$$

其次，$\hat{U}$ 等则满足下列方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\delta_t^+\hat{U}}{\delta t} = -\beta_1\Phi^*\dfrac{\delta_x\bar{\hat{\phi}}}{\delta x} + \gamma f_0\bar{\hat{V}} + \gamma'(f-f_0)\bar{\hat{V}}, \\
\dfrac{\delta_t^+\hat{V}}{\delta t} = -\beta_2\Phi^*\dfrac{\delta_y\bar{\hat{\phi}}}{\delta y} - \gamma f_0\bar{\hat{U}} - \gamma'(f-f_0)\bar{\hat{U}}, \\
\dfrac{\delta_t^+\hat{\phi}}{\delta t} = -\beta_1\dfrac{\delta_x\bar{\hat{U}}\Phi^*}{\delta x} - \beta_2\dfrac{\delta_y\bar{\hat{V}}\Phi^*}{\delta y}.
\end{cases} \tag{38}
$$

它又可再分解为两步：第一步取 $\gamma' = 0$, 第二步取 $\beta_1 = \beta_2 = \gamma = 0$, $\gamma' \neq 0$. 当取 $\gamma' = 0$ 时，$\hat{U}$, $\hat{V}$, $\hat{\phi}$ 不随时间改变，而取 $\gamma' \neq 0$ 时，则有和 (36) 式相类似的公式，从而有

$$
\begin{cases}
\hat{U}^{(n+1)} - \hat{U}^{(n)} = \gamma'(f-f_0)\dfrac{\delta t}{2}[\hat{V}^{(n+1)} + \hat{V}^{(n)}], \\
\hat{V}^{(n+1)} - \hat{V}^{(n)} = -\gamma'(f-f_0)\dfrac{\delta t}{2}[\hat{U}^{(n+1)} + \hat{U}^{(n)}], \\
\hat{\phi}^{(n+1)} - \hat{\phi}^{(n)} = 0.
\end{cases} \tag{39}
$$

或者

$$
\begin{cases}
\hat{U}^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} - \hat{U}^{\left(n+\frac{m'}{m}\right)} = \gamma'(f-f_0)\left[\hat{V}^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} + \hat{V}^{\left(n+\frac{m'}{m}\right)}\right]\dfrac{\delta t'}{2}, \\
\hat{V}^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} - \hat{V}^{\left(n+\frac{m'}{m}\right)} = \gamma'(f-f_0)\left[\hat{U}^{\left(n+\frac{m'+1}{m}\right)} + \hat{U}^{\left(n+\frac{m'}{m}\right)}\right]\dfrac{\delta t'}{2}, \\
\hat{\phi}^{(n+1)} = \hat{\phi}^{(n)} \qquad (m' = 0, 1, 2, \cdots, m).
\end{cases} \tag{39}
$$

$\hat{U}$, $\hat{V}$, $\hat{\phi}$ 满足

$$
\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_i\varepsilon_j\delta x\delta y\{[\hat{U}^2_{ij} + \hat{V}^2_{ij} + \hat{\phi}^2_{ij}]^{(n+1)} - [\hat{U}^2_{ij} + \hat{V}^2_{ij} + \hat{\phi}^2_{ij}]^{(n)}\} = 0. \tag{40}
$$

最后，在经过一个时间步长 δt 之后，就得到 (27) 式的解为：

$$
U^{(n+1)} = \hat{U}^{(n+1)} + U'^{(n+1)},\quad V^{(n+1)} = \hat{V}^{(n+1)} + V'^{(n+1)},\quad \phi^{(n+1)} = \hat{\phi}^{(n+1)} + \phi'^{(n+1)}. \tag{41}
$$

由此得到的解虽不能严格地保持能量守恒，但由于 (37) 和 (41) 式，即使令 $n \to \infty$, 仍可得到由 $U_{ij}^{(n+1)}$, $V_{ij}^{(n+1)}$, $\phi_{ij}^{(n+1)}$ 组成的场其能量是有限值.

下面来分析 (28) 式. 实际上 (28) 式右端每一项以及其总和都有同一的量级，因而可以直接再沿坐标作分解. 用 (41) 式中的 $U^{(n+1)}$, $V^{(n+1)}$ 作为 (28) 式的初值，改记作 $\hat{U}'^{(n)}$ 和

$\hat{V}'^{(n)}$，取分解过程如下：

$$\frac{\hat{F}-\hat{F}'^{(n)}}{\delta t}=-\alpha\frac{1}{4}\left[\frac{\delta_x u^*(\hat{F}+\hat{F}'^{(n)})}{\delta x}+u^*\frac{\delta_x(\hat{F}+\hat{F}'^{(n)})}{\delta x}\right], \tag{42}$$

$$\frac{F^{(n+1)}-\hat{F}}{\delta t}=-\alpha'\frac{1}{4}\left[\frac{\delta_y v^*(\hat{F}+F^{(n+1)})}{\delta y}+v^*\frac{\delta_y(\hat{F}+F^{(n+1)})}{\delta y}\right], \tag{43}$$

则有

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_i\varepsilon_j\delta_x\delta_y[F_{ij}^{2(n+1)}-F_{ij}^{2(n)}]=0, \tag{44}$$

其中 F 分别为 U 或 V.

为了取得更好的结果，下一步可将(33)—(35)式以及(42)—(43)式的过程颠倒过来，如此交替下去.

上述分解算法((33)—(44)式)可称为协调的分解算法．它保证计算稳定性，而且克服不协调的困难．应该指出，Марчук 的方法[7]应用到可压缩流体中去是不能保证能量守恒的，而且当沿空间坐标再分解时，显然又有可能出现不协调的困难.

四、追 赶 法

先叙述求解(42)—(43)式的追赶法．以(42)式为例，并将 F 改记为 F^{n+1}，这时有

$$\begin{cases}4F_i^{n+1}+\dfrac{\delta t}{\delta x}\dfrac{u_{i+1}^*+u_i^*}{2}F_{i+1}^{n+1}-\dfrac{\delta t}{\delta x}\dfrac{u_i^*+u_{i-1}^*}{2}F_{i-1}^{n+1}=4F_i^n-\delta t\left(\dfrac{\delta_x u^*F^n}{\delta x}+u^*\dfrac{\delta_x F^n}{\delta x}\right),\\ 4F_0^{n+1}+\dfrac{\delta t}{\delta x}u_1^*F_1^{n+1}=4F_0^n-\dfrac{\delta t}{\delta x}u_1^*F_1^n \quad (i=1,2,\cdots,I-1),\\ 4F_I^{n+1}-\dfrac{\delta t}{\delta x}u_{I-1}^*F_{I-1}^{n+1}=4F_I^n+\dfrac{\delta t}{\delta x}u_{I-1}^*F_{I-1}^n.\end{cases} \tag{45}$$

记

$$\begin{cases}a_i=-\dfrac{\delta t}{\delta x}\dfrac{u_i^*+u_{i-1}^*}{2}, \quad a_I=-\dfrac{\delta t}{\delta x}u_{I-1}^*,\\ c_i=\dfrac{\delta t}{\delta x}\dfrac{u_{i+1}^*+u_i^*}{2}, \quad c_0=\dfrac{\delta t}{\delta x}u_1^*,\\ g_i=4F_i^n-\delta t\left(\dfrac{\delta_x u^*F^n}{\delta x}+u^*\dfrac{\delta_x F^n}{\delta x}\right) \quad (i=1,2,\cdots,I-1)\\ g_0=4F_0^n-\dfrac{\delta t}{\delta x}u_1^*,\\ g_I=4F_I^n+\dfrac{\delta t}{\delta x}u_{I-1}^*.\end{cases} \tag{46}$$

于是 F_i^{n+1} 可按如下追赶公式求解：

$$\begin{cases}F_i^{n+1}=s_i^{-1}(z_i-c_iF_{i+1}^{n+1}), \quad F_I^{n+1}=z_I \quad (i=I-1, I-2,\cdots,1,0),\\ z_i=g_i-l_iz_{i-1}, \qquad z_0=g_0\\ (i=1,2,\cdots,I).\end{cases} \tag{47}$$

而 s_i, l_i 是按另一组追赶公式计算的：

$$\begin{cases} s_0 = 4, \\ l_i = s_{i-1}^{-1} a_i, \quad s_i = 4 - l_i c_{i-1}. \end{cases} \tag{48}$$

追赶公式 (47), (48) 稳定的条件是

$$\begin{cases} |l_i| \leqslant 1, \\ |s_i^{-1} c_i| \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, I-1). \end{cases} \tag{49}$$

这可以归结为：

$$\begin{cases} |a_i| + |c_i| \leqslant 4, \\ |c_{i-1}| + |a_{i+1}| \leqslant 4 \quad (i = 1, 2, \cdots, I-1). \end{cases} \tag{50}$$

记

$$\mathscr{U}^* = \max_{1 \leqslant i \leqslant I-1} |u_i^*|, \tag{51}$$

利用 (46) 式可得到 (50) 式成立的一个充分条件

$$\mathscr{U}^* \frac{\delta t}{\delta x} \leqslant 2. \tag{52}$$

这表明，包含非平流过程的 (42) 式，其时间步长 δt 可以达到单纯平流过程显式格式时间步长的两倍.

若直接求解 (28) 式，则可以用矩阵追赶法. 为确定起见，取 $F = U$，此时由刚壁条件有

$$U_{0j} = U_{Ij} = 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, J),$$

记

$$\begin{cases} \sigma_{ij} \equiv \dfrac{\delta t}{\delta x} \dfrac{u_{i+1j}^* + u_{ij}^*}{2} \begin{pmatrix} j = 0, 1, \cdots, J \\ i = 1, 2, \cdots, I-1 \end{pmatrix}, \\ \rho_{ij} \equiv \dfrac{\delta t}{\delta y} \dfrac{v_{ij+1}^* + v_{ij}^*}{2} \begin{pmatrix} j = 1, 2, \cdots, J-1 \\ i = 1, 2, \cdots, I-1, \end{pmatrix}, \\ \rho_{i0} = \dfrac{\delta t}{\delta y} v_{i1}^*, \quad \rho_{iJ-1} = \dfrac{\delta t}{\delta y} v_{iJ-1}^* \quad (i = 1, 2, \cdots, I-1), \\ g_{ij} \equiv 4U_{ij}^n - \delta t \left(\dfrac{\delta_x u^* U^n}{\delta x} + u^* \dfrac{\delta_x U^n}{\delta x} + \dfrac{\delta_y v^* U^n}{\delta y} + v^* \dfrac{\delta_y U^n}{\delta y} \right) \\ (j = 0, 1, \cdots, J; \quad i = 1, 2, \cdots, I-1); \end{cases} \tag{53}$$

$$\left.\begin{cases} g_j \equiv (g_{1j}, g_{2j}, \cdots, g_{I-1j})^T, \\ U_j \equiv (U_{1j}^{n+1}, U_{2j}^{n+1}, \cdots, U_{I-1j}^{n+1})^T, \end{cases}\right\} \quad j = 0, 1, \cdots, J; \tag{54}$$

则 (28) 式可表示成如下的向量方程组：

$$\begin{cases} B_0 U_0 + c_0 U_1 = g_0, \\ A_j U_{j-1} + B_j U_j + c_j U_{j+1} = g_j, \\ A_J U_{J-1} + B_J U_J = g_J. \end{cases} \tag{55}$$

其中

$$\left\{\begin{array}{l}
A_j = \begin{pmatrix} -\rho_{1\,j-1} & & & & 0 \\ & -\rho_{2\,j-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & -\rho_{I-2\,j-1} & \\ & & & & -\rho_{I-1\,j-1} \end{pmatrix},\ C_j = -A_{j+1},\ j = 0, 1, \cdots, J-1 \\
(j = 1, 2, \cdots, J) \\
B_j = \begin{pmatrix} 4 & \sigma_{1j} & & & 0 \\ -\sigma_{1j} & 4 & \sigma_{2j} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\sigma_{I-3\,j} & 4 & \sigma_{I-2\,j} \\ & & & -\sigma_{I-2\,j} & 4 \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1, \cdots, J-1).
\end{array}\right. \tag{56}$$

容易对(55)式构造出矩阵追赶公式，而且由(56)式可以看出，追赶过程只涉及很简单的矩阵的求逆。

可以证明，(55)式的追赶公式的稳定性条件是：

$$\left\{\begin{array}{ll}
\|B_j^{-1}A_j\| \leqslant \frac{1}{2}\ (j = 1, 2, \cdots, J), & \|A_{j+1}B_j^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}\ (j = 0, 1, \cdots, J-1), \\
\|B_j^{-1}c_j\| \leqslant \frac{1}{2}\ (j = 0, 1, \cdots, J-1), & \|c_{j-1}B_j^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}\ (j = 1, 2, \cdots, J),
\end{array}\right. \tag{57}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是任何一种矩阵范数。(57)式成立的一个充分条件是：

$$\left\{\begin{array}{l}
\max\limits_{ij} |u_{ij}^*| \dfrac{\delta t}{\delta x} \leqslant 1, \\
\max\limits_{ij} |v_{ij}^*| \dfrac{\delta t}{\delta y} \leqslant 1,
\end{array}\right. \tag{58}$$

它仍比显式格式的稳定性判据放宽了一倍。

(34)和(35)式可以经过矩阵的块分解之后，再用追赶法求解。为讨论方便起见，考虑如下的隐式差分方程组

$$\frac{\delta_t^+ U}{\delta t} = -\Phi^* \frac{\delta_x \bar{\phi}}{\delta x}, \quad \frac{\delta_t^+ \phi}{\delta t} = -\frac{\delta_x \Phi^* \bar{U}}{\delta x}. \tag{59}$$

记

$$\sigma_i \equiv \Phi_i^* \frac{\delta t}{\delta x}, \tag{60}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
g_i \equiv 4U_i^n - 2\Phi_i^* \delta t \left(\dfrac{\delta_x \phi^n}{\delta x}\right)_i & (i = 1, 2, \cdots, I-1), \\
h_i \equiv 4\phi_i^n - 2\delta t \left(\dfrac{\delta_x \Phi^* \phi^n}{\delta x}\right)_i & (i = 0, 1, \cdots, I),
\end{array}\right. \tag{61}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
U \equiv (U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, \cdots, U_{I-1}^{n+1})^T, \\
\phi \equiv (\phi_0^{n+1}, \phi_1^{n+1}, \cdots, \phi_I^{n+1})^T, \\
g \equiv (g_1, g_2, \cdots, g_{I-1})^T, \\
h \equiv (h_0, h_1, \cdots, h_I)^T,
\end{array}\right. \tag{62}$$

于是可将(59)式写成矩阵形式，

$$\begin{pmatrix} 4I_1 & D \\ C & 4I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}, \tag{63}$$

其中 I_1 和 I_2 分别为 $I-1$ 和 $I+1$ 阶单位矩阵，C 和 D 分别为 $(I+1)\times(I-1)$ 和 $(I-1)\times(I+1)$ 的长方阵

$$C = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 & & & & & \\ 0 & \sigma_2 & & & & \mathbf{0} \\ -\sigma_1 & 0 & \sigma_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\sigma_{I-3} & 0 & \sigma_{I-1} \\ & \mathbf{0} & & & -\sigma_{I-2} & 0 \\ & & & & & -2\sigma_{I-1} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & \sigma_1 & & & & \mathbf{0} \\ & -\sigma_2 & 0 & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & -\sigma_{I-2} & 0 & \sigma_{I-2} & \\ & & & & -\sigma_{I-1} & 0 & \sigma_{I-1} \end{pmatrix}. \tag{64}$$

利用块三角分解易得：

$$\begin{pmatrix} 4I_1 & D \\ C & 4I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ \frac{1}{4}C & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4I_1 & D \\ 0 & W \end{pmatrix}, \tag{65}$$

其中

$$W = \begin{pmatrix} 4+\frac{\sigma_1^2}{2} & 0 & -\frac{\sigma_1^2}{2} & & & & \mathbf{0} \\ 0 & 4+\frac{\sigma_2^2}{4} & 0 & -\frac{\sigma_2^2}{4} & & & \\ -\frac{\sigma_1^2}{4} & 0 & 4+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{4} & 0 & -\frac{\sigma_3^2}{4} & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -\frac{\sigma_{I-3}^2}{4} & 0 & 4+\frac{\sigma_{I-3}^2+\sigma_{I-1}^2}{4} & 0 & -\frac{\sigma_{I-1}^2}{4} & \\ & & -\frac{\sigma_{I-2}^2}{4} & 0 & 4+\frac{\sigma_{I-2}^2}{4} & 0 & \\ & \mathbf{0} & & -\frac{\sigma_{I-1}^2}{2} & 0 & 4+\frac{\sigma_{I-1}^2}{2} & \end{pmatrix}, \tag{66}$$

于是(63)式可分块求解:

$$\begin{cases} W\phi = h - \dfrac{1}{4}Cg, \\ U = \dfrac{1}{4}(g - D\phi). \end{cases} \tag{67}$$

由于W是准三对角矩阵,故ϕ仍可用追赶法求解. 注意到W具有列和行的对角线优势,容易证明追赶过程是无条件稳定的,这使得我们可以较为自由地选取适应过程的时间步长.

不难估计,用追赶法求解(42)—(43)式和(34)—(35)式的计算量,都只同最简单的迭代方法相当(用矩阵追赶法解(28)式的计算量可能要大些),但时间步长可以不同程度地放大,因而在实用上是经济的.

所有上面各节的方法,都可直接推广到斜压大气中去. 我们用本文的方法作过许多数值试验,结果表明: 计算精度和计算速度都是很满意的,我们将另文发表.

参 考 文 献

[1] 曾庆存等,力学学报, 1981, 3: 209.
[2] 季仲贞,科学通报, **25**(1980), 19: 890.
[3] ——,气象学报, **39**(1981), 2: 237.
[4] 曾庆存,数值天气预报的数学物理基础,第一卷,科学出版社, 1979.
[5] 曾庆存等,第二次全国数值天气预报会议文集,科学出版社, 1980.
[6] ——,科学通报, **25**(1980), 18: 842.
[7] Марчук, Г. И., Численное решение задач динамики атмосферы и океана, Гидрометеоиздат, Ленинград, 1974.