时滞微分方程广义 Hopf 分岔

郭上江^{①*}, 吴建宏^②

① 湖南大学数学与计量经济学院, 长沙 410082;

② Department of Mathematics and Statistics, York University, 4700 Keele Street, Toronto, ON, Canada M3J 1P3

E-mail: shangjguo@hnu.edu.cn, wujh@mathstat.yorku.ca

收稿日期: 2010-12-31; 接受日期: 2011-12-23; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10971057)、湖南省自然科学基金 (批准号: 10JJ1001) 和加拿大 NSERC 资助项目

摘要 本文运用 Lyapunov-Schmidt 约化方法研究了一般时滞微分方程的分岔情况, 具体分析了当参数达到一个临界值时, 系统的无穷小生成元具有一对 k 重非半单纯虚特征值的情形, 得到了判定分岔周期解存在性和分岔方向的判据, 而且该判据明显依赖于系统参数, 并通过对 van der Pol 方程的详细分析进一步验证了我们的结果.

关键词 时滞微分方程 Lyapunov-Schmidt 约化 Hopf 分岔 van der Pol 振子

MSC (2000) 主题分类 34K18, 92B20

1 引言

对给定的常数 $\tau \geq 0$, $\mathcal{C} = C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ 表示从 $[- \tau, 0]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的全体连续映射构成的集合, 对任意的 $\phi \in \mathcal{C}$ 取上确界范数 $\|\phi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$, 则 $\mathcal{C} = C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ 构成一个 Banach 空间. 通常, 若 $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$, $x: [t_0 - \tau, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为一个连续映射, 则对于任意的 $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, $x_t \in \mathcal{C}$ 定义为 $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [- \tau, 0]$. 本文考虑具参数时滞微分方程

$$\dot{x}(t) = L(\alpha)x_t + f(\alpha, x_t), \quad (1.1)$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_t \in \mathcal{C}$. 在本文中, 我们始终假设线性算子 $L(\alpha): \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 关于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 连续, $f \in C^l(\mathbb{R} \times \mathcal{C}, \mathbb{R}^n)$ 对充分大的正整数 l 成立, 且满足 $f(\alpha, 0) = 0$, 即 0 为 (1.1) 的平衡点, 另外假设 $f(\alpha, \phi)$ 关于 ϕ 的 Fréchet 导数在 $\phi = 0$ 处的取值 $D_\phi f(\alpha, 0)$ 等于零. 当参数 α 到达并经过某个临界值时, 若系统在平衡点附近的解的定性性质发生突然改变, 则称这个临界值为分岔值. 不失一般性, 我们将考虑分岔值 $\alpha = 0$ 的情况.

所谓一个系统产生 Hopf 分岔, 即当该系统的奇点的稳定性发生改变时, 在奇点的附近出现周期解的现象. 最早是在 1942 年, Hopf^[1] 发现在一般常微分方程中存在 Hopf 分岔现象. 时滞微分方程 Hopf 分岔理论的第一个结果可以追溯到 Chafee^[2] 在 1971 年的工作. 1977 年, Chow 和 Mallet-Paret^[3] 在分析计算条件下首次给出了时滞微分方程 Hopf 分岔定理的证明. 在经典的 Hopf 分岔理论中 (参见文献 [4, 5]), 时滞微分方程产生 Hopf 分岔的条件主要有三个: 首先, 该系统应当是足够光滑的; 其次, 当参数取分岔值时, 无穷小生成元具有一对共轭的单重纯虚特征值; 最后, 该纯虚根满足横截性条件, 并

且, 无穷小生成元其他的特征值都不是该纯虚特征值的整数倍. 那么, 根据隐函数定理以及空间分解理论, 所考虑的系统在分岔值的某邻域内存在小振幅周期解. 在确定一个系统存在 Hopf 分岔之后, 还要确定分岔方向、分岔周期解的稳定性、振幅和周期. 通常的做法是将时滞微分方程表示成为一个抽象的常微分方程, 系统在常数解附近必定有一个相切于中心子空间的 2 维中心流形. 这样, 我们只要考虑原来的系统在中心流形上的限制, 实际上变成一个 2 维常微分方程. 我们只要研究该常微分方程的分岔方向以及分岔周期解的稳定性便可以得到原来系统的相关性质. 例如, Faria 和 Magalhães [6], 以及 Liu 等 [7] 都是运用了这种方法. 当系统具有对称性时, 在分岔值处无穷小生成元的纯虚特征值就很可能是多重的且是半单的. 为此, Wu [8] 建立了滞后型系统等变 Hopf 分岔定理. 最近, Guo [9], Guo 和 Lamb [10] 建立了混合型和中立型系统等变 Hopf 分岔定理, 并且给出了分岔方向与分岔周期单调性等重要判据.

然而, 许多高阶时滞微分方程, 例如具有时滞反馈的 van der Pol 振子系统, 在分岔值处无穷小生成元的纯虚特征值就很可能是多重的且是非半单的, 那么会产生更复杂的 Hopf 分岔现象. 这样, 前面所提到的经典 Hopf 分岔定理与等变 Hopf 分岔定理就不再适用. 在这里, 我们将利用 Lyapunov-Schmidt 约化过程将时滞微分方程 Hopf 分岔问题转化成一个带参数的 S^1 -等变映射的静态(不动点)分岔问题.

具体来讲, 本文将研究时滞微分方程共振 Hopf 分岔. 也就是说, 在分岔值处无穷小生成元的纯虚特征值是多重的且是非半单的, 即几何重数为 1 而代数重数为 k . 目前关于常微分方程共振 Hopf 分岔的大部分研究结果是建立在正规型理论的基础之上的. 例如 [11–16], 但是, 这些结果所给出的正规型与原系统参数的相关性非常不明显. 另外, 据我们所知, 到目前为止, 关于时滞微分方程共振 Hopf 分岔的研究成果非常少, 例如 [17, 18]. 受到 Caprino 等 [19] 和 Vanderbauwhede [20] 在常微分方程方面所做工作的启发, 我们运用 Lyapunov-Schmidt 约化方法研究时滞微分方程共振 Hopf 分岔, 而且得到关于原系统参数的明显表达式, 用这些表达式来判定参数 α 改变时原系统是否存在或是存在几个周期解. 我们的方法可以很方便地运用于具体模型分析, 而没有必要进行大量的中心流形与正规型计算. 最后, 我们还将这种方法应用于研究具有时滞反馈的 van der Pol 振子系统.

本文的主要内容安排如下: 在第 2 节给出特征值和特征空间的相关结论; 在第 3 节描述 Banach 空间上的 Lyapunov-Schmidt 约化过程; 接着在第 4 节对分岔函数进行计算并建立了共振 Hopf 分岔定理; 在论文最后部分将所得结论应用于分析具时滞反馈的 van der Pol 振子系统.

2 特征值和特征空间

对每一个固定的 α , 系统 (1.1) 的线性化方程为:

$$\dot{x}(t) = L(\alpha)x_t. \quad (2.1)$$

对于每个 $\phi \in \mathcal{C}$, $x(\cdot; \alpha, \phi)$ 表示方程 (2.1) 满足初始条件 $x_0(\cdot; \alpha, \phi) = \phi$ 的唯一解, 将解算子 $T_\alpha(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 定义为 $x_t(\cdot; \alpha, \phi) = T_\alpha(t)\phi$. 下面我们回顾一下已有的关于 $L(\alpha)$ 和 $T_\alpha(t)$ 的一些结论. 如同 Hale 和 Verduyn Lunel [4] 所指出的, 存在一个各个元素均为有界变差函数的 $n \times n$ 阶矩阵值函数 $\eta(\alpha, \cdot) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, 使得下面的等式成立

$$L(\alpha)\varphi = \int_{-\tau}^0 d\eta(\alpha, \theta)\varphi(\theta), \quad \varphi \in \mathcal{C}.$$

算子集合 $\{T_\alpha(t) : t \geq 0\}$ 是一个强连续半群, 对应的无穷小生成元 $\mathcal{A}_\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 定义为

$$\mathcal{A}_\alpha \phi = \dot{\phi}, \quad \phi \in \text{Dom}(\mathcal{A}_\alpha) = \{\phi \in \mathcal{C} : \dot{\phi} \in \mathcal{C}, \dot{\phi}(0) = L(\alpha)\phi\}.$$

算子 $\mathcal{A}_\alpha$ 的谱是点谱, 且 $\sigma(\mathcal{A}_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Delta(\alpha, \lambda)v = 0 \text{ 对某些 } v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ 成立}\}$, 其中

$$\Delta(\alpha, \lambda) = \lambda \text{Id}_n - \int_{-\tau}^0 e^{\lambda\theta} d\eta(\alpha, \theta).$$

本文中, Id_m (m 为正整数) 表示 m 阶单位矩阵; $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ 是定义在 $\mathcal{C}$ 上的恒等变换; $\Delta_j(\alpha, \lambda)$ (j 为非负整数) 表示 $\Delta(\alpha, \lambda)$ 对 λ 的 j -阶偏导数; $\Delta_\alpha(\alpha, \lambda)$ 表示 $\Delta(\alpha, \lambda)$ 对 α 的一阶偏导数. 特别地, $\Delta_0(\alpha, \lambda) = \Delta(\alpha, \lambda)$.

我们将在下面的假设条件下研究系统 (1.1) 的 Hopf 分岔情况:

(NS) $\mathcal{A}_0$ 具有一对纯虚特征值 $\pm i\omega$, 并且存在某个 $k \geq 1$ 使得 $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}((\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})^j) = \min(j, k)$ 对一切 $j \in \mathbb{N}$ 都成立. 另外, $\mathcal{A}_0$ 的所有其他特征值都不是 $i\omega$ 的整数倍.

条件 (NS) 表明 $\pm i\omega$ 的几何重数为 1, 而代数重数为 k . 特别地, 当 $k = 1$ 时, $\pm i\omega$ 是单重的, 可以运用经典的 Hopf 分岔理论进行分析. 本文要考虑的是 $k > 1$ 的情形, 从而其广义特征空间为 k 维空间 $\text{Ker}((\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})^k)$. 通过直和分解, 有

$$C_{n,\tau} = \text{Ker}((\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})^k) \oplus \text{Ran}((\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})^k).$$

另外, $\text{Ker}((\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})^k)$ 还满足 $\mathcal{A}_0 \text{Ker}((\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})^k) \subseteq \text{Ker}((\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})^k)$. 设 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ 为 $\text{Ker}((\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})^k)$ 的一组基, 且对 $j = 2, 3, \dots, k$ 均有

$$(\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})\varphi_1 = 0, \quad (\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})\varphi_j = \varphi_{j-1}. \quad (2.2)$$

实际上, 我们可以得到以下结论:

引理 2.1 $\varphi_j(t) = \sum_{s=0}^{j-1} \frac{1}{s!} t^s u_{j-s} e^{i\omega t}$, $j = 1, 2, \dots, k$, 其中 $u_j \in \mathbb{C}^n$ ($j = 1, 2, \dots, k$) 满足

$$\sum_{s=0}^{j-1} \frac{1}{s!} \Delta_s(0, i\omega) u_{j-s} = 0, \quad (2.3)$$

这里 $\Delta_s(\alpha, \lambda)$ 表示 $\Delta(\alpha, \lambda)$ 对 λ 的 s 阶偏导数, $\Delta_0(\alpha, \lambda) = \Delta(\alpha, \lambda)$.

证明 根据 $(\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})\varphi_1 = 0$, 可得 $\varphi_1(t) = e^{i\omega t} u_1$, 其中 $u_1 \in \mathbb{C}^n$ 满足 $\Delta(0, i\omega) u_1 = 0$. 假设当 $j = 2, 3, \dots, m$ ($m \leq k$) 时引理 2.1 成立. 由 $(\mathcal{A}_0 - i\omega \text{Id})\varphi_{m+1} = \varphi_m$ 可知, φ_{m+1} 满足下面的微分方程

$$\dot{\varphi}(t) - i\omega \varphi(t) = \varphi_m(t). \quad (2.4)$$

该方程满足边界条件

$$L(0)\varphi - i\omega \varphi(0) = \varphi_m(0). \quad (2.5)$$

由 (2.4) 可知 $\varphi(t) = \varphi_{m+1}(t)$, 其中 $u_{m+1} \in \mathbb{C}^n$. 将该式代入到 (2.5) 中可得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=0}^m \frac{1}{s!} \left[\int_{-\tau}^0 (t+\theta)^s d\eta(0, \theta) u_{m+1-s} e^{i\omega\theta} - i\omega t^s u_{m+1-s} \right] - \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{s!} t^s u_{m-s} \\ &= -\Delta(0, i\omega) u_{m+1} + \sum_{s=0}^{m-1} \left[\int_{-\tau}^0 \frac{(t+\theta)^{s+1}}{(s+1)!} d\eta(0, \theta) u_{m-s} e^{i\omega\theta} - i\omega \frac{t^{s+1}}{(s+1)!} u_{m-s} - \frac{t^s}{s!} u_{m-s} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\Delta(0, i\omega)u_{m+1} - \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{s+1} \frac{t^l}{(s+1-l)!l!} \Delta_{s+1-l}(0, i\omega)u_{m-s} \\
&= -\sum_{s=0}^m \frac{1}{s!} \Delta_s(0, i\omega)u_{m+1-s} - \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{l=0}^s \frac{t^{l+1}}{(s-l)!l!} \Delta_{s-l}(0, i\omega)u_{m-s} \\
&= -\sum_{s=0}^m \frac{1}{s!} \Delta_s(0, i\omega)u_{m+1-s} - \sum_{l=0}^{m-1} \left[\frac{t^{l+1}}{l!} \sum_{s=l}^{m-1} \frac{1}{(s-l)!} \Delta_{s-l}(0, i\omega)u_{m-s} \right] \\
&= -\sum_{s=0}^m \frac{1}{s!} \Delta_s(0, i\omega)u_{m+1-s} - \sum_{l=0}^{m-1} \left[\frac{t^{l+1}}{l!} \sum_{s=0}^{m-l-1} \frac{1}{s!} \Delta_s(0, i\omega)u_{m-l-s} \right] \\
&= -\sum_{s=0}^m \frac{1}{s!} \Delta_s(0, i\omega)u_{m+1-s}.
\end{aligned}$$

因此, 可利用归纳法证明该引理. $\square$

为了与后面要用到的内积保持一致, 我们采用下面的双线性形式:

$$(\psi, \varphi) = \bar{\psi}^T(0)\varphi(0) - \int_{-\tau}^0 \int_0^\theta \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(0, \theta) \varphi(\xi) d\xi,$$

其中 $\psi \in C_{n,\tau}^* \stackrel{\text{def}}{=} C([0, \tau], \mathbb{C}^n)$, $\varphi \in C_{n,\tau}$. 为了方便起见, 我们允许函数在 $\mathbb{C}^n$ 上取值. $\mathcal{A}_0$ 的共轭算子 $\mathcal{A}_0^*$ 为

$$(\mathcal{A}^*\psi)(\xi) = \begin{cases} -d\psi(\xi)/d\xi, & \text{当 } \xi \in (0, \tau] \text{ 时,} \\ \int_{-\tau}^0 d\eta^T(0, \theta)\psi(-\theta), & \text{当 } \xi = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

同样, $\text{Ker}((\mathcal{A}_0^* + i\omega\text{Id})^k)$ 具有一组基 $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ 满足

$$(\mathcal{A}_0^* + i\omega\text{Id})\psi_k = 0, \quad (\mathcal{A}_0^* + i\omega\text{Id})\psi_j = \psi_{j+1}, \quad (2.6)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, k-1$. 类似于引理 2.1, 我们有如下结论:

引理 2.2 $\psi_j(t) = \sum_{s=0}^{k-j} \frac{1}{s!} (-t)^s v_{j+s} e^{i\omega t}$, $j = 1, 2, \dots, k$, 其中 $v_j \in \mathbb{C}^n$ ($j = 1, 2, \dots, k$) 满足

$$\sum_{s=0}^{k-j} \frac{1}{s!} v_{j+s}^T \Delta_s(0, -i\omega) = 0. \quad (2.7)$$

由 $\varphi_k \notin \text{Ran}(\mathcal{A}_0 - i\omega\text{Id})$ 以及 $\psi_k \in \text{Ran}(\mathcal{A}_0^* + i\omega\text{Id})$, 可知 $(\psi_k, \varphi_k) = \nu \neq 0$. 另外, 容易看出 $(\psi_j, \varphi_s) = 0$ 对所有 $j \neq s$ 都成立, 且 $(\psi_j, \varphi_j) = \nu$ 对所有 $j = 1, 2, \dots, k$ 都成立. 事实上,

$$\begin{aligned}
\nu &= \sum_{s=0}^{k-1} \bar{v}_{1+s}^T \left[\frac{(-t)^s}{s!} \text{Id}_n + \int_{-\tau}^0 \frac{(-t)^{s+1} - (-t+\theta)^{s+1}}{(s+1)!} d\eta(0, \theta) e^{i\omega\theta} \right] u_1 \\
&= \sum_{s=0}^{k-1} \bar{v}_{1+s}^T \left[\frac{(-t)^s}{s!} \text{Id}_n - \sum_{m=0}^s \frac{(-t)^m}{m!(s+1-m)!} \int_{-\tau}^0 \theta^{s+1-m} d\eta(0, \theta) e^{i\omega\theta} \right] u_1 \\
&= \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{m=0}^s \frac{(-t)^m}{m!(s+1-m)!} \bar{v}_{1+s}^T \Delta_{s+1-m}(0, i\omega) u_1 \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{s=m}^{k-1} \frac{(-t)^m}{m!(s+1-m)!} \bar{v}_{1+s}^T \Delta_{s+1-m}(0, i\omega) u_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{k-1} \left[\frac{(-t)^m}{m!} \sum_{s=m}^{k-1} \frac{1}{(s+1-m)!} \bar{v}_{1+s}^T \Delta_{s+1-m}(0, i\omega) u_1 \right] \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} \left[\frac{(-t)^m}{m!} \sum_{s=1}^{k-m} \frac{1}{s!} \bar{v}_{m+s}^T \Delta_s(0, i\omega) u_1 \right] \\
&= \sum_{s=1}^k \frac{1}{s!} \bar{v}_s^T \Delta_s(0, i\omega) u_1 + \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{(-t)^m}{m!} \sum_{s=1}^{k-m} \frac{1}{s!} \bar{v}_{m+s}^T \Delta_s(0, i\omega) u_1 \right] \\
&= \sum_{s=1}^k \frac{1}{s!} \bar{v}_s^T \Delta_s(0, i\omega) u_1 - \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{(-t)^m}{m!} \bar{v}_m^T \Delta(0, i\omega) u_1 \right] \\
&= \sum_{s=1}^k \frac{1}{s!} \bar{v}_s^T \Delta_s(0, i\omega) u_1.
\end{aligned}$$

3 Lyapunov-Schmidt 约化

在这一节, 我们将通过对系统 (1.1) 进行 Lyapunov-Schmidt 约化来寻找周期接近于 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的周期解. 我们从周期的标准化入手, 令 $\beta \in (-1, 1)$, $x(t) = u((1+\beta)t)$, 则方程 (1.1) 可转化为:

$$(1+\beta)\dot{u}(t) = L(\alpha)u_{t,\beta} + f(\alpha, u_{t,\beta}),$$

其中 $u_{t,\beta}(\theta) = u(t + (1+\beta)\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$. 为了使上述方程有意义, 我们考虑 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ 的 Banach 子空间 $\mathcal{C}_\omega$ (或 $\mathcal{C}_\omega^1$), 即由连续 (或可微) 的 $\frac{2\pi}{\omega}$ -周期函数取最大范数构成的空间. 显然, $\mathcal{C}_\omega$ 是群 $\mathbb{S}^1$ 的一个等距的 Banach 表示, 具体形式为:

$$\theta \cdot u(t) = u(t + \theta), \quad \theta \in \mathbb{S}^1.$$

本文中, 对于满足 $\theta = \exp\{i\chi\}$ 的 $\theta \in \mathbb{S}^1$ 和 χ , 我们将不作区分. 在 $\mathcal{C}_\omega$ 的复化空间上定义一个纯量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}_\omega \times \mathcal{C}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$, 具体形式为:

$$\langle v, u \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \bar{v}^T(t) u(t) dt, \quad (3.1)$$

其中 $u, v \in \mathcal{C}_\omega$. 定义映射 $F : \mathcal{C}_\omega^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{C}_\omega$ 为

$$F(u, \alpha, \beta) = -(1+\beta)\dot{u}(t) + L(\alpha)u_{t,\beta} + f(\alpha, u_{t,\beta}). \quad (3.2)$$

通过改变新引进的小变量 β , 不仅能够追踪到 (1.1) 的 ω 周期解还能得到周期靠近 ω 的周期解. 事实上, $F(u, \alpha, \beta) = 0$ 的解对应于 (1.1) 的 $\frac{2\pi}{\omega(1+\beta)}$ -周期解. 容易看出 F 是 $\mathbb{S}^1$ -等变的, 即对一切 $\theta \in \mathbb{S}^1$ 均有

$$\theta \cdot F(u, \alpha, \beta) = F(\theta \cdot u, \alpha, \beta).$$

用 $\mathcal{L}$ 表示 F 在零点处的线性化算子, 即, $\mathcal{L}u = -\dot{u} + L(0)u_t$. 显然, $\text{Ker } \mathcal{L}$ 的元素对应于线性化系统 $\dot{u} = L(0)u_t$ 的满足 $u(t) = u(t + \frac{2\pi}{\omega})$ 的解. $\mathcal{L}$ 的共轭算子为:

$$\mathcal{L}^* u = \dot{u} + \int_{-\tau}^0 d\eta^T(0, \theta) u(t - \theta),$$

即, 对一切 $u, v \in \mathcal{C}_\omega^1$, 均有 $\langle v, \mathcal{L}u \rangle = \langle \mathcal{L}^*v, u \rangle$. 由条件 (NS) 可知

$$\text{Ker} \mathcal{L} = \{\text{Re}(z\varphi_1); z \in \mathbb{C}\}, \quad \text{Ker} \mathcal{L}^* = \{\text{Re}(z\psi_k); z \in \mathbb{C}\}.$$

对任意的 $\phi \in \mathcal{C}_\omega$, 定义映射 P 和 Q 为

$$P\phi = 2\text{Re}\{\langle v_1 e^{i\omega t}, \phi \rangle \varphi_1\}, \quad Q\phi = 2\text{Re}\{\langle v_k e^{i\omega t}, \phi \rangle \varphi_k\}.$$

显然, P 和 Q 都是 $\mathbb{S}^1$ -等变的, 且 $\text{Ker} \mathcal{L} = \text{Ran} P$, $\text{Ran} \mathcal{L} = \text{Ker} Q$.

方程 $F(u, \alpha, \beta) = 0$ 等价于系统:

$$\begin{cases} (I - Q)F(v + w, \alpha, \beta) = 0, \\ QF(v + w, \alpha, \beta) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

这里, 我们已将 $u \in \mathcal{C}_\omega$ 表示成 $u = v + w$, 其中 $v = Pu \in \text{Ker} \mathcal{L}$, $w = (I - P)u \in \mathcal{C}_\omega \cap \text{Ker} P$. 由隐函数存在定理可知, 在临界点 $(u, \alpha, \beta) = (0, 0, 0)$ 附近, 系统 (3.3) 的第一个方程存在唯一解 $w = W(v, \alpha, \beta)$, 其中 $W : \text{Ker} \mathcal{L} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{C}_\omega \cap \text{Ker} P$ 是一个连续可微的 $\mathbb{S}^1$ -等变映射, 且满足 $W(0, 0, 0) = 0$. 将 $w = W(v, \alpha, \beta)$ 代入到 (3.3) 的第二个方程中可得

$$\vartheta(v, \alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} QF(v + W(v, \alpha, \beta), \alpha, \beta) = 0. \quad (3.4)$$

这样, 我们通过约化方法将所要研究的分岔问题转化成了寻找映射 $\vartheta : \text{Ker} \mathcal{L} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Ran} Q$ 的零点. 我们称 ϑ 为系统 (1.1) 的分岔映射. 由 F 和 W 的 $\mathbb{S}^1$ -等变性可知分岔映射 ϑ 也是 $\mathbb{S}^1$ -等变的, 且有

$$\vartheta(0, 0, 0) = 0, \quad \vartheta_v(0, 0, 0) = 0.$$

因此, 我们可以找到 $(0, 0, 0) \in \text{Ker} \mathcal{L} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的一个 $\mathbb{S}^1$ -不变的邻域 U , 使得 $F(u, \alpha, \beta) = 0$ 在 U 中的每一个解与 (3.4) 中定义的 $\mathbb{S}^1$ -等变映射 ϑ 的零点一一对应, 换句话说, (1.1) 的周期接近于 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的小振幅周期解对应于系统 (3.4) 的解.

令 $z = \langle v_1 e^{i\omega t}, v \rangle$, 则 $v = z\varphi_1 + \bar{z}\bar{\varphi}_1 \in \text{Ker} \mathcal{L}$, 将其代入到 (3.4) 中, 再与 ψ_k 作内积, 可得方程

$$g(z, \alpha, \beta) = 0, \quad (3.5)$$

其中 $g: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ 为

$$g(z, \alpha, \beta) = \langle \psi_k, F(\sigma(z, \alpha, \beta), \alpha, \beta) \rangle, \quad (3.6)$$

且 $\sigma(z, \alpha, \beta) = z\varphi_1 + \bar{z}\bar{\varphi}_1 + W(z\varphi_1 + \bar{z}\bar{\varphi}_1, \alpha, \beta)$. 显然, $g(\cdot, \alpha, \beta)$ 也是 $\mathbb{S}^1$ -等变的, 因此可以表示成

$$g(z, \alpha, \beta) = zh(|z|^2, \alpha, \beta),$$

这里光滑函数 $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{Z}_2$ -等变的, 从而对于非平凡解, 分岔问题约化成了方程 $h(r^2, \alpha, \beta) = 0$, 其中 $r = |z|$.

4 共振 Hopf 分岔定理

首先, 对所有的 $(z, \alpha, \beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$ 都有

$$\langle v_1 e^{i\omega t}, \sigma(z, \alpha, \beta) \rangle \equiv z \quad (4.1)$$

和

$$(\mathbf{I} - Q)F(\sigma(z, \alpha, \beta), \alpha, \beta) \equiv 0 \quad (4.2)$$

成立. 在 $z = 0$ 处分别对方程 (4.1) 和 (4.2) 求微分可得 $\langle v_1 e^{i\omega t}, \sigma_z(0, \alpha, \beta) \rangle = 1$ 和

$$(\mathbf{I} - Q)F_u(0, \alpha, \beta) \cdot \sigma_z(0, \alpha, \beta) = 0. \quad (4.3)$$

特别地, $\sigma_z(0, 0, 0) = \varphi_1$.

由 (3.6) 可知 $zh(|z|^2, \alpha, \beta) = \langle \psi_k, F(\sigma(z, \alpha, \beta), \alpha, \beta) \rangle$. 在 $z = 0$ 处对该式两边求导可得

$$h(0, \alpha, \beta) = \langle \psi_k, F_u(0, \alpha, \beta) \cdot \sigma_z(0, \alpha, \beta) \rangle. \quad (4.4)$$

从而可得出下面的引理.

引理 4.1 $h_\alpha(0, 0, 0) = -\bar{v}_k^T \Delta_\alpha(0, i\omega)u_1$, 且 $h(0, 0, \beta) = -(i\beta\omega)^k \nu + O(|\beta|^{k+1})$.

证明 由 (4.4) 式可知 $h(0, 0, 0) = 0$. 在 $\alpha = 0$ 处方程 (4.4) 两边同时对 α 求导得

$$\begin{aligned} h_\alpha(0, 0, 0) &= \langle \psi_k, F_{u\alpha}(0, 0, 0) \cdot \sigma_z(0, 0, 0) \rangle \\ &= \bar{v}_k^T \int_{-\tau}^0 d\eta_\alpha(0, \theta) \varphi_1(\theta) \\ &= -\bar{v}_k^T \Delta_\alpha(0, i\omega)u_1. \end{aligned}$$

在 (4.3) 中, 令 $\alpha = 0$ 并与 $v_j e^{i\omega t}$ 作内积, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_j e^{i\omega t}, F_u(0, 0, \beta) \cdot \sigma_z(0, 0, \beta) \rangle \\ &= \left\langle (1 + \beta)i\omega v_j e^{i\omega t} + \int_{-\tau}^0 d\eta^T(0, \theta) v_j e^{i\omega(t-\theta-\beta\theta)}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle \\ &= \left\langle (1 + \beta)i\omega v_j e^{i\omega t} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i\omega\beta)^s}{s!} \int_{-\tau}^0 \theta^s d\eta^T(0, \theta) v_j e^{i\omega(t-\theta)}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle \\ &= -\left\langle \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-i\beta\omega)^s}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_j e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^k). \end{aligned}$$

从而有

$$\langle \Delta^T(0, -i\omega) v_j e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \rangle = -\left\langle \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(-i\beta\omega)^s}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_j e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^k). \quad (4.5)$$

同样地, 利用 (4.4) 得到

$$h(0, 0, \beta) = -\left\langle \sum_{s=1}^k \frac{(-i\beta\omega)^s}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_k e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^{k+1}).$$

又由 (4.5) 式可知

$$\left\langle \sum_{l=1}^{k-1} (-i\beta\omega)^l \Delta^T(0, -i\omega) v_{k-l} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= - \left\langle \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(-i\beta\omega)^{l+s}}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_{k-l} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle \\
&= - \left\langle \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{m=s+1}^{k-1+s} \frac{(-i\beta\omega)^m}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_{k-m+s} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle \\
&= - \left\langle \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{m=s+1}^k \frac{(-i\beta\omega)^m}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_{k-m+s} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^{k+1}) \\
&= - \left\langle \sum_{m=2}^k \sum_{s=1}^{m-1} \frac{(-i\beta\omega)^m}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_{k-m+s} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^{k+1}) \\
&= - \left\langle \sum_{l=2}^k \sum_{s=1}^{l-1} \frac{(-i\beta\omega)^l}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_{k-l+s} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^{k+1}).
\end{aligned}$$

因此, 根据 (2.7) 以及 ν 的表达式可知

$$\begin{aligned}
h(0, 0, \beta) &= \left\langle \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{s=0}^{l-1} \frac{(-i\beta\omega)^l}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_{k-l+s} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^{k+1}) \\
&= \left\langle \sum_{l=2}^{k-1} \sum_{s=1}^{l-1} \frac{(-i\beta\omega)^l}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_{k-l+s} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sum_{l=1}^{k-1} (-i\beta\omega)^l \Delta^T(0, -i\omega) v_{k-l} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^{k+1}) \\
&= \left\langle \sum_{l=2}^{k-1} \sum_{s=1}^{l-1} \frac{(-i\beta\omega)^l}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_{k-l+s} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \sum_{l=2}^k \sum_{s=1}^{l-1} \frac{(-i\beta\omega)^l}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_{k-l+s} e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^{k+1}) \\
&= -(i\beta\omega)^k \left\langle \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{s!} \Delta_s^T(0, -i\omega) v_s e^{i\omega t}, \sigma_z(0, 0, \beta) \right\rangle + O(|\beta|^{k+1}) \\
&= -(i\beta\omega)^k \nu + O(|\beta|^{k+1}). \quad \square
\end{aligned}$$

令 $h_1(0, 0, 0)$ 表示 $h(u, \alpha, \beta)$ 在 $(u, \alpha, \beta) = (0, 0, 0)$ 处对 u 的一阶偏微分. 为了考虑 $h_1(0, 0, 0)$, 我们必须将系统 (1.1) 中的函数 $f(\alpha, \varphi)$ 在 $\alpha = 0$ 处关于 φ 的 Taylor 展开式, 即

$$f(0, \varphi) = \frac{1}{2} \mathcal{B}(\varphi, \varphi) + \frac{1}{6} \mathcal{E}(\varphi, \varphi, \varphi) + o(\|\varphi\|^3), \quad (4.6)$$

其中 $\varphi \in C_{n, \tau}$, 这里的 $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ 和 $\mathcal{C}(\cdot, \cdot, \cdot)$ 分别为 $f(0, \cdot)$ 的二阶和三阶导数, 且分别为 2- 和 3- 线性函数. 显然,

$$h_1(0, 0, 0) = \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} g(0, 0, 0).$$

运用与 [21] 中类似的方法, 我们可以得到

$$h_1(0, 0, 0) = \langle \psi_k, \mathcal{E}(\varphi_1, \varphi_1, \bar{\varphi}_1) \rangle + 2 \langle \psi_k, \mathcal{B}(\varphi_1, W_{11}) \rangle + \langle \psi_k, \mathcal{B}(\bar{\varphi}_1, W_{20}) \rangle, \quad (4.7)$$

其中 W_{11} 和 W_{20} 分别为 $\sigma(z, 0, 0)$ 的 Taylor 展开式中 $z\bar{z}$ 和 $\frac{z^2}{2}$ 的系数. 由 (4.2) 式可得

$$W_{20} = -\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{I} - Q)\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_1), \quad W_{11} = -\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{I} - Q)\mathcal{B}(\varphi_1, \bar{\varphi}_1).$$

注意到 $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_1), \mathcal{B}(\varphi_1, \bar{\varphi}_1) \in \text{Ran} \mathcal{L}$, 所以映射 $(I - Q)$ 在 $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_1)$ 和 $\mathcal{B}(\varphi_1, \bar{\varphi}_1)$ 上的作用相当于恒等变换. 因此,

$$\mathcal{L}W_{20} + \mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_1) = 0, \quad \mathcal{L}W_{11} + \mathcal{B}(\varphi_1, \bar{\varphi}_1) = 0.$$

另外, 由 $\text{Ran} W \subseteq \text{Ker} P$ 可知,

$$\langle v_1 e^{i\omega t}, W_{20} \rangle = 0, \quad \langle v_1 e^{i\omega t}, W_{11} \rangle = 0.$$

所以,

$$W_{20} = \Delta^{-1}(0, 2i\omega)\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_1), \quad W_{11} = \Delta^{-1}(0, 0)\mathcal{B}(\varphi_1, \bar{\varphi}_1). \quad (4.8)$$

由 (4.7) 和引理 4 可知, 约化方程 $h(r^2, \alpha, \beta) = 0$ 可写成如下形式:

$$-(i\beta\omega)^k \nu - \bar{v}_k^T \Delta_\alpha(0, i\omega) u_1 \alpha + r^2 h_1(0, 0, 0) + \text{h.o.t.} = 0.$$

由于 $\nu \neq 0$, 又可以将上面的方程进一步改写为

$$\beta^k - A\alpha + Br^2 + \text{h.o.t.} = 0, \quad (4.9)$$

其中

$$A = \frac{\bar{v}_k^T \Delta_\alpha(0, i\omega) u_1}{-(i\omega)^k \nu}, \quad B = \frac{h_1(0, 0, 0)}{-(i\omega)^k \nu}. \quad (4.10)$$

将方程 (4.9) 的实部和虚部分离开来, 可得

$$\beta^k - \alpha \text{Re}\{A\} + r^2 \text{Re}\{B\} + \text{h.o.t.} = 0 \quad (4.11)$$

和

$$-\alpha \text{Im}\{A\} + r^2 \text{Im}\{B\} + \text{h.o.t.} = 0. \quad (4.12)$$

若 $\text{Im}\{A\} \neq 0$, 即

$$\text{Im}\{i^k \bar{\nu} \bar{v}_k^T \Delta_\alpha(0, i\omega) u_1\} \neq 0, \quad (4.13)$$

由隐函数定理可知, 能从 (4.12) 式中解出 α 而得到其表达式:

$$\alpha = \alpha(r^2, \beta) := \frac{\text{Im}\{B\}}{\text{Im}\{A\}} r^2 + O(r^4, \beta). \quad (4.14)$$

将这一表达式代入到 (4.11) 中, 可得方程

$$\beta^k = \mu_0 r^2 + O(r^4, \beta), \quad (4.15)$$

其中

$$\mu_0 = \frac{\text{Im}(B\bar{A})}{\text{Im}(A)}. \quad (4.16)$$

令 $\beta = \varepsilon \sqrt[k]{r^2}$, 则方程 (4.15) 可写成 $\varepsilon^k r^2 = \mu_0 r^2 + O(r^4, \varepsilon)$, 从而

$$\varepsilon^k = \mu_0 + O(r^2, \varepsilon). \quad (4.17)$$

若 k 为奇数且 $\mu_0 \neq 0$, 则当 $r = 0$ 时, (4.17) 有唯一的解 $\varepsilon = \sqrt[k]{\mu_0}$. 由隐函数定理可知, 当 r 在 0 附近取值时, 这个唯一解仍然存在. 这就是说, $\varepsilon = \varepsilon(r)$ 是 (4.17) 满足 $\varepsilon(0) = \sqrt[k]{\mu_0}$ 的唯一解支. 如果

令 $\beta(r) = \sqrt[k]{r^2}\varepsilon(r)$, $\alpha(r) = \alpha(r^2, \beta(r))$, 其中 $\alpha(r^2, \beta)$ 由 (4.14) 给出, 则 $h(r^2, \alpha, \beta) = 0$ 有唯一的解支, 其形式为 $(r, \alpha(r), \beta(r))$, 该解支当 $r = 0$ 时经过原点 $(0, 0, 0)$, 且当 $r > 0$ 充分小时存在.

若 k 为偶数且 $\mu_0 < 0$, 则当 $r = 0$ 时, (4.17) 无解, 所以当 $|r|$ 充分小时也无解, 从而不会有分岔发生. 另一方面, 若 k 为偶数且 $\mu_0 > 0$, 则当 $r = 0$ 时, (4.17) 有两个解 $\varepsilon = \pm \sqrt[k]{\mu_0}$, 而且当 r 在 0 附近取值时, 这两个解仍然存在. 也就是说, 系统有两个解支 $\varepsilon = \varepsilon_{\pm}(r)$, 其中函数 $\varepsilon_{\pm}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 在原点的邻域内是光滑的, 且满足 $\varepsilon_{\pm}(0) = \pm \sqrt[k]{\mu_0}$. 如果令 $\beta_{\pm}(r) = \sqrt{r^2}\varepsilon_{\pm}(r)$, $\alpha_{\pm}(r) = \alpha(r^2, \beta_{\pm}(r))$, 其中 $\alpha(r^2, \beta)$ 由 (4.14) 给出, 则 $h(r^2, \alpha, \beta) = 0$ 有两个解支, 其形式为 $(r, \alpha_{\pm}(r), \beta_{\pm}(r))$, 这两个解支在 $r = 0$ 时经过原点 $(0, 0, 0)$, 且当 $r > 0$ 充分小时存在. 综上所述, 我们有下面的结论.

定理 4.1 设 A, B 和 μ_0 由 (4.10) 和 (4.16) 给出, 若 (NS) 和不等式 (4.13) 成立, 则有下列结论:

(i) 如果 k 为奇数且 $\mu_0 \neq 0$, 则对于 $(0, 0, 0)$ 附近任意的 (u, α, β) , 方程 (1.1) 有且仅有一个非平凡的 $\frac{2\pi}{(1+\beta)\omega}$ -周期解, 若 $\text{Im}\{A\}\text{Im}\{B\} > 0$ (或 $\text{Im}\{A\}\text{Im}\{B\} < 0$), 则当 $\alpha > 0$ (或者 $\alpha < 0$) 时, 该周期解存在.

(ii) 如果 k 为偶数且 $\mu_0 < 0$, 则对于 $(0, 0, 0)$ 附近任意的 (u, α, β) , 方程 (1.1) 都没有非平凡的 $\frac{2\pi}{(1+\beta)\omega}$ -周期解.

(iii) 如果 k 为偶数且 $\mu_0 > 0$, 则对于 $(0, 0, 0)$ 附近任意的 (u, α, β) , 方程 (1.1) 有两个非平凡的 $\frac{2\pi}{(1+\beta)\omega}$ -周期解, 若 $\text{Im}\{A\}\text{Im}\{B\} > 0$ (或 $\text{Im}\{A\}\text{Im}\{B\} < 0$), 则当 $\alpha > 0$ (或 $\alpha < 0$) 时, 这两个周期解都存在.

假设 $k = 1$ 时 (NS) 成立, 则无穷小生成元 $\mathcal{A}_{\alpha}$ 有一对单重的复共轭特征值 $\lambda(\alpha)$ 和 $\overline{\lambda(\alpha)}$ 满足 $\lambda(0) = i\omega$, 且存在一个 C^1 -连续函数 $u(\alpha)$ 使得 $u(0) = u_1$, $\Delta(\alpha, \lambda(\alpha))u(\alpha) \equiv 0$ 对所有充分小的 α 均成立. 该方程两边同时对 α 求导可得

$$[\Delta_{\alpha}(\alpha, \lambda(\alpha)) + \lambda'(\alpha)\Delta_1(\alpha, \lambda(\alpha))]u(\alpha) + \Delta(\alpha, \lambda(\alpha))u'(\alpha) = 0.$$

特别地, 我们有

$$[\Delta_{\alpha}(0, i\omega) + \lambda'(0)\Delta_1(0, i\omega)]u_1 + \Delta(0, i\omega)u'(0) = 0.$$

又由 $\bar{v}_1^T \Delta(0, i\beta_0) = 0$ 及 $\bar{v}_1^T \Delta_1(0, i\omega)u_1 = (\psi_1, \varphi_1) = \nu$ 可知, $\bar{v}_1^T \Delta_{\alpha}(0, i\omega)u_1 + \lambda'(0)\nu = 0$. 所以可以解出 (4.10) 式中的 A 和 B :

$$A = \frac{\lambda'(0)}{i\omega}, \quad B = \frac{h_1(0, 0, 0)}{-i\omega\nu}.$$

因此, (4.13) 等价于 $\text{Re}\{\lambda'(0)\} \neq 0$ 和

$$\text{sgn}\{\text{Im}\{A\}\text{Im}\{B\}\} = \text{sgn}\{\text{Re}\{\lambda'(0)\}\text{Re}\{\bar{\nu}h_1(0, 0, 0)\}\}.$$

另外,

$$\text{sgn}\{\mu_0\} = -\text{sgn}\{\text{Re}\{\lambda'(0)\}\text{Im}\{\lambda'(0)\nu\bar{h}_1(0, 0, 0)\}\}.$$

所以, 由定理 4.1 可得到下面的经典的 Hopf 分岔定理.

推论 4.1 如果 $k = 1$ 时 (NS) 成立, 且 $\text{Re}\{\lambda'(0)\} \neq 0$, 则系统 (1.1) 存在唯一的周期解支, 该周期解支是由平衡点 $x = 0$ 分岔产生的, 且带有参数 α . 另外,

(i) $\text{Re}\{\lambda'(0)\}\text{Re}\{\bar{\nu}h_1(0, 0, 0)\}$ 决定分岔方向: 如果 $\text{Re}\{\lambda'(0)\}\text{Re}\{\bar{\nu}h_1(0, 0, 0)\} < 0$ (或 > 0), 则当 $\alpha > 0$ (或 < 0) 时, 分岔周期解存在, 也就是说, 当 $\text{Re}\{\lambda'(0)\}\text{Re}\{\bar{\nu}h_1(0, 0, 0)\} < 0$ (或 > 0) 时, 分岔是超临界的 (或亚临界的);

(ii) $\operatorname{Re}\{\lambda'(0)\}\operatorname{Im}\{\lambda'(0)\nu\bar{h}_1(0,0,0)\}$ 决定分岔周期解的周期: 当 $\operatorname{Re}\{\lambda'(0)\}\operatorname{Im}\{\lambda'(0)\nu\bar{h}_1(0,0,0)\}$ 为正 (或负) 时, 周期大于 (或小于) $\frac{2\pi}{\omega}$.

5 具时滞 van der Pol 振子

van der Pol 振子是一个具有非线性阻尼的振子, 它的数学模型为下面这样一个二阶微分方程:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (5.1)$$

其中 x 为动态变量, $\varepsilon > 0$ 为参数. 这个模型是由 Balthasar van der Pol^[22] 提出的, 最近也有对具有时滞反馈的 van der Pol 振子模型

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = f(x(t - \tau)) \quad (5.2)$$

的研究, 如 [23, 24]. 在上面的系统中, 外力作用 $f(x(t - \tau))$ 是位置 x 的一个时滞反馈. Atay^[23] 证明了当 $\varepsilon \ll 1$ 时, (5.2) 具有稳定和不稳定的周期解; Wei 和 Jiang^[24] 则利用正规型和中心流形理论研究了 (5.2) 的 Hopf 分岔, 但是没有对非半单的 1:1 共振的情形进行分析. 实际上, 在这种情况下产生 Hopf 分岔也是非常自然的.

为简便起见, 在这部分我们始终假设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^3 -光滑的奇函数, 且满足

$$f(0) = f''(0) = 0, \quad f'(0) = \gamma, \quad f'''(0) = \delta. \quad (5.3)$$

系统 (5.2) 在平衡点 $x = 0$ 处的线性化方程的特征方程为:

$$\lambda^2 - \varepsilon\lambda + 1 = \gamma e^{-\lambda\tau}. \quad (5.4)$$

所以, Hopf 分岔曲面为:

$$\mathcal{H} = \{(\varepsilon, \tau, \gamma) : 1 - \omega^2 = \gamma \cos \tau\omega, \varepsilon\omega = \gamma \sin \tau\omega, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

我们先在分岔曲面 $\mathcal{H}$ 上找到系统 (5.2) 的非半单的 1:1 共振的 Hopf 分岔点. 方程 (5.4) 两边同时对 λ 求导, 可得

$$2\lambda - \varepsilon = -\gamma\tau e^{-\lambda\tau}. \quad (5.5)$$

将 $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$) 代入到 (5.4) 和 (5.5) 中, 可得下面的系统

$$\begin{cases} 1 - \omega^2 - i\varepsilon\omega = \gamma \cos \tau\omega - i\gamma \sin \tau\omega, \\ 2i\omega - \varepsilon = i\tau\gamma \sin \tau\omega - \tau\gamma \cos \tau\omega. \end{cases} \quad (5.6)$$

将该系统的实部和虚部分离开来, 可得下列方程:

$$\begin{cases} 1 - \omega^2 = \gamma \cos \tau\omega, \\ \varepsilon\omega = \gamma \sin \tau\omega, \\ \varepsilon = \tau\gamma \cos \tau\omega, \\ 2\omega = \tau\gamma \sin \tau\omega. \end{cases} \quad (5.7)$$

由此可得

$$\begin{cases} \varepsilon\tau = 2, \\ \tau(1 - \omega^2) = \varepsilon, \\ \tau\omega = \xi, \end{cases} \quad (5.8)$$

其中 $x = \xi$ 是方程 $x = \tan x$ 的一个解. 显然, 由 (5.8) 可知 $\tau = \sqrt{2 + \xi^2}$, $\varepsilon = 2/\sqrt{2 + \xi^2}$, 以及 $\omega = \xi/\sqrt{2 + \xi^2}$. 设 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $x = \tan x$ 的正解的一个单调递增序列, 且

$$\varepsilon_n = \frac{2}{\sqrt{2 + \xi_n^2}}, \quad \tau_n = \sqrt{2 + \xi_n^2}, \quad \gamma_n = \frac{2}{(2 + \xi_n^2) \cos \xi_n}, \quad \omega_n = \frac{\xi_n}{\sqrt{2 + \xi_n^2}}, \quad (5.9)$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立. 由此我们可得下面的结论.

引理 5.1 当且仅当 $(\varepsilon, \tau, \gamma) = (\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n)$ 时, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 方程 (5.4) 有一对双重纯虚根 $\pm i\omega_n$.

我们可以将 van der Pol 方程 (5.2) 写成如下系统:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + f(x(t - \tau)) - \varepsilon(x^2 - 1)y. \quad (5.10)$$

(5.10) 在平凡平衡点处的线性化方程和特征矩阵分别为:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \gamma x(t - \tau) + \varepsilon y \quad (5.11)$$

和

$$\Delta(\varepsilon, \tau, \gamma, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 - \gamma e^{-\lambda\tau} & \lambda - \varepsilon \end{bmatrix}.$$

设点 $(\varepsilon_0, \tau_0, \gamma_0) \in \mathcal{H} \setminus \{(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n)\}_{n=1}^\infty$, 与之对应的 $\omega_0 > 0$ 满足

$$\begin{cases} 1 - \omega_0^2 = \gamma_0 \cos \tau_0 \omega_0, \\ \varepsilon_0 \omega_0 = \gamma_0 \sin \tau_0 \omega_0, \\ 2i\omega_0 - \varepsilon_0 + \tau_0 \gamma_0 e^{-i\omega_0 \tau_0} \neq 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

这表明 (5.4) 有一对单重纯虚根 $\pm i\omega_0$, 所以 $\det \Delta(\varepsilon_0, \tau_0, \gamma_0, \pm i\omega_0) = 0$. 易知 $u_1 = (1, i\omega_0)^T$ 和 $v_1 = (-i\omega_0 - \varepsilon_0, 1)^T$ 分别满足 $\Delta(\varepsilon_0, \tau_0, \gamma_0, i\omega_0)u_1 = 0$ 和 $\bar{v}_1^T \Delta(\varepsilon_0, \tau_0, \gamma_0, i\omega_0) = 0$, 而且 $\nu = \bar{v}_1^T \Delta_1(0, i\omega_0)u_1 = 2i\omega_0 - \varepsilon_0 + \tau_0 \gamma_0 e^{-i\omega_0 \tau_0} \neq 0$. 另外, 我们可以将 (5.10) 写成 (1.1) 和 (4.6) 的形式, 其中

$$\mathcal{B}(\varphi, \psi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}(\varphi, \psi, \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{C}_2(\varphi, \psi, \phi) \end{bmatrix},$$

这里, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in C([- \tau_0, 0], \mathbb{R}^2)$, 而且

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(\varphi, \psi, \phi) &= \delta \varphi_1(-\tau_0) \psi_1(-\tau_0) \phi_1(-\tau_0) - 2\varepsilon_0 \varphi_1(0) \psi_1(0) \phi_2(0) \\ &\quad - 2\varepsilon_0 \varphi_1(0) \phi_1(0) \psi_2(0) - 2\varepsilon_0 \phi_1(0) \psi_1(0) \varphi_2(0). \end{aligned}$$

所以 $h_1(0, 0, 0) = \delta e^{-i\omega_0 \tau_0} - 2i\omega_0 \varepsilon_0$. 将 ε (或 τ , 或 γ) 作为分岔参数, 并固定 $(\tau, \gamma) = (\tau_0, \gamma_0)$ (或 $(\varepsilon, \gamma) = (\varepsilon_0, \gamma_0)$, 或 $(\varepsilon, \tau) = (\varepsilon_0, \tau_0)$), 可得 $\lambda'(\varepsilon_0) = i\omega_0/\nu$ (或 $\lambda'(\tau_0) = -i\omega_0 \gamma_0 e^{-i\omega_0 \tau_0}/\nu$, 或 $\lambda'(\gamma_0) = e^{-i\omega_0 \tau_0}/\nu$), 从而

$$\text{sgn}\{\text{Re}[\lambda'(\varepsilon_0)]\} = \text{sgn}\{2 - \tau_0 \varepsilon_0\},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\{\operatorname{Re}[\lambda'(\tau_0)]\} &= \operatorname{sgn}\{\varepsilon_0^2 + 2\omega_0^2 - 2\}, \\ \operatorname{sgn}\{\operatorname{Re}[\lambda'(\gamma_0)]\} &= \operatorname{sgn}\{\gamma_0[\tau_0\gamma_0^2 - \varepsilon_0(1 + \omega_0^2)]\}.\end{aligned}$$

又有

$$\operatorname{sgn}\{\operatorname{Re}[\bar{\nu}h_1(0, 0, 0)]\} = \operatorname{sgn}\left\{\frac{\delta}{\gamma_0}[\tau_0\gamma_0^2 - \varepsilon_0(1 + \omega_0^2)] + 2\varepsilon_0\omega_0^2(\tau_0\varepsilon_0 - 2)\right\}$$

和

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\{\operatorname{Im}[\lambda'(\varepsilon_0)\nu\bar{h}_1(0, 0, 0)]\} &= \operatorname{sgn}\{\delta\gamma_0(1 - \omega_0^2)\}, \\ \operatorname{sgn}\{\operatorname{Im}[\lambda'(\tau_0)\nu\bar{h}_1(0, 0, 0)]\} &= -\operatorname{sgn}\{\gamma_0\delta + 2\varepsilon_0^2\omega_0^2\}, \\ \operatorname{sgn}\{\operatorname{Im}[\lambda'(\gamma_0)\nu\bar{h}_1(0, 0, 0)]\} &= \operatorname{sgn}\{\gamma_0(1 - \omega_0^2)\}.\end{aligned}$$

所以由推论 4.1 可得下面的定理.

定理 5.1 对任一固定点 $(\varepsilon_0, \tau_0, \gamma_0) \in \mathcal{H} \setminus \{(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n)\}_{n=1}^\infty$, 若其对应的 $\omega_0 > 0$ 满足 (5.12), 则有以下结论:

(1) 如果 $(\tau, \gamma) = (\tau_0, \gamma_0)$, 那么 (1.1) 在平衡点 $x = 0$ 附近分岔出唯一一支依赖于参数 ε 的周期解. 若

$$\frac{\delta}{\gamma_0}[\tau_0\gamma_0^2 - \varepsilon_0(1 + \omega_0^2)](2 - \tau_0\varepsilon_0) - 2\varepsilon_0\omega_0^2(2 - \tau_0\varepsilon_0)^2 < 0$$

(或 > 0), 则该周期解当 $\varepsilon > \varepsilon_0$ (或 $< \varepsilon_0$) 时存在; 当 $\delta\gamma_0(1 - \omega_0^2)(2 - \tau_0\varepsilon_0) > 0$ (或 < 0) 时, 该周期解的周期大于 (或小于) $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

(2) 如果 $(\varepsilon, \gamma) = (\varepsilon_0, \gamma_0)$, 那么 (1.1) 在平衡点 $x = 0$ 附近分岔出唯一一支依赖于参数 τ 的周期解. 若

$$\left\{\frac{\delta}{\gamma_0}[\tau_0\gamma_0^2 - \varepsilon_0(1 + \omega_0^2)] + 2\varepsilon_0\omega_0^2(\tau_0\varepsilon_0 - 2)\right\}(\varepsilon_0^2 + 2\omega_0^2 - 2) < 0$$

(或 > 0), 则该周期解当 $\tau > \tau_0$ (或 $< \tau_0$) 时存在; 当 $(\varepsilon_0^2 + 2\omega_0^2 - 2)(\gamma_0\delta + 2\varepsilon_0^2\omega_0^2) < 0$ (或 > 0) 时, 该周期解支的周期大于 (或小于) $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

(3) 如果 $(\varepsilon, \tau) = (\varepsilon_0, \tau_0)$, 那么 (1.1) 在平衡点 $x = 0$ 附近分岔出唯一一支依赖于参数 γ 的周期解. 若

$$\delta[\tau_0\gamma_0^2 - \varepsilon_0(1 + \omega_0^2)]^2 + 2\varepsilon_0\omega_0^2\gamma_0(\tau_0\varepsilon_0 - 2)[\tau_0\gamma_0^2 - \varepsilon_0(1 + \omega_0^2)] < 0$$

(或 > 0), 则该周期解当 $\gamma > \gamma_0$ (或 $< \gamma_0$) 存在; 当 $(1 - \omega_0^2)[\tau_0\gamma_0^2 - \varepsilon_0(1 + \omega_0^2)] > 0$ (或 < 0) 时, 该周期解支的周期大于 (或小于) $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

由引理 5.1 可知, $\det \Delta(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, \pm i\omega_n) = 0$. 另外, 容易看出 $u_1 = (1, i\omega_n)^T$, $v_1 = (1, 0)^T$, 以及 $v_2 = (-i\omega_n - \varepsilon_n, 1)^T$ 满足

$$\begin{aligned}\Delta(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, i\omega_n)u_1 &= 0, \\ \bar{v}_2^T \Delta(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, i\omega_n) &= 0, \\ \bar{v}_1^T \Delta(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, i\omega_n) &= -\bar{v}_2^T \Delta_\lambda(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, i\omega_n).\end{aligned}$$

所以有 $\nu = i\xi_n$, 且有

$$\bar{v}_2^T \Delta_\varepsilon(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, i\omega_n)u_1 = -i\omega_n,$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_2^T \Delta_\tau(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, i\omega_n)u_1 &= i\omega_n \gamma_n e^{-i\xi_n}, \\ \bar{v}_2^T \Delta_\gamma(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, i\omega_n)u_1 &= -e^{-i\xi_n}.\end{aligned}$$

与前面类似, 可以得到 $h_1(0, 0, 0) = \delta e^{-i\xi_n} - 2i\omega_n \varepsilon_n$. 又由 (4.10) 可知 $B = -(2\omega_n \varepsilon_n + i\delta e^{-i\xi_n})/(\xi_n \omega_n^2)$, $(-1)^n \delta \operatorname{Im}(B) > 0$.

当 $\varepsilon, \tau, \gamma$ 分别作为分岔参数时, 我们将 (4.10) 中的 A 分别记作 $A_\varepsilon, A_\tau, A_\gamma$. 事实上, 我们有

$$A_\varepsilon = \frac{-1}{\xi_n \omega_n}, \quad A_\tau = \frac{\varepsilon_n(1 - i\xi_n)}{\xi_n^2}, \quad A_\gamma = \frac{(\xi_n + i) \cos \xi_n}{\xi_n \omega_n^2}.$$

因此, $\operatorname{Im}(A_\varepsilon) = 0$, $\operatorname{Im}(A_\tau) < 0$, 而 $(-1)^n \operatorname{Im}(A_\gamma) < 0$. 所以, 定理 4.1 仅适用于 τ 或 γ 作为分岔参数的情形.

接下来, 就分别以 τ 和 γ 为分岔参数这两种情形, 我们来计算 (4.16) 中的 μ_0 . 当以 τ 为分岔参数时, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\{\mu_0\} &= -\operatorname{sgn}\{\operatorname{Im}(h_1(0, 0, 0)v_2^T \Delta_\tau(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, -i\omega_n)\bar{u}_1)\} \\ &= \operatorname{sgn}\{\operatorname{Im}[i\gamma_n e^{i\xi_n}(\delta e^{-i\xi_n} - 2i\omega_n \varepsilon_n)]\} \\ &= \operatorname{sgn}\{\delta\gamma_n + 2\varepsilon_n^2 \omega_n^2\}.\end{aligned}$$

当以 γ 为分岔参数时, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\{\mu_0\} &= (-1)^{n-1} \operatorname{sgn}\{\operatorname{Im}(h_1(0, 0, 0)v_2^T \Delta_\gamma(\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n, -i\omega_n)\bar{u}_1)\} \\ &= (-1)^n \operatorname{sgn}\{\operatorname{Im}[e^{i\xi_n}(\delta e^{-i\xi_n} - 2i\omega_n \varepsilon_n)]\} \\ &= 1.\end{aligned}$$

运用定理 4.1, 可得下面的结论.

定理 5.2 对任何固定的 $n \in \mathbb{N}$, 方程 (5.2) 在 $(\varepsilon, \tau, \gamma) = (\varepsilon_n, \tau_n, \gamma_n)$ 经历一个非半单的 1:1 共振的 Hopf 分岔. 具体来说,

(i) 当 (ε, τ) 固定为 (ε_n, τ_n) 而让 γ 在 γ_n 附近变动时, 系统 (5.2) 在平衡点 $x = 0$ 附近分岔出两个非平凡的周期解, 如果 $\delta < 0$ (或 $\delta > 0$), 则这两个周期解当 $\gamma > \gamma_n$ (或 $\gamma < \gamma_n$) 时存在.

(ii) 若 $\delta\gamma_n + 2\varepsilon_n^2 \omega_n^2 < 0$, 并且 (ε, γ) 固定为 $(\varepsilon_n, \gamma_n)$ 而让 τ 在 τ_n 附近变动, 系统 (5.2) 在平衡点 $x = 0$ 附近并不能分岔产生非平凡周期解.

(iii) 若 $\delta\gamma_n + 2\varepsilon_n^2 \omega_n^2 > 0$, 并且 (ε, γ) 固定为 $(\varepsilon_n, \gamma_n)$ 而让 τ 在 τ_n 附近变动, 系统 (5.2) 在平衡点 $x = 0$ 附近分岔出两个非平凡的周期解, 如果 $(-1)^n \delta < 0$ (或 $(-1)^n \delta > 0$), 则这两个周期解当 $\tau > \tau_n$ (或 $\tau < \tau_n$) 时存在.

致谢 作者感谢两位审稿者的仔细检查和良好建议.

参考文献

- 1 Hopf E. Abzweigung einer periodischen lösung eines Differential Systems. Berichen Math Phys Kl Säch Akad Wiss Leipzig, 1942, 94: 1-22
- 2 Chafee N. A bifurcation problem for a functional differential equation of finitely retarded type. J Math Anal Appl, 1971, 35: 312-348

- 3 Chow S N, Mallet-Paret J. Integral averaging and bifurcation. *J Diff Equ*, 1977, 26: 112–159
- 4 Hale J K, Verduyn Lunel S M. *Introduction to Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1993
- 5 Hassard B D, Wan Y. Bifurcation formulae derived from center manifold theory. *J Math Appl Math*, 1978, 42: 297–260
- 6 Faria T, Magalhães L T. Normal forms for retarded functional differential equations with parameters and applications to Hopf bifurcation. *J Diff Equ*, 1995, 122: 181–200
- 7 Liu Z, Magal P, Ruan S. Hopf bifurcation for non-densely defined Cauchy problems. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2011, 62: 191–222
- 8 Wu J. Symmetric functional differential equations and neural networks with memory. *Trans Amer Math Soc*, 1998, 350: 4799–4838
- 9 Guo S J. Equivariant Hopf bifurcation for functional differential equations of mixed type. *Appl Math Lett* 2011, 24: 724–730
- 10 Guo S, Lamb J S W. Equivariant Hopf bifurcation for neutral functional differential equations. *Proc Amer Math Soc*, 2008, 136: 2031–2041
- 11 Cushman R, Sanders J A. Nilpotent normal forms and representation theory of $sl(2, R)$. In: Golubitski M, Guckenheimer J, eds. *Multiparameter Bifurcation Theory*, Contemp Math, vol. 56. Providence RI: American Mathematical Society, 1986, 31–51
- 12 Elphick C, Tirapequi E, Brachet M E, et al. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica D*, 1987, 29: 95–127
- 13 van Gils S A, Krupa M, Langford W F. Hopf bifurcation with non-semisimple 1:1 resonance. *Nonlinearity*, 1990, 3: 825–850
- 14 Iooss G, Adelmeyer M. *Topics in Bifurcation Theory and Applications*. Singapore: World Scientific, 1992
- 15 Namachchivaya N S, Doyle M M, Langford W F, et al. Normal form for generalized Hopf bifurcation with non-semisimple 1 : 1 resonance. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 1994, 45: 312–324
- 16 Govaerts W J F. *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamic Equilibria*. Philadelphia: SIAM, 2000
- 17 Campbell S A, Yuan Y. Zero singularities of codimension two and three in delay differential equations. *Nonlinearity*, 2008, 21: 2671–2691
- 18 Stépán G, Haller G. Quasiperiodic oscillations in robot dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 8: 513–528
- 19 Caprino S, Maffei C, Negrini P. Hopf bifurcation at 1 : 1 resonance. *Nonlinear Anal Theo Meth Appl*, 1984, 8: 1011–1032
- 20 Vanderbauwhede A. Hopf bifurcation at non-semisimple eigenvalues. In: Golubitsky M, Guckenheimer J, eds. *Multiparameter Bifurcation Theory*, Contemp Math, vol. 56. Providence RI: American Mathematical Society, 1986, 343–353
- 21 Golubitsky M, Schaeffer D G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. 1. New York: Springer-Verlag, 1985
- 22 van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. *Radio Review*, 1920, 1: 701–710; 754–762
- 23 Atay F M. Van der Pol's oscillator under delayed feedback. *J Sound Vibration*, 1998, 218: 333–339
- 24 Wei J, Jiang W. Stability and bifurcation analysis in van der Pol's oscillator with delayed feedback. *J Sound Vibration*, 2005, 283: 801–819

Generalized Hopf bifurcation in delay differential equations

GUO ShangJiang & WU JianHong

Abstract Here we employ the Lyapunov-Schmidt procedure to investigate bifurcations in a general delay differential equation when the infinitesimal generator has, for a critical value of the parameter, a pair of non-semisimple purely imaginary eigenvalues with multiplicity k . We derive criteria, explicitly in terms of the system's parameter values, for the existence of bifurcating periodic solutions and for the description of the bifurcation direction. The general result is illustrated by a detailed case study of the van der Pol oscillator.

Keywords delay differential equation, Lyapunov-Schmidt reduction, Hopf bifurcation, van der Pol oscillator

MSC(2010) 34K18, 92B20

doi: 10.1360/012010-1047