



大 Reynolds 数 Navier-Stokes 方程带回溯技巧的两水平方法

杨晓成, 尚月强*

西南大学数学与统计学院, 重庆 400715

E-mail: yxc1214@email.swu.edu.cn, yqshang@swu.edu.cn

收稿日期: 2017-4-18; 接受日期: 2018-4-12; 网络出版日期: 2018-08-31; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11361016) 和重庆市基础与前沿研究计划 (批准号: cts2016jcyjA0348) 资助项目

摘要 本文考虑了一种求解大 Reynolds 数定常 Navier-Stokes 方程带回溯 (backtracking) 技巧的两水平有限元方法. 其基本思想是, 首先在一粗网格上求解带有亚格子模型稳定项的 Navier-Stokes 方程, 然后在细网格上求解一个亚格子模型稳定化的线性 Newton 问题, 最后又回到粗网格上求解线性化的校正问题. 通过适当的稳定化参数和粗细网格尺寸的选取, 本文的算法能取得最优渐近收敛阶. 数值实验检验了理论分析的正确性和算法的有效性.

关键词 Navier-Stokes 方程 大 Reynolds 数 回溯技巧 亚格子稳定化方法 两水平方法

MSC (2010) 主题分类 76M10, 76D05, 65N30, 65N55

1 引言

设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ 或 $d = 3$) 中具有 Lipschitz 连续边界的有界集. 考虑 Navier-Stokes 问题:

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (1.2)$$

$$u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (1.3)$$

其中 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是速度, $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是压力, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是体积力, ν 是黏性系数. 给定一个特征长度 L 和一个特征速度 U , 定义 Reynolds 数为 $Re = UL/\nu$.

众所周知, 经典的 Galerkin 有限元方法不能有效地近似求解大 Reynolds 数 Navier-Stokes 方程, 会带来数值震荡. 另一方面, 用标准的有限元方法求解 Navier-Stokes 方程, 必须求解一个庞大的非线性系统, 给现有的计算资源构成挑战. 为了克服这个困难, 文献 [1] 考虑了标准的带回溯 (backtracking) 技巧的两重网格方法, 从理论上分析了方法的有效性, 但没有给出相关数据结果, 且没有克服求解大

英文引用格式: Yang X C, Shang Y Q. A two-level finite element method with backtracking technique for the Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 815–830, doi: 10.1360/N012017-00072

Reynolds 数 Navier-Stokes 方程的困难. 本文将文献 [1] 中标准的带回溯技巧的两重网格方法与求解大 Reynolds 数问题的亚格子模型方法 [2] 结合起来, 提出了一种有效的数值求解大 Reynolds 数 Navier-Stokes 方程的两水平有限元方法, 该方法能克服传统的两水平有限元方法的不足, 能求解大 Reynolds 数问题, 同时与单水平的亚格子模型稳定化方法 [2] 相比, 我们的方法可以节省大量的 CPU 时间.

本文算法的基本思想如下:

- (1) 在尺寸为 H 的粗网格上求解一个稳定化的非线性问题;
- (2) 在尺寸为 h ($h \ll H$) 的细网格上求解一个带有亚格子稳定项的一步 Newton 迭代问题;
- (3) 回到粗网格求一个线性校正问题.

2 预备知识

下面引入 Hilbert 空间:

$$X = H_0^1(\Omega)^d, \quad M = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0 \right\},$$

$\|\cdot\|_k$ 和 $|\cdot|_k$ 分别表示 Sobolev 空间 $H^k(\Omega)^d$ ($k \geq 0$) 的范数和半范数, $(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 或 $L^2(\Omega)^d$ 的标准内积. 本文中的 C 或 c 代表一个大于 0 的常数, 在不同的地方可能代表不同的值.

定义能量范数

$$|||(v, q)||| := (|v|_1^2 + \|q\|_0^2)^{\frac{1}{2}},$$

并定义三线性形式为 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} b(u, v, w) &= ((u \cdot \nabla)v, w) + \frac{1}{2}((\nabla \cdot u)v, w) \\ &= \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)v, w) - \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)w, v), \quad \forall u, v, w \in X. \end{aligned}$$

其有下列性质 [3]:

$$\begin{aligned} b(u, v, w) &= -b(u, w, v), \\ |b(u, v, w)| &\leq N|u|_1|v|_1|w|_1, \quad \forall u, v, w \in X, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 N 是一个依赖于 Ω 的正常数.

方程 (1.1)–(1.3) 的变分形式为: 求 $(u, p) \in X \times M$, 使得

$$\nu(\nabla u, \nabla v) + b(u, u, v) - (\nabla \cdot v, p) + (\nabla \cdot u, q) = (f, v), \quad \forall (v, q) \in X \times M. \tag{2.2}$$

引理 1 [4] 设 X' 是 $H_0^1(\Omega)^d$ 的对偶空间, $f \in X'$, 方程 (1.1)–(1.3) 存在一个非奇异解 u 满足

$$\|\nabla u\|_0 \leq \nu^{-1}\|f\|_{-1}, \quad \|f\|_{-1} = \sup_{v \in X} \frac{(f, v)}{\|\nabla v\|_0}.$$

设 $T^\mu(\Omega) = \{K\}$ ($\mu = H, h$ 且 $H > h$) 是 Ω 的一个尺寸为 μ 的网格剖分, 其中细网格 $T^h(\Omega)$ 可以由粗网格 $T^H(\Omega)$ 加密得到. 基于 $T^\mu(\Omega) = \{K\}$ 的有限元空间对 (X_μ, M_μ) 满足下列假设:

(A1) 逼近性: 对任意 $(u, p) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega))^d \times (L_0^2(\Omega) \cap H^k(\Omega))$, 有

$$\|(u - u_\mu)\|_0 + \mu(\|\nabla(u - u_\mu)\|_0 + \|p - p_\mu\|_0) \leq C\mu^{s+1}(|u|_{s+1} + |p|_s), \quad 0 \leq s \leq k. \tag{2.3}$$

(A2) inf-sup 条件: 存在一个常数 $\beta > 0$ 使得

$$\beta \|q_\mu\|_0 \leq \sup_{v_\mu \in X_\mu, v_\mu \neq 0} \frac{(\nabla \cdot v_\mu, q_\mu)}{\|\nabla v_\mu\|_0}, \quad \forall q_\mu \in M_\mu. \quad (2.4)$$

记 $Y = X \times M$, $Y^h = X_h \times M_h$, $Y^H = X_H \times M_H$.

定义

$$R_1 = \{v \in H_0^1(\Omega)^d : v|_K \in (P_1)^d, \forall K \in T^\mu(\Omega)\},$$

其中 P_1 是次数不超过 1 的分片多项式空间. 我们使用的亚格子模型是基于一个椭圆投影算子 $\Pi_\mu : X \rightarrow R_1$, 其定义为

$$(\nabla \Pi_\mu u, \nabla v) = (\nabla u, \nabla v), \quad \forall u \in X, \quad v \in R_1, \quad (2.5)$$

并满足 (参见文献 [5])

$$\|\nabla \Pi_\mu v\|_0 \leq \|\nabla v\|_0, \quad \forall v \in X. \quad (2.6)$$

利用上述投影算子, 定义亚格子模型稳定项:

$$\begin{aligned} G_\mu(u, v) &= \alpha_\mu (\nabla(I - \Pi_\mu)u, \nabla(I - \Pi_\mu)v) \\ &= \alpha_\mu (\nabla u, \nabla v) - \alpha_\mu (\nabla \Pi_\mu u, \nabla v), \quad \forall u, v \in X, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 $0 < \alpha_\mu < 1$ 是一个稳定化参数.

3 两重网格算法

算法 1 两重网格方法.

(1) 求解 $(u_H, p_H) \in X_H \times M_H$, 使得 $\forall (v, q) \in X_H \times M_H$, 满足

$$(\nu + \alpha_H)(\nabla u_H, \nabla v) + b(u_H, u_H, v) - (\nabla \cdot v, p_H) + (\nabla \cdot u_H, q) = (f, v) + \alpha_H(\nabla \Pi_H u_H, \nabla v). \quad (3.1)$$

(2) 求解 $(u^h, p^h) \in X_h \times M_h$, 使得 $\forall (v, q) \in X_h \times M_h$, 满足

$$\begin{aligned} &(\nu + \alpha_h)(\nabla u^h, \nabla v) + b(u_H, u^h, v) + b(u^h, u_H, v) - (\nabla \cdot v, p^h) + (\nabla \cdot u^h, q) \\ &= (f, v) + b(u_H, u_H, v) + \alpha_h(\nabla \Pi_h u_H, \nabla v). \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3) 求解 $(e_H, r_H) \in X_H \times M_H$, 使得 $\forall (v, q) \in X_H \times M_H$, 满足

$$\begin{aligned} &(\nu + \alpha_h)(\nabla e_H, \nabla v) + b(u_H, e_H, v) + b(e_H, u_H, v) - (\nabla \cdot v, r_H) + (\nabla \cdot e_H, q) \\ &= b(u_H - u^h, u^h - u^H, v) + \alpha_h(\nabla \Pi_H(u^h - u_H), \nabla v). \end{aligned} \quad (3.3)$$

令 $u^* = u^h + e_H$, $p^* = p^h + r_H$.

定义

$$B_{\alpha_\mu}^H[(u, p); (v, q)] = (\nu + \alpha_\mu)(\nabla u, \nabla v) + b(u_H, u, v) + b(u, u_H, v) - (\nabla \cdot v, p) + (\nabla \cdot u, q),$$

则步骤 (2) 和 (3) 可以分别改写为

$$\begin{aligned} B_{\alpha_h}^H[(u^h, p^h); (v, q)] &= (f, v) + b(u_H, u_H, v) + \alpha_\mu(\nabla \Pi_h u_H, \nabla v), \\ B_{\alpha_h}^H[(e_H, r_H); (v, q)] &= b(u_H - u^h, u^h - u^H, v) + \alpha_\mu(\nabla \Pi_H(u^h - u_H), \nabla v). \end{aligned} \quad (3.4)$$

仿文献 [1] 的推导过程, 我们很容易得到下面的引理:

引理 2 $B_{\alpha_\mu}^H[(u, p); (v, q)]$ 在 $Y \times Y$ 上连续, 且存在常数 $\gamma > 0$ 满足

$$\inf_{(u,p) \in Y^h} \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{B_\alpha^H[(u,p); (v,q)]}{\| (u,p) \| \cdot \| (v,q) \|} \geq \gamma > 0. \quad (3.5)$$

由文献 [6] 中的引理 3.1、定理 3.1 和 3.2, 我们有下列引理 3.

引理 3 假设 (A1) 和 (A2) 成立, $(u, p) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega))^d \times (L_0^2(\Omega) \cap H^k(\Omega))$ 是 Navier-Stokes 方程的精确解, 当 $H \rightarrow 0$ 时, $\alpha_H \rightarrow 0$, 则存在 $H_0 > 0$ 使得对于 $H \leq H_0$, 步骤 (1) 定义的粗网格近似解 (u_H, p_H) 满足

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla u_H\|_0 &\leq \|f\|_{-1}, \\ \| (u - u_H, p - p_H) \| &\leq C(H^s + \alpha_H), \quad 1 \leq s \leq k, \\ \|u - u_H\|_0 &\leq C(H^{s+1} + H\alpha_H + \alpha_H^2), \quad 1 \leq s \leq k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

注 1 由引理 3 可以看出粗网格上稳定化参数的选取应为 $\alpha_H = \mathcal{O}(H^s)$, 才能保证所得有限元解的最优收敛阶. 这里的 s 既与真解的正则性有关, 同时也与所有限元的阶数有关, 见 (2.3).

引理 4 在引理 3 的条件下, 步骤 2 有唯一解 $(u^h, p^h) \in X_h \times M_h$, 且当 $\frac{N\|f\|_{-1}}{\nu(\nu + \alpha_h)} < 1$ 时,

$$\|\nabla u^h\|_0 \leq (\nu + \alpha_h - \nu^{-1}N\|f\|_{-1})^{-1}(1 + \nu^{-1}\alpha_h + \nu^{-2}N\|f\|_{-1})\|f\|_{-1}. \quad (3.7)$$

证明 因为 (3.2) 是一个线性问题, 引理 2、3 和 (2.6) 可得解的存在唯一性. 在 (3.2) 中取 $(v, q) = (u^h, p^h)$, 利用 (2.1) 和 (2.6) 得到

$$(\nu + \alpha_h)(\nabla u^h, \nabla u^h) + b(u^h, u_H, u^h) = (f, u^h) + b(u_H, u_H, u^h) + \alpha_h(\nabla \Pi_h u_H, \nabla u^h). \quad (3.8)$$

结合 Schwarz 不等式、(2.1)、(2.6) 和引理 3, 得到

$$\begin{aligned} (\nu + \alpha_h - \nu^{-1}N\|f\|_{-1})\|\nabla u^h\|_0^2 &\leq (\nu + \alpha_h)(\nabla u^h, \nabla u^h) + b(u^h, u_H, u^h) \\ &\leq (\|f\|_{-1} + N\|\nabla u_H\|_0^2 + \alpha_h\|\nabla u_H\|_0)\|\nabla u^h\|_0 \\ &\leq (1 + N\nu^{-2}\|f\|_{-1} + \alpha_h\nu^{-1})\|f\|_{-1}\|\nabla u^h\|_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

又知 $\nu + \alpha_h - \nu^{-1}N\|f\|_{-1} > 0$, 故结论得证. $\square$

定理 1 在引理 3 的条件下, 步骤 (2) 的解 $(u^h, p^h) \in X_h \times M_h$ 满足

$$\| (u - u^h, p - p^h) \| \leq C(h^s + H^{2s} + \alpha_h + \alpha_H^2), \quad 1 \leq s \leq k. \quad (3.10)$$

证明 从 (2.2) 中减去 (3.2), 得到

$$(\nu + \alpha_h)(\nabla(u - u^h), \nabla v) + b(u - u^h, u_H, v) + b(u_H, u - u^h, v) - ((p - p^h), \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot (u - u^h))$$

$$= b(u_H - u, u - u_H, v) + \alpha_h(\nabla u, \nabla v) - \alpha_h(\nabla \Pi_h u_H, \nabla v).$$

由 $B_{\alpha_\mu}^H[(\cdot, \cdot); (\cdot, \cdot)]$ 的定义, 上式可以写为

$$B_{\alpha_h}^H[(u - u^h, p - p^h); (v, q)] = b(u_H - u, u - u_H, v) + \alpha_h(\nabla u, \nabla v) - \alpha_h(\nabla \Pi_h u_H, \nabla v). \quad (3.11)$$

令 $(I^h u, J^h p)$ 为 (u, p) 在有限元空间 Y^h 的插值函数, 利用三角不等式、 $B_{\alpha_\mu}^H[(\cdot, \cdot); (\cdot, \cdot)]$ 的连续性、逼近性 (2.3) 和引理 2-4 得到

$$\begin{aligned} |||(u - u^h, p - p^h)||| &\leq |||(u - I^h u, p - J^h p)||| + |||(I^h u - u^h, J^h p - p^h)||| \\ &\leq |||(u - I^h u, p - J^h p)||| + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v, q) \in Y^h} \frac{B_{\alpha_h}^H[(I^h u - u^h, J^h p - p^h); (v, q)]}{|||(v, q)|||} \\ &= |||(u - I^h u, p - J^h p)||| \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v, q) \in Y^h} \frac{B_{\alpha_h}^H[(I^h u - u, J^h p - p); (v, q)] + B_{\alpha_h}^H[(u - u^h, p - p^h); (v, q)]}{|||(v, q)|||} \\ &\leq C |||(u - I^h u, p - J^h p)||| + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v, q) \in Y^h} \frac{B_{\alpha_h}^H[(u - u^h, p - p^h); (v, q)]}{|||(v, q)|||} \\ &\leq Ch^s + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v, q) \in Y^h} \frac{b(u_H - u, u - u_H, v) + \alpha_h(\nabla u, \nabla v) - \alpha_h(\nabla \Pi_h u_H, \nabla v)}{|||(v, q)|||} \\ &\leq Ch^s + C[\|\nabla(u - u_H)\|_0^2 + \alpha_h \|\nabla u\|_0 + \alpha_h \|\nabla u_H\|_0] \\ &\leq C[h^s + (H^s + \alpha_H)^2 + 2\nu^{-1} \alpha_h \|f\|_{-1}] \\ &\leq C[h^s + H^{2s} + \alpha_h + H^s \alpha_H + \alpha_H^2] \\ &\leq C[h^s + H^{2s} + \alpha_h + \alpha_H^2]. \end{aligned}$$

证毕. □

注 2 由 (3.10) 可以看出, 为取得最优渐近收敛阶, 应取

$$h = \mathcal{O}(H^2), \quad \alpha_h = \mathcal{O}(h^s), \quad \alpha_H = \mathcal{O}(H^s).$$

定理 2 在引理 3 和定理 1 的条件下, 算法 1 的解 $(u^*, p^*) \in X_h \times M_h$ 满足

$$|||(u - u^*, p - p^*)||| \leq C(h^s + H^{3s} + H^s \alpha_H^2 + H^{2s} \alpha_H + \alpha_H^3 + \alpha_h), \quad 1 \leq s \leq k. \quad (3.12)$$

证明 从 (2.2) 中减去 (3.2) 和 (3.3), 得到算法 1 的误差方程

$$\begin{aligned} &(\nu + \alpha_h)(\nabla(u - u^*), \nabla v) + b(u_H, u - u^*, v) + b(u - u^*, u_H, v) - ((p - p^*), \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot (u - u^*)) \\ &= b(u - u_H, u^h - u, v) + b(u^h - u, u^h - u, v) + b(u^h - u, u - u_H, v) \\ &\quad + \alpha_h(\nabla u, \nabla v) - \alpha_h(\nabla \Pi_h u_H, \nabla v) - \alpha_h(\nabla \Pi_H(u^h - u_H), \nabla v). \end{aligned}$$

由 $B_{\alpha_h}^H$ 的定义, 上式可以写为

$$\begin{aligned} &B_{\alpha_h}^H[(u - u^*, p - p^*); (v, q)] \\ &= b(u - u_H, u^h - u, v) + b(u^h - u, u^h - u, v) + b(u^h - u, u - u_H, v) \end{aligned}$$

$$+ \alpha_h(\nabla u, \nabla v) - \alpha_h(\nabla \Pi_h u_H, \nabla v) - \alpha_h(\nabla \Pi_H(u_H - u^h), \nabla v). \quad (3.13)$$

利用三角不等式、 $B_{\alpha_h}^H$ 的连续性、性质 (2.1) 和引理 2-4, 可得

$$|||(u - u^*, p - p^*)||| \leq |||(u - I^h u, p - J^h p)||| + |||(I^h u - u^*, J^h p - p^*)|||. \quad (3.14)$$

因为 $(I^h u - u^*, J^h p - p^*) \in Y^h$, 利用 $B_{\alpha_h}^H$ 的连续性和引理 2 可得

$$|||(I^h u - u^*, J^h p - p^*)||| \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{B_{\alpha_h}^H[(I^h u - u^*, J^h p - p^*); (v, q)]}{|||(v, q)|||} \\ & \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{B_{\alpha_h}^H[(I^h u - u, J^h p - p); (v, q)] + B_{\alpha_h}^H[(u - u^*, p - p^*); (v, q)]}{|||(v, q)|||} \\ & \leq \frac{C}{\gamma} |||(I^h u - u, J^h p - p)||| \\ & \quad + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y^h} \left\{ \frac{b(u - u_H, u^h - u, v) + b(u^h - u, u^h - u, v) + b(u^h - u, u - u_H, v)}{|||(v, q)|||} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha_h[(\nabla u, \nabla v) - (\nabla \Pi_h u_H, \nabla v) - (\nabla \Pi_H(u^h - u_H), \nabla v)]}{|||(v, q)|||} \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

由性质 (2.1)、引理 3 和定理 1 知,

$$\begin{aligned} |b(u - u_H, u^h - u, v)| + |b(u^h - u, u - u_H, v)| & \leq 2N \|\nabla(u - u_H)\|_0 \|\nabla(u - u^h)\|_0 \|\nabla v\|_0 \\ & \leq C(H^s + \alpha_H)(h^s + H^{2s} + \alpha_h + \alpha_H^2) |||(v, q)|||, \\ |b(u^h - u, u^h - u, v)| & \leq N \|\nabla(u - u^h)\|_0^2 \|\nabla v\|_0 \leq C(h^s + H^{2s} + \alpha_h + \alpha_H^2)^2 |||(v, q)|||. \end{aligned}$$

由性质 (2.6)、引理 2-4 和定理 1 知,

$$\begin{aligned} |\alpha_h(\nabla u, \nabla v)| & \leq \alpha_h \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \leq c\nu^{-1} \alpha_h \|f\|_{-1} |||(v, q)|||, \\ |\alpha_h(\nabla \Pi_h u_H, \nabla v)| & \leq \alpha_h \|\nabla u_H\|_0 \|\nabla v\|_0 \leq c\nu^{-1} \alpha_h \|f\|_{-1} |||(v, q)|||, \\ |\alpha_h(\nabla \Pi_H(u^h - u_H), \nabla v)| & \leq \alpha_h \|\nabla(u^h - u_H)\|_0 \|\nabla v\|_0 \\ & \leq \alpha_h (\|\nabla u^h\|_0 + \|\nabla u_H\|_0) |||(v, q)||| \\ & \leq c\alpha_h (\nu^{-1} \|f\|_{-1} + (\nu + \alpha_h - \nu^{-1} N \|f\|_{-1})^{-1} \\ & \quad \times (1 + \nu^{-1} \alpha_h + \nu^{-2} N \|f\|_{-1}) \|f\|_{-1}) |||(v, q)|||. \end{aligned}$$

又由逼近性 (2.3) 知,

$$|||(I^h u - u, J^h p - p)||| \leq Ch^s (\|u\|_{s+1} + \|p\|_s). \quad (3.17)$$

综上所述, 由 $0 < H, h, \alpha_h, \alpha_H < 1$ 可得

$$|||(u - u^*, p - p^*)||| \leq C(h^s + H^{3s} + H^s \alpha_H^2 + H^{2s} \alpha_H + \alpha_H^3 + \alpha_h). \quad (3.18)$$

证毕. □

注 3 由定理 2 可知, 本算法的稳定化参数 α_H 和 α_h 的选取主要由网格尺寸 H 和 h 确定, 即

$$h = \mathcal{O}(H^3), \quad \alpha_h = \mathcal{O}(h^s), \quad \alpha_H = \mathcal{O}(H^s), \quad 1 \leq s \leq k. \quad (3.19)$$

α_H 和 α_h 还与 ν 有关, 一般而言, 当 ν 减小时, α_H 和 α_h 应相应地增大才能保持算法的收敛性, 由于技术原因, 我们不能推导出稳定化参数与黏性系数 ν 的具体关系式. 我们将主要从数值实验的角度考察该问题, 详见第 4.2 小节.

4 数值模拟

本节主要通过一些数值实验来验证算法的高效性. 我们共设计了三个实验: 第一个是解析解问题; 第二个是方腔驱动流问题; 第三个是后台阶流问题, 算法以有限元软件 FreeFem++^[7] 为平台, 网格采用三角形单元, 使用 Taly-Hood 元 (P_2 - P_1 元), 粗网格上非线性迭代收敛准则为 10^{-6} , 非线性迭代次数超过 5,000 视为迭代方法失败.

4.1 解析解

本算例的精确解为

$$\begin{cases} u = (u_1, u_2)^T, & u_1 = x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1), \\ u_2 = -y^2(y-1)^2x(x-1)(2x-1), & p = (x^2 - y^2), \end{cases} \quad (4.1)$$

求解区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. 该算例主要为了检验理论分析的正确性和引入稳定项的必要性.

首先, 为测试本文算法的渐近误差, 我们在尺寸为 $h = 1/n^3$ 和 $H = h^{1/3}$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$) 的一致网格上, 用算法 1 计算 Navier-Stokes 方程的有限元解, 这里黏性系数取 $\nu = 0.01$. 对 (4.1) 给出的真解问题, 我们用 Taly-Hood 元, 理论预测能量范数的收敛率为 $\mathcal{O}(h^2)$, 即 (3.19) 对 $s = 2$ 成立. 根据注 3, 选择稳定化参数为 $\alpha_H = 0.1H^2$ 和 $\alpha_h = 0.1h^2$. 采用 Newton 迭代法求解粗网格非线性 Navier-Stokes 问题. 数据结果见表 1, 其中 it 表示满足停机准则的非线性迭代次数, CPU(s) 表示计算时间. 从表 1 可以看出, 我们的方法能得到最优渐近收敛阶的有限元解, 数据结果很好地支持了理论结果.

其次, 为了检验本文所提方法的性能, 我们在细网格上分别用单水平的亚格子模型稳定化方法^[2]、文献 [1] 的算法来计算有限元解. 数据结果分别如表 2 和 3 所示. 比较表 1-3, 这几种方法的计算近似解的精度相差不大, 特别地, 对于速度近似解而言几乎是相同的. 然而, 与单水平的亚格子模型稳定化方法^[2] 相比, 我们的方法节省了大量的计算时间, 当 $h = 1/n^3$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$) 时, 分别节省时间

表 1 算法 1 的近似解误差

h	H	CPU(s)	it	$\ \nabla(u - u^*)\ _0$	$\ p - p^*\ _0$	uH_1 -rate	pL_2 -rate
1/8	1/2	0.093	2	0.00336279	0.00164703	—	—
1/27	1/3	1.094	19	0.000211654	0.000144596	2.27358	1.99999
1/64	1/4	5.360	14	2.79889E-005	2.57349E-005	2.34419	2.00000
1/125	1/5	21.297	11	6.29747E-006	6.74655E-006	2.22825	1.99994
1/216	1/6	66.922	9	1.96873E-006	2.26233E-006	2.12584	1.99763

表 2 单水平的亚格子模型稳定化方法的近似解误差 [2]

h	CPU(s)	it	$\ \nabla(u - u_h)\ _0$	$\ p - p_h\ _0$	uH_1 -rate	pL_2 -rate
1/8	0.520	7	0.00179774	0.00164703	—	—
1/27	3.813	4	0.00012186	0.000144594	2.21261	2.00000
1/64	17.397	3	2.08067E-005	2.57347E-005	2.04809	2.00000
1/125	51.889	2	5.45644E-006	6.74620E-006	1.99943	2.00000
1/216	187.336	2	1.93979E-006	2.25932E-006	1.89082	1.99997

表 3 标准的带回溯技巧两水平方法的近似解误差 [1]

h	H	CPU(s)	it	$\ \nabla(u - u^*)\ _0$	$\ p - p^*\ _0$	uH_1 -rate	pL_2 -rate
1/8	1/2	0.515	2	0.00127498	0.001647020	—	—
1/27	1/3	0.958	2	0.00011531	0.000144594	1.97556	2.00000
1/64	1/4	5.103	2	2.05850E-005	2.57347E-005	1.99649	2.00000
1/125	1/5	20.834	2	5.39979E-006	6.74655E-006	1.99901	1.99992
1/216	1/6	67.675	2	1.80873E-006	2.26209E-006	1.99965	1.99783

表 4 算法 1 节省的运行时间

h	1/8	1/27	1/64	1/125	1/216
单水平的亚格子模型稳定化方法 (秒)	0.520	3.813	17.397	51.889	187.336
算法 1 (秒)	0.093	1.094	5.360	21.297	66.922
节省时间的百分比	82%	71%	69%	59%	64%

82%、71%、69%、59% 和 64% (详见表 4); 与文献 [1] 的算法相比, 我们的方法增加了稳定项却没有降低近似解的精度和收敛阶.

再次, 为了检验稳定项的必要性, 我们取 $\nu = 0.00001$, 分别用文献 [1] 的算法与本文算法进行了数值实验. 数值结果显示, 文献 [1] 的算法由于粗网格的非线性迭代发散导致无法得到有限元近似解, 而我们的算法却工作良好. 这验证了我们的算法加入稳定项的必要性.

4.2 方腔驱动流

在这个实验中, 考虑一个定义在单位正方形上的不可压缩方腔驱动流问题. 外部体积力 $f = 0$, 顶盖上的水平速度 $u_1 = 1$, 垂直速度 $u_2 = 0$, 其余三边的速度都为 0, 如图 1 所示. 这个问题的 Reynolds 数定义为 $Re = UL/\nu$, 其中 U 是顶盖速度, L 是侧边宽度.

网格尺寸为 $h = 1/216$, $H = 1/48$. Reynolds 数 Re 分别取为 5,000、7,500、10,000、12,500 和 15,000. 值得注意的是, 在这种网格和大 Reynolds 数的情形下, 由于粗网格上的非线性迭代发散, 因此, 文献 [1] 的算法得不到近似解.

首先固定细网格稳定性参数 $\alpha_h = 5h^2$, 分别取不同的粗网格稳定性参数 α_H 为 $10H^2$ 、 $5H^2$ 、 $2H^2$ 、 $1H^2$ 、 $0.5H^2$ 和 $0.1H^2$, 用本文的算法 1 来模拟方腔驱动流. 数值结果显示, $\alpha_H = 0.1H^2$ 时, 对于所有被测的 Reynolds 数, 粗网格上的非线性迭代皆不收敛; $\alpha_H = 0.5H^2$ 时, 对于 Reynolds 数 7,500、10,000、12,500 和 15,000, 粗网格上的非线性迭代不收敛; $\alpha_H = H^2$ 时, 对于 Reynolds 数 10,000、12,500 和 15,000, 粗网格上的非线性迭代不收敛, 非线性迭代次数详见表 5. 这说明对于给定

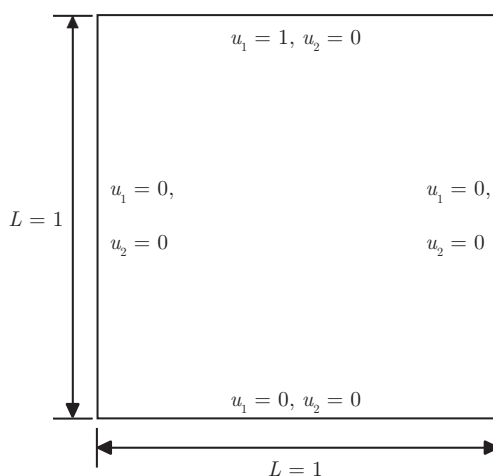


图 1 方腔驱动流示意图

表 5 方腔驱动流问题的粗网格迭代次数

α_H	$10H^2$	$5H^2$	$2H^2$	$1H^2$	$0.5H^2$	$0.1H$
$Re = 5,000$	276	159	82	51	303	—
$Re = 7,500$	388	213	104	88	—	—
$Re = 10,000$	536	279	136	—	—	—
$Re = 12,500$	917	359	176	—	—	—
$Re = 15,000$	1283	440	409	—	—	—

的网格和给定的 Reynolds 数, 为保证算法的收敛性, 粗网格的稳定化参数不能取得太小. 图 2-6 描绘了垂直中心线上的速度分量 u_1 和水平中心线上的速度分量 u_2 , 并与 Erturk 等 [8] 的结果作了比较. 图 2-6 表明, 当 Reynolds 数较小 (Re 取为 5,000 和 7,500) 时, 对于不同的粗网格稳定化参数, 所得近似解的精度没多大差别; 但当 Reynolds 数较大 (Re 取为 10,000、12,500 和 15,000) 时, $\alpha_H = 2H^2$ 的计算所得近似解的精度最好, 与 Erturk 等 [8] 的数据结果精度相当. 但文献 [8] 使用的是 601×601 的网格, 而本算法使用的是 $H = 1/48$ 和 $h = 1/216$ 的网格, 较前者节约了大量的计算时间和存储空间, 这验证了本文算法的有效性.

其次, 分别取 Reynolds 数 Re 为 5,000、7,500 和 10,000, 固定粗网格稳定性参数 $\alpha_H = 2H^2$, 分别取不同的细网格稳定性参数 α_h 为 $10h^2$ 、 $5h^2$ 、 $1h^2$ 和 $0h^2$, 用本文的算法 1 来模拟方腔驱动流. 图 7-9 表明, 与 $\alpha_h = 0h^2$ 相比, 细网格稳定项充分改善了近似解精度, 特别是 Reynolds 数较大时, 有无细网格稳定项的近似解精度差别更加明显; 同时我们也注意到, 细网格稳定性参数也不能太小, 例如, $Re = 10,000$ 时, 取 $\alpha_h = 1h^2$, 得到的近似解精度很差, 相比较而言, 比它大的参数 (α_h 取为 $5h^2$ 和 $10h^2$) 所得到的结果却很好.

为了比较不同的粗网格对方腔驱动流问题近似解精度的影响, 我们分别取不同的网格 $(1/H, 1/h) = (48, 216)$ 和 $(1/H, 1/h) = (36, 216)$, 稳定化参数都取 $(\alpha_H, \alpha_h) = (2H^2, 5h^2)$, 用本文算法数值模拟方腔驱动流问题. 图 10 和 11 表明, 当 $Re = 5,000$ 时, $H = 1/36$ 和 $H = 1/48$ 计算所得近似解的精度没有明显差别, 但当 $Re = 7,500$ 时, $H = 1/36$ 计算所得近似解的精度较差, 这说明当 Reynolds 数较大时, 粗网格的尺寸不能太粗, 否则得不到合理的近似解.

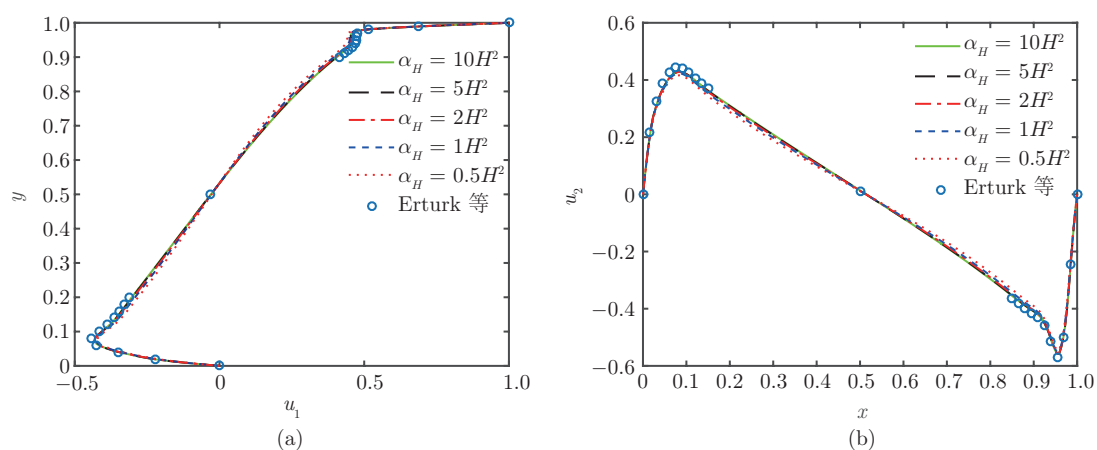


图 2 $Re = 5,000$ 和 $\alpha_h = 5h^2$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较

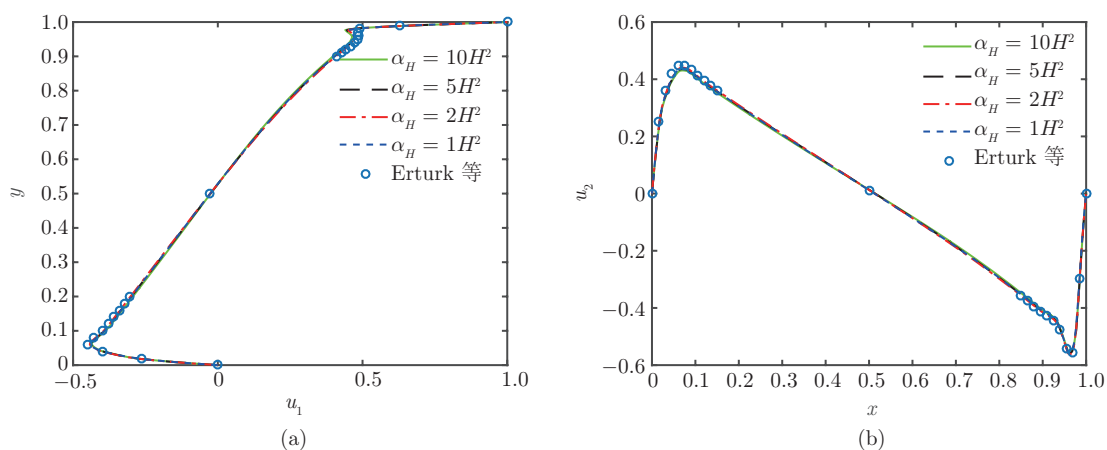


图 3 $Re = 7,500$ 和 $\alpha_h = 5h^2$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较

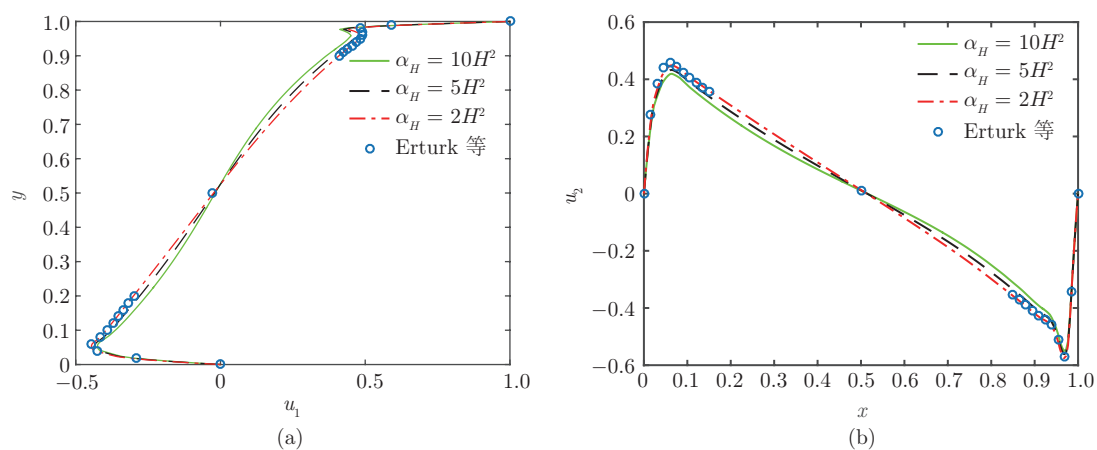
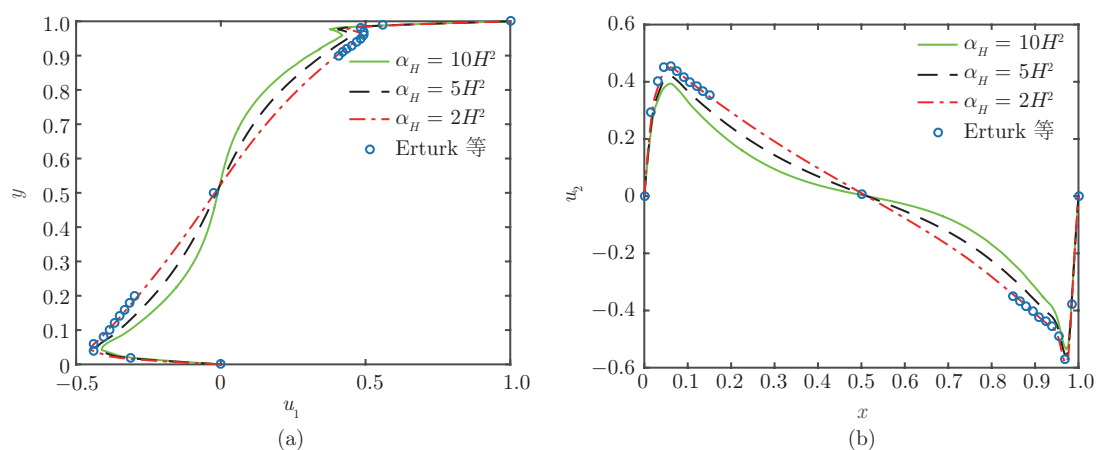
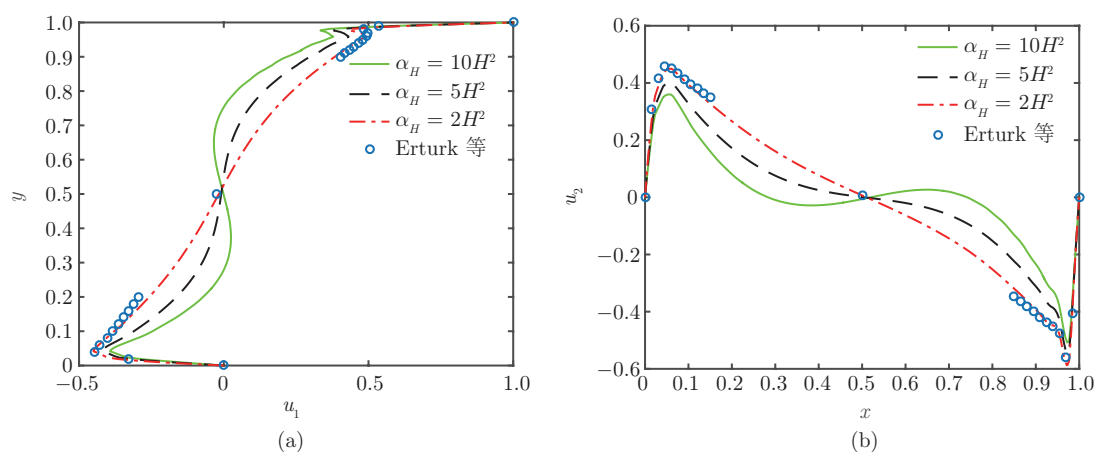
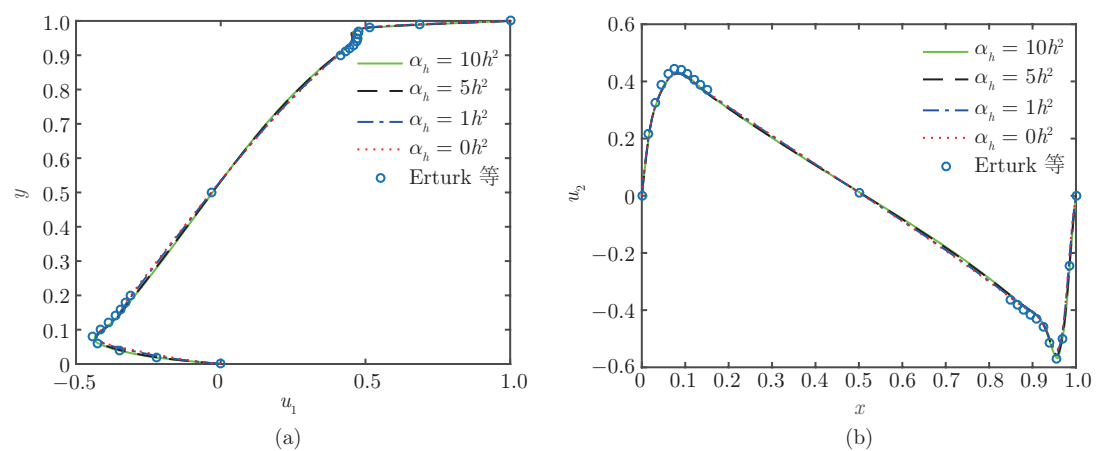


图 4 $Re = 10,000$ 和 $\alpha_h = 5h^2$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较

图 5 $Re = 12,500$ 和 $\alpha_h = 5h^2$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较图 6 $Re = 15,000$ 和 $\alpha_h = 5h^2$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较图 7 $Re = 5,000$ 和 $\alpha_H = 2H^2$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较

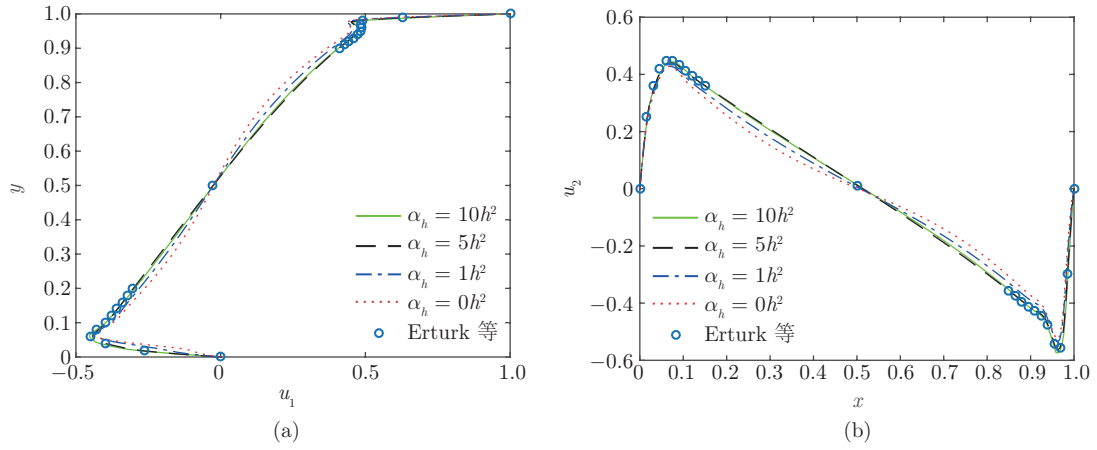


图 8 $Re = 7,500$ 和 $\alpha_H = 2H^2$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较

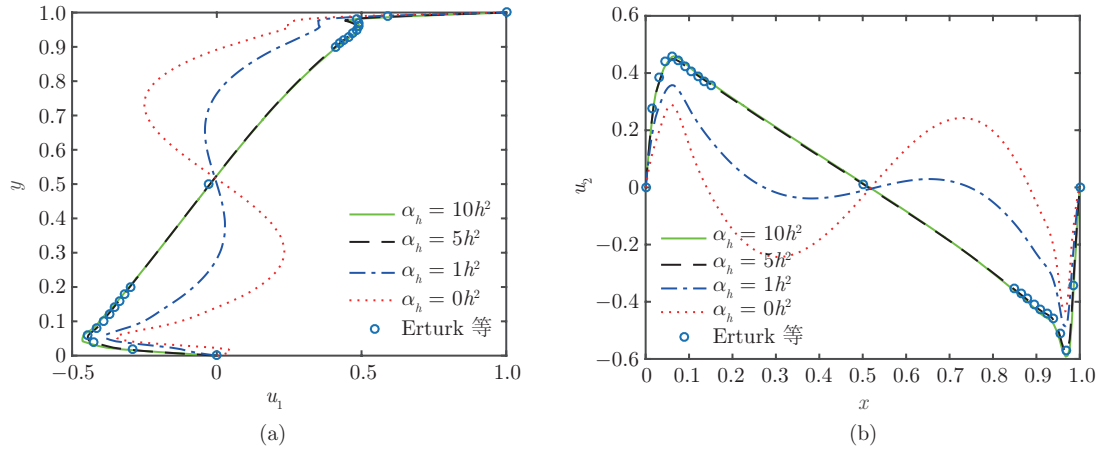


图 9 $Re = 10,000$ 和 $\alpha_H = 2H^2$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较

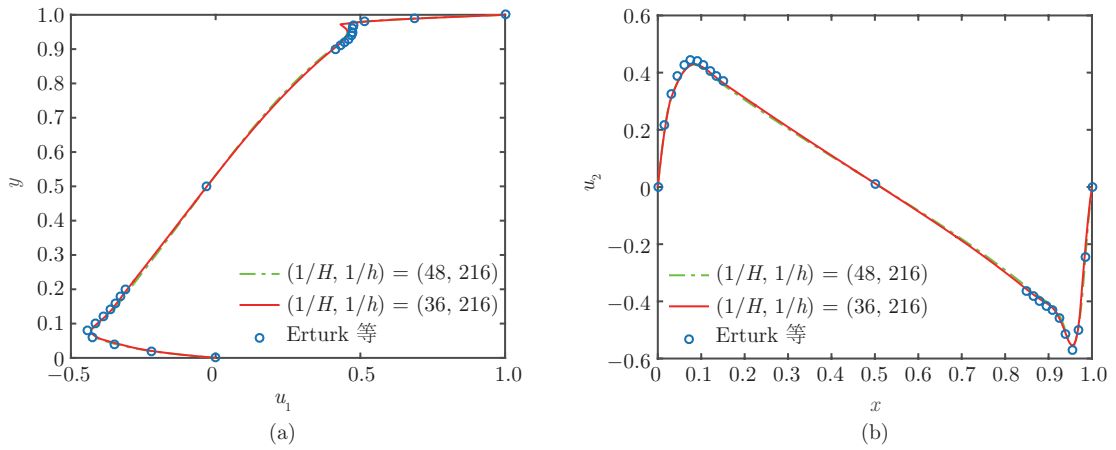


图 10 $Re = 5,000$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较

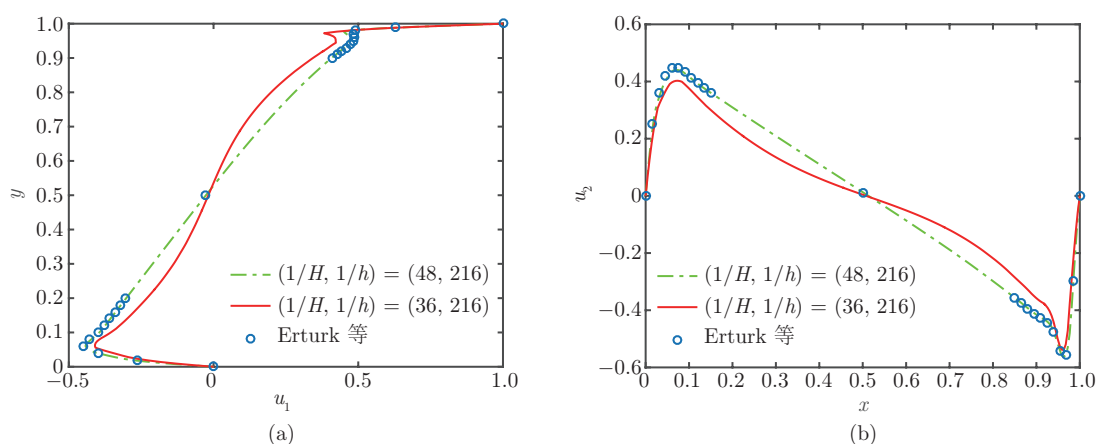


图 11 $Re = 7,500$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较

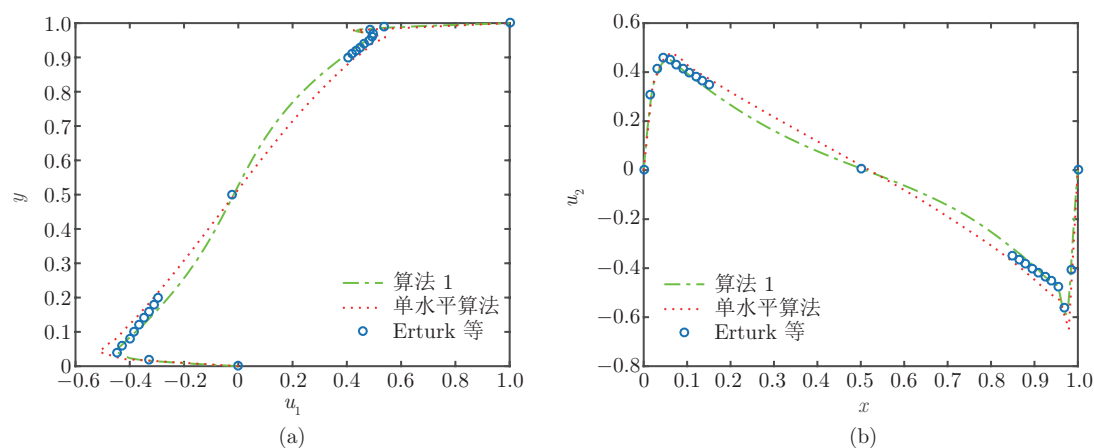


图 12 $Re = 15,000$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 与水平中线上的速度分量 u_2 (b) 的比较

最后, 为了测试本文算法细网格校正步的必要性, 我们用本文算法 1 和在粗网格上使用单水平算法 (即本文算法的步骤 (1)) 分别模拟方腔驱动流问题, 结果如图 12 所示. 可以看到我们的算法明显改善了问题的近似解精度.

4.3 后台阶流

在这个实验中, 考虑一个定义在长管道 $[0, 30] \times [-0.5, 0.5]$ 上的后台阶流问题. 边界条件如图 13 所示. 该问题的 Reynolds 数定义为

$$Re = \frac{U_{ave} L}{\nu},$$

其中 U_{ave} 是入流边界的平均速度, $L (= 1)$ 是管道的宽度. 一致网格尺寸设为 $H = 1/12$, $h = 1/32$, 稳定化参数选为 $\alpha_H = 0.01H^2$, $\alpha_h = 0.01h^2$, 粗网格上的非线性问题用 Oseen 迭代法求解.

取 Reynolds 数 $Re = 800$, 用算法 1 计算一个近似解. 图 14 和 15 中呈现的是在管道 $x = 7$ 和 $x = 15$ 处计算的速度、压力和涡度 $(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y})$, 与文献 [9] 中的结果比较, 从中可以看出我们的算法的有效性.

图 16 描述了管道上下壁的压力和剪应力 ($\nu \frac{\partial u_1}{\partial y}$), 图 17 画出了流线和压力分布图, 与文献 [9] 中的结果一致.

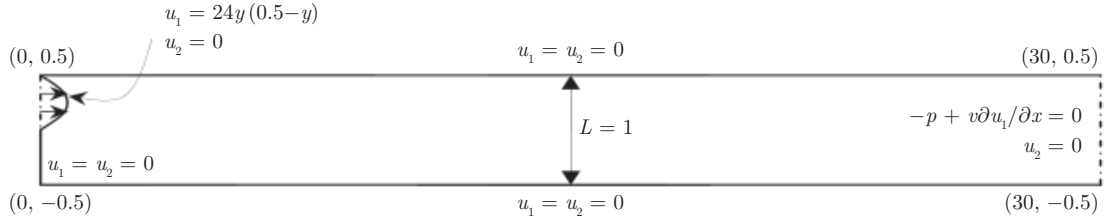


图 13 后台阶流示意图

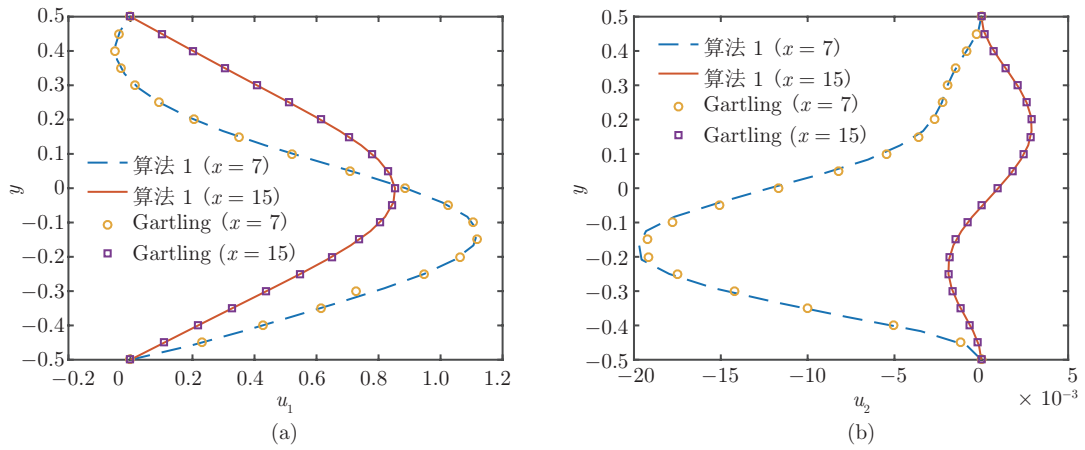


图 14 $Re = 800$ 时后台阶问题结果 ($x = 7, 15$): 速度 u_1 (a); 速度 u_2 (b)

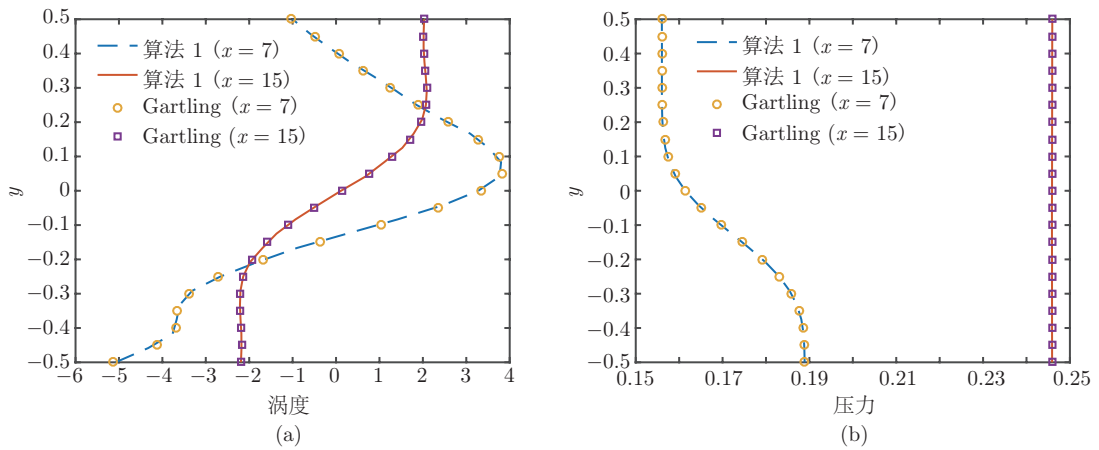


图 15 $Re = 800$ 时后台阶问题结果 ($x = 7, 15$): 涡度 (a); 压力 (b)

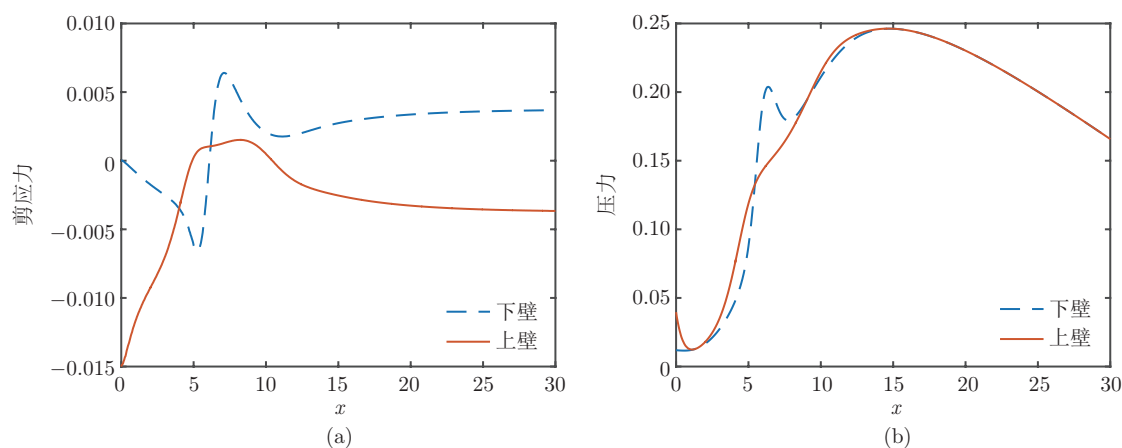


图 16 后台阶流管道上壁和下壁的剪应力 (a) 和压力 (b) 分布

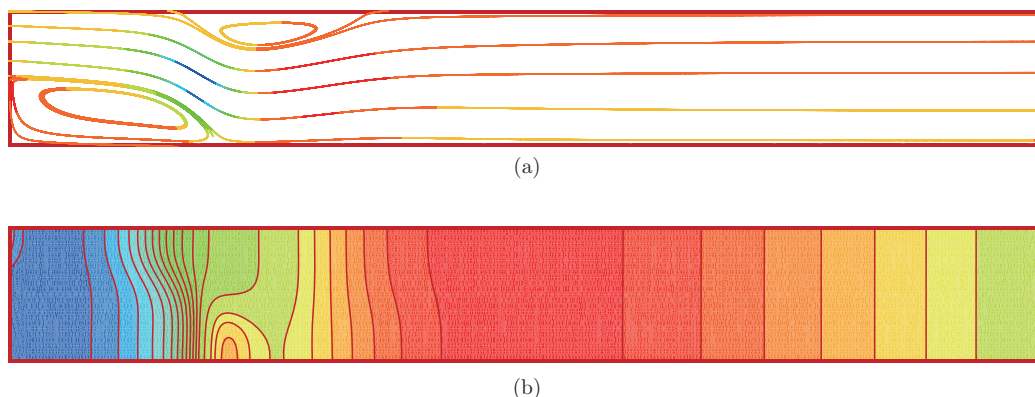


图 17 后台阶流的流线 (a) 和压力等值线 (b)

5 结束语

将标准的带回溯技巧的两水平有限元方法与亚格子模型稳定化方法相结合, 本文提出了一种数值求解大 Reynolds 数 Navier-Stokes 方程的两水平有限元方法. 该方法综合了亚格子模型稳定化方法和两重网格有限元方法的优点, 通过适当的稳定化参数和粗细网格尺寸的选取, 能取得最优收敛阶. 我们估计了所得有限元解的误差界, 并通过已知解析解、方腔驱动流和后台阶问题的数值算例, 验证了方法的有效性. 与标准的两水平方法相比, 我们的方法能模拟大 Reynolds 数问题; 而与细网格上的单水平亚格子模型相比, 我们的方法能节约大量的计算时间.

致谢 感谢审稿人的细心审阅和宝贵建议.

参考文献

- 1 Layton W, Tobiska L. A two-level method with backtracking for the Navier-Stokes equations. *SIAM J Numer Anal*, 1998, 35: 2035–2054
- 2 Zhang Y, He Y N. Assessment of subgrid-scale models for the incompressible Navier-Stokes equations. *J Comput Appl Math*, 2010, 234: 593–604
- 3 Layton W, Lenferink H W J. A multilevel mesh independence principle for the Navier-Stokes equations. *SIAM J*

- Numer Anal, 1996, 33: 17–30
- 4 He Y N, Li K T. Two-level stabilized finite element methods for the steady Navier-Stokes problem. *Computing*, 2005, 74: 337–351
 - 5 Shang Y Q. A two-level subgrid stabilized Oseen iterative method for the steady Navier-Stokes equations. *J Comput Phys*, 2013, 233: 210–226
 - 6 Shang Y Q. A parallel subgrid stabilized finite element method based on fully overlapping domain decomposition for the Navier-Stokes equations. *J Math Anal Appl*, 2013, 403: 667–679
 - 7 Hecht F. New development in freefem++. *J Numer Math*, 2012, 20: 251–265
 - 8 Erturk E, Corke T C, Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2005, 48: 747–774
 - 9 Gartling D K. A test problem for outflow boundary conditions-flow over a backward-facing step. *Internat J Numer Methods Fluids*, 1990, 11: 953–967

A two-level finite element method with backtracking technique for the Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers

Xiaocheng Yang & Yueqiang Shang

Abstract A two-level finite element method with backtracking technique for the stationary Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers is considered. The basic idea of the method is to first solve a fully nonlinear Navier-Stokes equations with a subgrid stabilization term on a coarse grid, and then solve a subgrid stabilized linear fine grid problem based on one step of Newton iteration, and finally, solve a linear correction problem on the coarse mesh. The theoretical and numerical results show that, with suitable scalings of algorithmic parameters, the method can yield an optimal convergence rate. Numerical results are also given to verify theoretical predictions and demonstrate the effectiveness of the method.

Keywords Navier-Stokes equations, high Reynolds number, backtracking technique, subgrid stabilization method, two-level method

MSC(2010) 76M10, 76D05, 65N30, 65N55

doi: 10.1360/N012017-00072