

论 文

多孔介质一般非 Darcy 流问题的块中心有限差分算法

芮洪兴^{1*}, 赵丹汇²

1. 山东大学数学学院, 济南 250100;
2. 中海油田服务股份有限公司, 三河 065201
E-mail: hxrui@sdu.edu.cn, danhuizhao@163.com

收稿日期: 2015-08-20; 接受日期: 2016-01-12; 网络出版日期: 2016-06-28; * 通信作者
国家自然科学基金(批准号: 91330106 和 11171190)资助项目

摘要 本文对描述多孔介质一般非 Darcy 流的非线性方程, 提出一类数值求解的块中心有限差分算法. 该格式保持局部质量守恒, 并能够同时获得速度和压力近似解. 在一般非均匀矩形网格上, 本文证明了速度和压力近似在离散 l^2 模意义上的二阶误差估计. 采用该格式进行的数值实验表明, 收敛阶与理论分析一致.

关键词 一般非 Darcy 流 非线性 块中心差分 二阶精度 局部质量守恒

MSC (2010) 主题分类 65N06, 65N12, 65N15

1 引言

多孔介质中的 Darcy 流在很多领域有着广泛的应用, 如油气运移和地下水污染问题. Darcy 定律

$$\mu K^{-1} \mathbf{u} = -\nabla \Phi = -\nabla(p - \rho gh)$$

描述了 Darcy 速度与压力 $\Phi = p - \rho gh$ 的梯度之间的线性关系, 其中 μ 、 ρ 、 g 和 h 分别代表黏度系数、流体密度、重力加速度和油藏深度, K 是渗透率张量. 上述关系由 Darcy 在 1856 年通过低速度和小孔隙度渗透实验而得到, 参见文献 [1]. Darcy 定律的理论推导可参见文献 [2,3].

但 Darcy 定律并不能总成立, 如高速多孔介质渗流. 1901 年, Forchheimer 通过引入一个二阶项得到上述方程的修正方程, 用来描述速度与压力梯度之间的非线性关系, 该方程称为 Forchheimer 方程(或者 Darcy-Forchheimer 方程):

$$(\mu K^{-1} + \beta \rho |\mathbf{u}|) \mathbf{u} = -\nabla \Phi,$$

Forchheimer 定律的理论推导过程可参见文献 [4]. Darcy-Forchheimer 方程可以用来描述多孔介质高速流体的运动, 但不能描述所有的非 Darcy 流动. 于是, 一般形式的非 Darcy 流被引入, 参见文献 [5–7],

$$\mu K^{-1} \left(k_{mr} + \frac{(1 - k_{mr})\mu \hat{\tau}}{\mu \hat{\tau} + \beta \rho |\mathbf{u}|} \right)^{-1} \mathbf{u} = -\nabla \Phi,$$

英文引用格式: Rui H X, Zhao D H. A block-centered finite difference method for general non-Darcy flow in porous media (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 515–532, doi: 10.1360/012016-8

或者等价形式为

$$\mu K^{-1} \left(1 + \frac{(1 - k_{mr})\beta\rho|\mathbf{u}|}{\mu\hat{\tau} + k_{mr}\rho\beta|\mathbf{u}|} \right) \mathbf{u} = -\nabla\Phi, \quad (1.1)$$

其中 k_{mr} 是最小渗透率, 与 Darcy 渗透率有关, $\hat{\tau}$ 为特征长度, 参数的意义可以参见文献 [7]. Darcy-Forchheimer 模型可以认为是 (1.1) 在 $k_{mr} = 0$ 时的特殊形式, Darcy 模型可以认为是 (1.1) 在 $k_{mr} = 1$ 时的特殊形式.

Girault 和 Wheeler [8] 给出了求解 Darcy-Forchheimer 方程的混合元法, 他们用分片常函数逼近速度, 用 Crouzeix-Raviart 非协调元逼近压力. 其构造出的混合元逼近为原始混合元^[9]. 他们证明了所构造的混合元格式的速度在 L^2 模意义下是一阶收敛的, 压力在 H^1 模意义下是一阶收敛的. 文献 [10] 用该格式进行了数值实验. Park [11] 给出了与时间相关的 Darcy-Forchheimer 模型的混合有限元方法.

近年来, 文献 [12] 提出并分析了稳态 Darcy-Forchheimer 方程的混合有限元逼近. 其混合形式和混合元是常见的对偶混合方程和混合元, 如文献 [13] 中的 R-T (Raviart-Thomas) 元和文献 [14] 中的 B-D-M (Brezzi-Douglas-Marini) 元等. 同时还给出了解的存在唯一性和误差估计最优的收敛阶. 文献 [15] 提出了混相驱油问题的混合元估计.

块中心有限差分法可看作在适当的求积公式下的最低阶 Raviart-Thomas 混合有限元法, 参见文献 [16]. 对于扩散系数为对角矩阵的线性椭圆问题, 利用块中心有限差分法得到的速度和压力, 在非均匀矩形网格上是二阶收敛的. 文献 [17, 18] 给出了张量扩散系数的线性椭圆问题的中心有限差分法. 块中心有限差分法的应用能使我们将鞍点问题转化为对称正定问题, 这种思想还被用于多点流量法, 参见文献 [19, 20].

文献 [21] 提出了 Forchheimer 数为常数的非线性 Darcy-Forchheimer 方程的块中心有限差分法. 本文考虑变系数的一般非 Darcy 问题的块中心有限差分法, 它是文献 [21] 中方法的推广. 因为在不同方向上的速度分量的逼近值在不同节点处定义, 所以, 问题的关键是, 如何给出非线性参数

$$\mu K^{-1} \left(1 + \frac{(1 - k_{mr})\beta\rho|\mathbf{u}|}{\mu\hat{\tau} + k_{mr}\rho\beta|\mathbf{u}|} \right)$$

的合适逼近. 为了保证二阶精度收敛, 也为了保证离散非线性算子的单调性, 我们通过积分平均构造一个近似值 (见 (3.8) 和 (3.9)). 我们证明该格式在非均匀矩形网格上, 速度和压力在离散 l^2 模意义下是二阶精度收敛的. 对于给定的格式, 我们给出一些数值算例来说明分析的正确性.

本文的结构如下: 第 2 节给出一些记号; 第 3 节给出块中心有限差分格式; 第 4 节给出格式的误差分析; 第 5 节给出用该格式计算的数值算例, 数值结果表明, 计算得到的误差收敛阶与理论推导一致.

本文用带或不带下标的 C 表示一个一般性正常数, 在不同处可取不同的值.

2 问题和记号

本节给出待解决问题的模型和一些记号.

多孔介质中一般形式的非 Darcy 流模型如下 (参见文献 [5-7]):

$$\begin{cases} \mu K^{-1} \left(1 + \frac{(1 - k_{mr})\beta\rho|\mathbf{u}|}{\mu\hat{\tau} + k_{mr}\rho\beta|\mathbf{u}|} \right) \mathbf{u} + \nabla p = \rho g \nabla h, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = f, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = f_N, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

相容性条件为

$$\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f_N ds, \quad (2.2)$$

其中 p 表示压力, \mathbf{u} 表示流体速度. 为简单起见, 我们在二维区域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ 上求解. \mathbf{n} 表示 Ω 边界上的单位法向量, $|\cdot|$ 表示 Euclid 范数, 即 $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. ρ 、 μ 和 β 是标量函数, 分别表示流体的密度、黏度和动态黏滞度, β 也称为 Forchheimer 数, $\hat{\tau}$ 为特征长度. $f(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$ 也是一个标量函数, 为方程组的源汇项. $\nabla h(\mathbf{x}) \in (L^2(\Omega))^d$ 是一个向量函数, 表示深度函数 $h(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$ 的梯度. $f_N(\mathbf{x}) \in L^2(\partial\Omega)$ 是一个标量函数, 表示 Neumann 边界条件或是流体从边界流出的量. k_{mr} 表示最小渗透率, 与 Darcy 渗透率有关. 关于参数更多的信息可参见文献 [7]. K 是渗透率张量, 为了简化问题, 我们假设 $K = kI$, 其中 k 是正数, I 代表单位矩阵.

不失一般性, 我们假设 $\nabla h(\mathbf{x}) = 0$ 和 $f_N = 0$. 为了简单起见, 记

$$a_0 = \frac{\mu}{k}, \quad a_1 = \frac{k_{mr}\rho\beta}{\mu\hat{\tau}}, \quad a_2 = \frac{(1 - k_{mr})\beta\rho}{k\hat{\tau}}, \quad a(w) = a_0 + \frac{a_2 w}{1 + a_1 w}. \quad (2.3)$$

根据定义, 我们知道 $a_0 > 0$ 和 $a_i \geq 0$ ($i = 1, 2$) 是有界的. 当 $k_{mr} = 1$ 时, 该问题为线性 Darcy 问题, 本文不考虑这种特殊情形. 我们考虑 $0 \leq k_{mr} < 1$ 和 $a_2 > 0$ 的情形. 假设存在正常数 \bar{a} 和 \bar{C} 使得

$$\bar{a} \leq a_0 \leq \bar{C}, \quad \bar{a} \leq a_2 \leq \bar{C}. \quad (2.4)$$

利用上面的假设和记号, 问题 (2.1) 和相容性条件 (2.2) 可以写成

$$\begin{cases} \left(a_0 + \frac{a_2 |\mathbf{u}|}{1 + a_1 |\mathbf{u}|} \right) \mathbf{u} + \nabla p = 0, & \text{在 } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \text{ 内,} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\int_{\Omega} f dx dy = 0. \quad (2.6)$$

我们将用块中心有限差分法解上面变系数问题. 参见文献 [16, 21] 中的剖分形式和记号, 用 $\delta_x \times \delta_y$ 来剖分区域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \delta_x : 0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{N_x - \frac{1}{2}} < x_{N_x + \frac{1}{2}} = 1, \\ \delta_y : 0 = y_{\frac{1}{2}} < y_{\frac{3}{2}} < \cdots < y_{N_y - \frac{1}{2}} < y_{N_y + \frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

对于任意 $i = 1, \dots, N_x$ 和 $j = 1, \dots, N_y$, 定义

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2}, & y_j &= \frac{y_{j-\frac{1}{2}} + y_{j+\frac{1}{2}}}{2}, \\ h_i &= x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, & h &= \max_i h_i, \\ h_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{h_{i+1} + h_i}{2} = x_{i+1} - x_i, \\ \tau_j &= y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}, & \tau &= \max_j \tau_j, \\ \tau_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\tau_{j+1} + \tau_j}{2} = y_{j+1} - y_j, \\ \Omega_{i,j} &= (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{i+\frac{1}{2},j} &= (x_i, x_{i+1}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}), \\ \Omega_{i,j+\frac{1}{2}} &= (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_j, y_{j+1}).\end{aligned}$$

这里采用不等距网格使结果更具有一般性, 同时由于实际多孔介质存在断层和复杂结构, 不等距网格也十分必要. 我们假设剖分是拟一致正规的, 即存在与剖分无关的常数 C_0 使得

$$\rho_{i,j} = \min_{\Omega_{i,j}} \{h_i, \tau_j\} \geq C_0 \max\{h, \tau\}. \quad (2.7)$$

为了构造格式, 我们将 $\Omega_{i,j}$ 剖分成 4 个小矩形区域:

$$\begin{aligned}\Omega_{i,j}^{L,T} &= (x_{i-\frac{1}{2}}, x_i) \times (y_j, y_{j+\frac{1}{2}}), & \Omega_{i,j}^{R,T} &= (x_i, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_j, y_{j+\frac{1}{2}}), \\ \Omega_{i,j}^{L,B} &= (x_{i-\frac{1}{2}}, x_i) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_j), & \Omega_{i,j}^{R,B} &= (x_i, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_j),\end{aligned}$$

其中上标 “ L ”、“ R ”、“ T ” 和 “ B ” 分别表示 “Left”、“Right”、“Top” 和 “Bottom”. 图 1 是子区域分割的一个简单说明, $c_{l,m} = (x_l, y_m)$. 于是, 显然得到

$$\begin{cases} \Omega_{i,j} = \Omega_{i,j}^{L,T} \cup \Omega_{i,j}^{R,T} \cup \Omega_{i,j}^{L,B} \cup \Omega_{i,j}^{R,B}, \\ \Omega_{i+\frac{1}{2},j} = \Omega_{i,j}^{R,T} \cup \Omega_{i,j}^{R,B} \cup \Omega_{i+1,j}^{L,T} \cup \Omega_{i+1,j}^{L,B}, \\ \Omega_{i,j+\frac{1}{2}} = \Omega_{i,j}^{L,T} \cup \Omega_{i,j}^{R,T} \cup \Omega_{i,j+1}^{L,B} \cup \Omega_{i,j+1}^{R,B}. \end{cases} \quad (2.8)$$

对于函数 $\theta(x, y)$, 令 $\theta_{l,m} = \theta(x_l, y_m)$, 其中 l 可以取值 i 和 $i + \frac{1}{2}$, m 可以取值 j 和 $j + \frac{1}{2}$, i 和 j 均为非负整数. 对于离散函数在离散点处的值, 定义为

$$\begin{aligned}[d_x \theta]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2}}}, & [D_x \theta]_{i,j} &= \frac{\theta_{i+\frac{1}{2},j} - \theta_{i-\frac{1}{2},j}}{h_i}, \\ [d_y \theta]_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\tau_{j+\frac{1}{2}}}, & [D_y \theta]_{i,j} &= \frac{\theta_{i,j+\frac{1}{2}} - \theta_{i,j-\frac{1}{2}}}{\tau_j}.\end{aligned}$$

同时, 定义离散内积和离散 l^2 模为

$$\begin{aligned}(\theta, \xi)_M &= (\theta, \xi)_{M_x, M_y} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_i \tau_j \theta_{i,j} \xi_{i,j}, \\ (\theta, \xi)_x &= (\theta, \xi)_{T_x, M_y} = \sum_{i=2}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i-\frac{1}{2}} \tau_j \theta_{i-\frac{1}{2},j} \xi_{i-\frac{1}{2},j},\end{aligned}$$

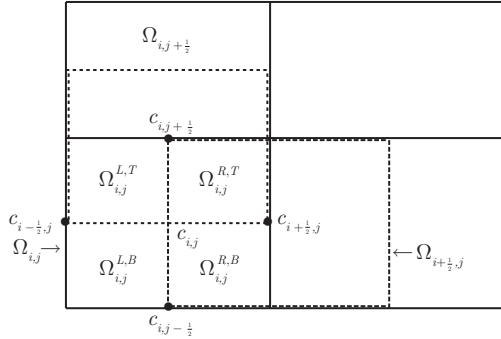


图 1 网格划分

$$(\theta, \xi)_y = (\theta, \xi)_{M_x, T_y} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=2}^{N_y} h_i \tau_{j-\frac{1}{2}} \theta_{i,j-\frac{1}{2}} \xi_{i,j-\frac{1}{2}},$$

$$\|\theta\|_M^2 = (\theta, \theta)_{M_x, M_y}, \quad \|\theta\|_x^2 = (\theta, \theta)_x, \quad \|\theta\|_y^2 = (\theta, \theta)_y.$$

3 块中心有限差分算法

本节给出问题 (2.5) 和 (2.6) 的块中心有限差分解法.

定义

$$F_{i,j} = \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} \int_{\Omega_{i,j}} f dx = \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f dx dy. \quad (3.1)$$

那么 $f_{i,j}$ 是 $F_{i,j}$ 的一个二阶逼近, 即

$$f_{i,j} = F_{i,j} + O(h^2 + \tau^2). \quad (3.2)$$

为了定义格式, 我们做些准备. 对于一个离散函数 $\{q_{i,j}\}$, 定义 Ω 上一个分片常函数, 满足

$$\Pi_h q(x, y) = q_{i,j}, \quad (x, y) \in \Omega_{i,j}. \quad (3.3)$$

对于一组离散函数 $\{V_{i+\frac{1}{2}, j}^x\}$ 和 $\{V_{i, j+\frac{1}{2}}^y\}$, 定义差值 $\Pi_2 V$ 如下:

$$\Pi_2 V = (\Pi_x V^x, \Pi_y V^y), \quad (3.4)$$

其中

$$\begin{cases} \Pi_x V^x(x, y) = V_{i+\frac{1}{2}, j}^x, & (x, y) \in \Omega_{i+\frac{1}{2}, j}, \\ \Pi_y V^y(x, y) = V_{i, j+\frac{1}{2}}^y, & (x, y) \in \Omega_{i, j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

用 $|(U, V)|$ 标记 (U, V) 的范数函数, 根据 $\Omega_{i,j}$ 的划分, 对于 $l = 1, 2$, 定义

$$I_h a_l = \begin{cases} a_{l, i+\frac{1}{4}, j+\frac{1}{4}}, & \text{在 } \Omega_{i,j}^{R,T} \text{ 上,} \\ a_{l, i+\frac{1}{4}, j-\frac{1}{4}}, & \text{在 } \Omega_{i,j}^{R,B} \text{ 上,} \\ a_{l, i-\frac{1}{4}, j+\frac{1}{4}}, & \text{在 } \Omega_{i,j}^{L,T} \text{ 上,} \\ a_{l, i-\frac{1}{4}, j-\frac{1}{4}}, & \text{在 } \Omega_{i,j}^{L,B} \text{ 上.} \end{cases} \quad l = 1, 2. \quad (3.5)$$

用参数 a_1, a_2 和一组离散函数 V_x, V_y , 定义两个平均算子 Q_x 和 Q_y :

$$[Q_x(a_1, a_2, V)]_{i+\frac{1}{2}, j} = \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}, j}|} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2}, j}} \frac{I_h a_1 |(\Pi_x V^x, \Pi_y V^y)|}{1 + I_h a_2 |(\Pi_x V^x, \Pi_y V^y)|} dx dy, \quad (3.6)$$

$$[Q_y(a_1, a_2, V)]_{i, j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\Omega_{i, j+\frac{1}{2}}|} \int_{\Omega_{i, j+\frac{1}{2}}} \frac{I_h a_1 |(\Pi_x V^x, \Pi_y V^y)|}{1 + I_h a_2 |(\Pi_x V^x, \Pi_y V^y)|} dx dy. \quad (3.7)$$

直接计算得到

$$[Q_x(a_1, a_2, V)]_{i+\frac{1}{2}, j}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4h_{i+\frac{1}{2}}} \left\{ h_i \left[\frac{a_{2,i+\frac{1}{4},j+\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|}{1 + a_{1,i+\frac{1}{4},j+\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|} + \frac{a_{2,i+\frac{1}{4},j-\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i,j-\frac{1}{2}}^y)|}{1 + a_{1,i+\frac{1}{4},j-\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i,j-\frac{1}{2}}^y)|} \right] \right. \\
&\quad \left. + h_{i+1} \left[\frac{a_{2,i+\frac{3}{4},j+\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^y)|}{1 + a_{1,i+\frac{3}{4},j-\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i+1,j-\frac{1}{2}}^y)|} + \frac{a_{2,i+\frac{3}{4},j-\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i+1,j-\frac{1}{2}}^y)|}{1 + a_{1,i+\frac{3}{4},j-\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i+1,j-\frac{1}{2}}^y)|} \right] \right\} \\
&\equiv \frac{1}{4h_{i+\frac{1}{2}}} \{h_i [Q_1 + Q_2] + h_{i+1} [Q_3 + Q_4]\}, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[Q_y(a_1, a_2, V)]_{i,j+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4\tau_{j+\frac{1}{2}}} \left\{ \tau_j \left[\frac{a_{2,i+\frac{1}{4},j+\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|}{1 + a_{1,i+\frac{1}{4},j+\frac{1}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|} + \frac{a_{2,i-\frac{1}{4},j+\frac{1}{4}} |(V_{i-\frac{1}{2},j}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|}{1 + a_{1,i-\frac{1}{4},j+\frac{1}{4}} |(V_{i-\frac{1}{2},j}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|} \right] \right. \\
&\quad \left. + \tau_{j+1} \left[\frac{a_{2,i+\frac{1}{4},j+\frac{3}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j+1}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|}{1 + a_{1,i+\frac{1}{4},j+\frac{3}{4}} |(V_{i+\frac{1}{2},j+1}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|} + \frac{a_{2,i-\frac{1}{4},j+\frac{3}{4}} |(V_{i-\frac{1}{2},j+1}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|}{1 + a_{1,i-\frac{1}{4},j+\frac{3}{4}} |(V_{i-\frac{1}{2},j+1}^x, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)|} \right] \right\}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

定义速度 $u = (u^x, u^y)$, 用 $\{U_{i+\frac{1}{2},j}^x\}$ 、 $\{U_{i,j+\frac{1}{2}}^y\}$ 和 $\{P_{i,j}\}$ 分别表示 $\{u^x(x_{i+\frac{1}{2},j})\}$ 、 $\{u^y(x_{i,j+\frac{1}{2}})\}$ 和 $\{p(x_{i,j})\}$ 的块中心有限差分逼近值. 我们给出如下格式:

格式 求离散函数 $\{U_{i+\frac{1}{2},j}^x\}$ 、 $\{U_{i,j+\frac{1}{2}}^y\}$ 和 $\{P_{i,j}\}$ 使得

$$[D_x U^x]_{i,j} + [D_y U^y]_{i,j} = f_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq N_x, \quad 1 \leq j \leq N_y, \tag{3.10}$$

$$(a_0 + [Q_x(a_1, a_2, U)])_{i+\frac{1}{2},j} U_{i+\frac{1}{2},j}^x = -[d_x P]_{i+\frac{1}{2},j}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y, \tag{3.11}$$

$$(a_0 + [Q_y(a_1, a_2, U)])_{i,j+\frac{1}{2}} U_{i,j+\frac{1}{2}}^y = -[d_y P]_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N_x, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} U_{i+\frac{1}{2},j}^x = 0, & i = 0, N_x, \quad 1 \leq j \leq N_y, \\ U_{i,j+\frac{1}{2}}^y = 0, & 1 \leq i \leq N_x, \quad j = 0, N_y, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$p(x_{1,1}) = P_{1,1} = 0, \tag{3.14}$$

其中 (3.13) 为边界条件. 压力 p 和它的逼近值 P 在相差一个常数的意义下是唯一的, 为了确定出它们唯一的形式, 我们假设它们在点 (x_1, y_1) 有相同的值零, 即条件 (3.14).

注 3.1 定义 $A(U, V)$ 和 $B(U, q)$ 如下:

$$\begin{aligned}
A(U, V) &= \sum_{ij} h_{i+\frac{1}{2}} \tau_j (a_{0,i+\frac{1}{2},j} + [Q_x(a_1, a_2, U)]_{i+\frac{1}{2},j}) U_{i+\frac{1}{2},j}^x V_{i+\frac{1}{2},j}^x \\
&\quad + \sum_{ij} h_i \tau_{j+\frac{1}{2}} (a_{0,i,j+\frac{1}{2}} + [Q_y(a_1, a_2, U)]_{i,j+\frac{1}{2}}) U_{i,j+\frac{1}{2}}^y V_{i,j+\frac{1}{2}}^y,
\end{aligned}$$

$$B(U, q) = \sum_{ij} h_i \tau_j ([D_x U^x]_{i,j} + [D_y U^y]_{i,j}) q_{i,j}.$$

直接计算可知, 由 (3.10)–(3.12) 组成的格式等价于如下形式. 对任给的 $\{V_{i+\frac{1}{2},j}^x\}$ 、 $\{V_{i,j+\frac{1}{2}}^y\}$ 和 $\{q_{i,j}\}$, 求 $\{U_{i+\frac{1}{2},j}^x\}$ 、 $\{U_{i,j+\frac{1}{2}}^y\}$ 和 $\{P_{i,j}\}$ 满足

$$\begin{cases} A(U, V) + B(V, P) = 0, \\ B(U, q) = \sum_{ij} h_i \tau_j f_{i,j} q_{i,j}. \end{cases} \tag{3.15}$$

类似强非线性椭圆问题混合元算法, 用不动点定理可以证明, 当剖分步长充分小时, 上述问题的解存在唯一, 参见文献 [22, 第 2 节].

4 格式的误差估计

本节将证明, 如果解析解足够光滑, 则格式的解 (U^x, U^y, P) 是 (u^x, u^y, p) 的二阶逼近. 为此目的, 先给出一些引理.

由方程 (2.5) 可以得到速度 $\mathbf{u} = (u^x, u^y)$ 与压力梯度 $\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y})$ 之间的关系:

$$\left(a_0 + \frac{a_2 |\mathbf{u}|}{1 + a_1 |\mathbf{u}|} \right) \mathbf{u} = -\nabla p. \quad (4.1)$$

下面的引理 4.1 给出了 \mathbf{u} 和 p 的一组插值, 其构造可参见文献 [16] 附录中的插值构造.

引理 4.1 如果 \mathbf{u} 和 p 足够光滑且满足 (4.1), 则存在 $\{\tilde{P}_{i,j}\}$ 、 $\{\tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x\}$ 和 $\{\tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y\}$ 满足

$$\begin{cases} \left(a_0 + \frac{a_2 |\mathbf{u}|}{1 + a_1 |\mathbf{u}|} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x = -[d_x \tilde{P}]_{i+\frac{1}{2},j}, \\ \left(a_0 + \frac{a_2 |\mathbf{u}|}{1 + a_1 |\mathbf{u}|} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y = -[d_y \tilde{P}]_{i,j+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (4.2)$$

并且有如下的逼近:

$$\begin{cases} |p_{i,j} - \tilde{P}_{i,j}| = O(h^2 + \tau^2), \\ |u_{i+\frac{1}{2},j}^x - \tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x| = O(h^2 + \tau^2), \\ |u_{i,j+\frac{1}{2}}^y - \tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y| = O(h^2 + \tau^2). \end{cases} \quad (4.3)$$

进一步可以构造 \mathbf{u} 和 p 的另一组插值, 在误差估计时用到.

引理 4.2 如果 p 和 u 足够光滑且满足 (4.1), 则存在 $\{\tilde{P}_{i,j}\}$ 、 $\{\tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x\}$ 和 $\{\tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y\}$ 满足

$$\begin{cases} (a_0 + Q_x(a_1, a_2, u))_{i+\frac{1}{2},j} \tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x = -[d_x \tilde{P}]_{i+\frac{1}{2},j}, \\ (a_0 + Q_x(a_1, a_2, u))_{i,j+\frac{1}{2}} \tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y = -[d_y \tilde{P}]_{i,j+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (4.4)$$

并且有如下的逼近:

$$\begin{cases} |p_{i,j} - \tilde{P}_{i,j}| = O(h^2 + \tau^2), \\ |u_{i+\frac{1}{2},j}^x - \tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x| = O(h^2 + \tau^2), \\ |u_{i,j+\frac{1}{2}}^y - \tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y| = O(h^2 + \tau^2). \end{cases} \quad (4.5)$$

证明 由方程 (4.2) 得到

$$\begin{cases} (a_0 + Q_x(a_1, a_2, u))_{i+\frac{1}{2},j} \tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x \\ = -[d_x \tilde{P}]_{i+\frac{1}{2},j} + \left(Q_x(a_1, a_2, u) - \frac{a_2 |\mathbf{u}|}{1 + a_1 |\mathbf{u}|} \right)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j}^x + O(h^2 + \tau^2), \\ (a_0 + Q_y(a_1, a_2, u))_{i,j+\frac{1}{2}} \tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y \\ = -[d_y \tilde{P}]_{i,j+\frac{1}{2}} + \left(Q_y(a_1, a_2, u) - \frac{a_2 |\mathbf{u}|}{1 + a_1 |\mathbf{u}|} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i,j+\frac{1}{2}}^y + O(h^2 + \tau^2). \end{cases} \quad (4.6)$$

我们首先估计 $(Q_x(a_1, a_2, u) - \frac{a_2 |\mathbf{u}|}{1 + a_1 |\mathbf{u}|})$. 当 $a_l \in C^2(\Omega)$ ($l = 1, 2$) 时, 我们有

$$a_{l,i+\frac{1}{4},j+\frac{1}{4}} = a_{l,i+\frac{1}{2},j} - \frac{\partial a_{l,i+\frac{1}{2},j}}{\partial x} \frac{h_i}{4} + \frac{\partial a_{l,i+\frac{1}{2},j}}{\partial y} \frac{\tau_j}{4} + O(h_i^2 + \tau_j^2). \quad (4.7)$$

类似于文献 [21, 引理 4.2] 的证明, 我们有

$$|(u_{i+\frac{1}{2},j}^x, u_{i,j+\frac{1}{2}}^y)| = |u_{i+\frac{1}{2},j}| - \left(\frac{u^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{h_i}{2} + \left(\frac{u^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\tau_j}{2} + O(h^2 + \tau^2). \quad (4.8)$$

注意到 (3.8) 中 Q_1 的定义, 通过一些简单的计算可以得出

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{a_2 |u_{i+\frac{1}{2},j}|}{1 + a_1 |u_{i,j+\frac{1}{2}}|} + \left(\frac{a_2 |u|^2}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{|u|}{1 + a_1 |u|} \frac{\partial a_2}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{h_i}{4} \\ &\quad - \left(\frac{a_2 |u|^2}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{|u|}{1 + a_1 |u|} \frac{\partial a_2}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\tau_j}{4} \\ &\quad + \left(\left(\frac{a_1 a_2 |u|}{(1 + a_1 |u|)^2} - \frac{a_2}{1 + a_1 |u|} \right) \frac{u^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{h_i}{2} \\ &\quad - \left(\left(\frac{a_1 a_2 |u|}{(1 + a_1 |u|)^2} - \frac{a_2}{1 + a_1 |u|} \right) \frac{u^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\tau_j}{2} + O(h^2 + \tau^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

对 (3.8) 中的 Q_2 类似地处理, 由 $x_{i+\frac{1}{2}} - x_i = \frac{h_i}{2}$, 我们得到 Q_1 和 Q_2 的平均值:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) &= \frac{a_2 |u_{i+\frac{1}{2},j}|}{1 + a_1 |u_{i+\frac{1}{2},j}|} - \left(\frac{|u|}{1 + a_1 |u|} \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{a_2 |u|^2}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{h_i}{4} \\ &\quad - \left(\left(\frac{a_2}{1 + a_1 |u|} - \frac{a_1 a_2 |u|}{(1 + a_1 |u|)^2} \right) \frac{u^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{h_i}{2} + O(h^2 + \tau^2) \\ &= \frac{a_2 |u_{i+\frac{1}{2},j}|}{1 + a_1 |u_{i+\frac{1}{2},j}|} - \left(\frac{|u|}{1 + a_1 |u|} \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{a_2 |u|^2}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{h_i}{4} \\ &\quad - \left(\frac{a_2}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{u^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{h_i}{2} + O(h^2 + \tau^2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

同样地, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(Q_3 + Q_4) &= \frac{a_2 |u_{i+\frac{1}{2},j}|}{1 + a_1 |u_{i+\frac{1}{2},j}|} + \left(\frac{|u|}{1 + a_1 |u|} \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{a_2 |u|^2}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial x} \right)_{i+1,j} \frac{h_{i+1}}{4} \\ &\quad + \left(\frac{a_2}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{u^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{i+1,j} \frac{h_{i+1}}{2} + O(h^2 + \tau^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

因为 $u_{i+\frac{1}{2},j}^x - u_{i,j}^x = O(h)$, $u_{i+\frac{1}{2},j}^x - u_{i+1,j}^x = O(h)$, 我们得到下面的估计:

$$\begin{aligned} &\left(Q_x(a_1, a_2, u) - \frac{a_2 |u|}{1 + a_1 |u|} \right)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j}^x \\ &= \left(\frac{1}{4h_{i+\frac{1}{2}}} (h_i [Q_1 + Q_2] + h_{i+1} [Q_3 + Q_4]) - \frac{a_2 |u|}{1 + a_1 |u|} \right)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j+\frac{1}{2}}^x \\ &= \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \left\{ \left(\frac{|u| u^x}{1 + a_1 |u|} \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{a_2 |u|^2 u^x}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial x} \right)_{i+1,j} \frac{h_{i+1}^2}{8} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_2}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{u^x u^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{i+1,j} \frac{h_{i+1}^2}{4} - \left(\frac{|u| u^x}{1 + a_1 |u|} \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{a_2 |u|^2 u^x}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{h_i^2}{8} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a_2}{(1 + a_1 |u|)^2} \frac{u^x u^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{h_i^2}{4} \right\} + O(h^2 + \tau^2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

类似地,

$$\begin{aligned} & \left(Q_y(a_1, a_2, u) - \frac{a_2|u|}{1+a_1|u|} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i,j+\frac{1}{2}}^y \\ &= \frac{1}{\tau_{j+\frac{1}{2}}} \left\{ \left(\frac{|u|u^x}{1+a_1|u|} \frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{a_2|u|^2u^x}{(1+a_1|u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial y} \right)_{i,j+1} \frac{\tau_{j+1}^2}{8} + \left(\frac{a_2}{(1+a_1|u|)^2} \frac{u^xu^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{i,j+1} \frac{\tau_{j+1}^2}{4} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{|u|u^x}{1+a_1|u|} \frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{a_2|u|^2u^x}{(1+a_1|u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial y} \right)_{i,j} \frac{\tau_j^2}{8} - \left(\frac{a_2}{(1+a_1|u|)^2} \frac{u^xu^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{i,j} \frac{\tau_j^2}{4} \right\} + O(h^2 + \tau^2). \end{aligned} \quad (4.13)$$

定义

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - & \left(\frac{|u|u^x}{1+a_1|u|} \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{a_2|u|^2u^x}{(1+a_1|u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{h_i^2}{8} - \left(\frac{a_2}{(1+a_1|u|)^2} \frac{u^xu^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{h_i^2}{4} \\ & - \left(\frac{|u|u^x}{1+a_1|u|} \frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{a_2|u|^2u^x}{(1+a_1|u|)^2} \frac{\partial a_1}{\partial y} \right)_{i,j} \frac{\tau_j^2}{8} - \left(\frac{a_2}{(1+a_1|u|)^2} \frac{u^xu^y}{|u|} \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{i,j} \frac{\tau_j^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

由 (4.3), 我们得到

$$\tilde{P}_{i,j} - p_{i,j} = O(h^2 + \tau^2).$$

由 (4.6)、(4.12) 和 (4.13), 我们有下列形式:

$$\begin{cases} \left(a_0 + \frac{a_2[Q_x u]}{1+a_1[Q_x u]} \right)_{i+\frac{1}{2},j} [\tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x + O(h^2 + \tau^2)] = -[d_x \tilde{P}]_{i+\frac{1}{2},j}, \\ \left(a_0 + \frac{a_2[Q_x u]}{1+a_1[Q_x u]} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} [\tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y + O(h^2 + \tau^2)] = -[d_y \tilde{P}]_{i,j+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.15)$$

分别定义 $[\tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x + O(h^2 + \tau^2)]$ 和 $[\tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y + O(h^2 + \tau^2)]$ 为 $\tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x$ 和 $\tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y$, 我们得到 (4.4) 和误差估计 (4.5). 这里为简单计, 我们没有给出 $O(h^2 + \tau^2)$ 的精确的表达式. 证毕. \square

对于离散函数, 定义内积形式为

$$\begin{aligned} \hat{a}(\Pi_2 \mathbf{U}, \Pi_2 \mathbf{V}) & \equiv \sum_{ij} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} a_{0,i+\frac{1}{2},j} \Pi_x U^x \Pi_x V^x dx dy + \sum_{ij} \int_{\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}} a_{0,i,j+\frac{1}{2}} \Pi_y U^y \Pi_y V^y dx dy \\ & = (a_0 \Pi_x U^x, \Pi_x V^x)_x + (a_0 \Pi_y U^y, \Pi_y V^y)_y, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{W}; \Pi_2 \mathbf{U}, \Pi_2 \mathbf{V}) & \equiv \sum_{ij} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} [Q_x(a_1, a_2, \mathbf{W})]_{i+\frac{1}{2},j} \Pi_x U^x \Pi_x V^x dx dy \\ & + \sum_{ij} \int_{\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}} [Q_y(a_1, a_2, \mathbf{W})]_{i,j+\frac{1}{2}} \Pi_y U^y \Pi_y V^y dx dy. \end{aligned} \quad (4.17)$$

引理 4.3 令 $\mathbf{V} = (V^x, V^y)$, $\mathbf{W} = (W^x, W^y)$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{g}(\mathbf{V}) = \frac{a_2|\mathbf{V}|}{1+a_1|\mathbf{V}|} \mathbf{V}$ 是向量值函数, 即 $\mathbf{g}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

(1) 存在与 \mathbf{V} 、 h 和 τ 皆无关的正常数 C_1 和一个非负常数 C_2 满足

$$\min\{C_1(|\mathbf{x}| + |\mathbf{x} + \mathbf{h}|), C_2\} |\mathbf{h}|^2 \leq (\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{h}); \quad (4.18)$$

(2) 假设 $D \subset \Omega$ 是 Ω 的一个子区域, 我们有

$$\int_D \left(\frac{a_2|\mathbf{V}|}{1+a_1|\mathbf{V}|} \mathbf{V} - \frac{a_2|\mathbf{W}|}{1+a_1|\mathbf{W}|} \mathbf{W}, \mathbf{V} - \mathbf{W} \right) dx \geq \int_D \min\{C_1(|\mathbf{V}| + |\mathbf{W}|), C_2\} |\mathbf{V} - \mathbf{W}|^2 dx; \quad (4.19)$$

(3) 假设 a_2 在 Ω 上 Lipschitz 连续, 当剖分步长 h 和 τ 足够小时, 下式成立:

$$\begin{aligned} & \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{V}; \Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W})) - \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{W}; \Pi_2 \mathbf{W}, \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W})) \\ & \geq (\min\{C_1(|\Pi_2 \mathbf{V}| + |\Pi_2 \mathbf{W}|), C_2\} \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W}), \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W})). \end{aligned} \quad (4.20)$$

证明 (1) 先证 (4.18). 根据定义, 有

$$(\mathbf{g}(\mathbf{V} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{V}), \mathbf{h}) = \frac{a_2(|\mathbf{V} + \mathbf{h}|(\mathbf{V} + \mathbf{h}) - |\mathbf{V}| \mathbf{V}, \mathbf{h})}{(1 + a_1|\mathbf{V} + \mathbf{h}|)(1 + a_1|\mathbf{V}|)} + \frac{a_1 a_2 |\mathbf{V}| |\mathbf{V} + \mathbf{h}|}{(1 + a_1|\mathbf{V} + \mathbf{h}|)(1 + a_1|\mathbf{V}|)} |\mathbf{h}|^2. \quad (4.21)$$

从文献 [21] 的结果知, 存在一个与 h 和 τ 无关的正常数 C_{11} 满足

$$C_{11}(|\mathbf{V}| + |\mathbf{V} + \mathbf{h}|) |\mathbf{h}|^2 \leq (|\mathbf{V} + \mathbf{h}|(\mathbf{V} + \mathbf{h}) - |\mathbf{V}| \mathbf{V}, \mathbf{h}). \quad (4.22)$$

因此,

$$(\mathbf{g}(\mathbf{V} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{V}), \mathbf{h}) \geq \frac{a_2 C_{11}(|\mathbf{V} + \mathbf{h}| + |\mathbf{V}|) + a_1 a_2 |\mathbf{V}| |\mathbf{V} + \mathbf{h}|}{(1 + a_1|\mathbf{V} + \mathbf{h}|)(1 + a_1|\mathbf{V}|)} |\mathbf{h}|^2. \quad (4.23)$$

为了证明引理, 我们要证明下面的函数有下界:

$$f(\xi, \eta) = \frac{a_2 C_{11}(\xi + \eta) + a_1 a_2 \xi \eta}{(1 + a_1 \xi)(1 + a_1 \eta)}, \quad (\xi, \eta) \in D, \quad (4.24)$$

其中 $D = \{(\xi, \eta) : \xi \geq 0, \eta \geq 0\}$. 为了这个目的, 我们将区域 D 分成三部分:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(\xi, \eta) : \xi \geq 1, \eta \geq 1\}, \\ D_2 &= \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}, \\ D_3 &= \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq 1, \eta \geq 1\} \cup \{(\xi, \eta) : \xi \geq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}. \end{aligned}$$

当 $(\xi, \eta) \in D_1, \xi \geq 1, \eta \geq 1$ 时,

$$f(\xi, \eta) \geq \frac{a_1 a_2 \xi \eta}{(1 + a_1) \xi (1 + a_1) \eta} = \frac{a_1 a_2}{(1 + a_1)^2}, \quad (\xi, \eta) \in D_1. \quad (4.25)$$

当 $(\xi, \eta) \in D_2, 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$ 时,

$$f(\xi, \eta) \geq \frac{a_2 C_{11}(\xi + \eta)}{(1 + a_1)(1 + a_1)}, \quad (\xi, \eta) \in D_2. \quad (4.26)$$

当 $0 \leq \xi \leq 1, \eta \geq 1$ 时,

$$f(\xi, \eta) = \frac{a_2 C_{11}(\xi + \eta) + a_1 a_2 \xi \eta}{(1 + a_1 \xi)(1 + a_1 \eta)} \geq \frac{a_2 C_{11} \eta}{(1 + a_1)(1 + a_1) \eta} = \frac{a_2 C_{11}}{(1 + a_1)^2}.$$

类似地处理 $\xi \geq 1, 0 \leq \eta \leq 1$ 的情形. 最后, 我们有

$$f(\xi, \eta) = \frac{a_2 C_{11}(\xi + \eta) + a_1 a_2 \xi \eta}{(1 + a_1 \xi)(1 + a_1 \eta)} \geq \frac{a_2 C_{11}}{(1 + a_1)^2}, \quad (\xi, \eta) \in D_3. \quad (4.27)$$

令

$$C_1 = \frac{a_2 C_{11}}{(1 + a_1)^2}, \quad C_2 = \min \left\{ \frac{a_1 a_2}{(1 + a_1)^2}, \frac{a_2 C_{11}}{(1 + a_1)^2} \right\},$$

联立 (4.25)–(4.27) 得到

$$f(\xi, \eta) \geq \min\{C_1(\xi + \eta), C_2\}, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0. \quad (4.28)$$

注意到 (2.4), 联立 (4.28) 和 (4.23) 即可完成 (4.18) 的证明.

(2) 利用 (4.18) 可直接得到 (4.19).

(3) 下面证明 (4.20). 因为 $\Omega_{i+\frac{1}{2},j} = \Omega_{i,j}^{R,T} \cup \Omega_{i,j}^{R,B} \cup \Omega_{i+1,j}^{L,T} \cup \Omega_{i+1,j}^{L,B}$, $\Omega_{i,j+\frac{1}{2}} = \Omega_{i,j}^{L,T} \cup \Omega_{i,j}^{R,T} \cup \Omega_{i,j+1}^{L,B} \cup \Omega_{i,j+1}^{R,B}$, 由 \hat{b} 的定义, 有

$$\begin{aligned} \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{V}; \Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2 \mathbf{W}) &= \sum_{ij} \int_{\Omega_{i,j}^{R,T}} \left(\frac{a_{2,i+1/4,j+1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|}{1 + a_{1,i+1/4,j+1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|} \Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2 \mathbf{W} \right) dx dy \\ &\quad + \sum_{ij} \int_{\Omega_{i,j}^{R,B}} \left(\frac{a_{2,i+1/4,j-1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|}{1 + a_{1,i+1/4,j-1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|} \Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2 \mathbf{W} \right) dx dy \\ &\quad + \sum_{ij} \int_{\Omega_{i,j}^{L,T}} \left(\frac{a_{2,i-1/4,j+1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|}{1 + a_{1,i-1/4,j+1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|} \Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2 \mathbf{W} \right) dx dy \\ &\quad + \sum_{ij} \int_{\Omega_{i,j}^{L,B}} \left(\frac{a_{2,i-1/4,j-1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|}{1 + a_{1,i-1/4,j-1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|} \Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2 \mathbf{W} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (4.29)$$

所以有

$$\hat{b}(\Pi_2 \mathbf{V}; \Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W})) - \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{W}; \Pi_2 \mathbf{W}, \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W})) = \sum_{l=1}^4 I_l, \quad (4.30)$$

其中 I_l ($l = 1, 2, 3, 4$) 从 (4.29) 相应的项中得到. 例如, I_1 是由 $\hat{b}(\Pi_2 \mathbf{V}; \Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W}))$ 的第一项减去 $\hat{b}(\Pi_2 \mathbf{W}; \Pi_2 \mathbf{W}, \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W}))$ 的第一项,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{ij} \int_{\Omega_{i,j}^{R,T}} \left\{ \left(\frac{a_{2,i+1/4,j+1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|}{1 + a_{1,i+1/4,j+1/4} |\Pi_2 \mathbf{V}|} \Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a_{2,i+1/4,j+1/4} |\Pi_2 \mathbf{W}|}{1 + a_{1,i+1/4,j+1/4} |\Pi_2 \mathbf{W}|} \Pi_2 \mathbf{W}, \Pi_2(\mathbf{V} - \mathbf{W}) \right) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

利用 (4.18), 我们有

$$I_1 \geq \sum_{ij} \int_{\Omega_{i,j}^{R,T}} \min\{C_1(|\Pi_2 \mathbf{V}| + |\Pi_2 \mathbf{W}|), C_2\} |\Pi_2 \mathbf{V} - \Pi_2 \mathbf{W}|^2 dx dy. \quad (4.31)$$

类似地, 我们可估计出 I_l ($l = 2, 3, 4$). 把 I_l ($l = 1, 2, 3, 4$) 加起来, 即得到此证明. \square

注 4.1 (3.8) 和 (3.9) 中的 Q_x 和 Q_y 的定义, 保证了 (4.20) 成立. 这个性质对于误差估计很重要.

引理 4.4 如果 p 和 \mathbf{u} 足够光滑且满足 (4.1), 那么存在 $\hat{P}_{i,j}$ 、 $\hat{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x$ 和 $\hat{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y$ 满足

$$\begin{cases} (a_0 + Q_x(a_1, a_2, \hat{\mathbf{U}}))_{i+\frac{1}{2},j} \hat{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x = -[d_x \hat{P}]_{i+\frac{1}{2},j}, \\ (a_0 + Q_y(a_1, a_2, \hat{\mathbf{U}}))_{i,j+\frac{1}{2}} \hat{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y = -[d_y \hat{P}]_{i,j+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (4.32)$$

并且有如下的逼近:

$$\begin{cases} |p_{i,j} - \hat{P}_{i,j}| = O(h^2 + \tau^2), \\ \|\Pi_2(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{U}})\| = O(h^2 + \tau^2). \end{cases} \quad (4.33)$$

证明 令 $\hat{P}_{i,j} = \tilde{P}_{i,j}$, 定义 $\hat{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x$ 和 $\hat{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y$ 如下:

$$\begin{cases} (a_0 + Q_x(a_1, a_2, \hat{\mathbf{U}}))_{i+\frac{1}{2},j} \hat{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x = (a_0 + Q_x(a_1, a_2, \mathbf{u}))_{i+\frac{1}{2},j} \tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x, \\ (a_0 + Q_y(a_1, a_2, \hat{\mathbf{U}}))_{i,j+\frac{1}{2}} \hat{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y = (a_0 + Q_y(a_1, a_2, \mathbf{u}))_{i,j+\frac{1}{2}} \tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^y. \end{cases} \quad (4.34)$$

从引理 4.2 知, (4.32) 和 (4.33) 的第一式成立.

由 Q_x 、 Π_2 和 $\hat{U}_{i+\frac{1}{2},j}^x$ 的定义, 对于任一离散函数 $\{V_{i+\frac{1}{2},j}^x\}$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \left(a_0 + \frac{a_2 |\Pi_2 \hat{\mathbf{U}}|}{1 + a_1 |\Pi_2 \hat{\mathbf{U}}|} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \Pi_x \hat{U}^x \Pi_x V^x dxdy \\ &= \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \left(a_0 + \frac{a_2 |\Pi_2 \mathbf{u}|}{1 + a_1 |\Pi_2 \mathbf{u}|} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \Pi_x \tilde{U}^x \Pi_x V^x dxdy. \end{aligned} \quad (4.35)$$

类似地, 对于任一离散函数 $\{V_{i,j+\frac{1}{2}}^y\}$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}} \left(a_0 + \frac{a_2 |\Pi_2 \hat{\mathbf{U}}|}{1 + a_1 |\Pi_2 \hat{\mathbf{U}}|} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \Pi_y \hat{U}^y \Pi_y V^y dydx \\ &= \int_{\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}} \left(a_0 + \frac{a_2 |\Pi_2 \mathbf{u}|}{1 + a_1 |\Pi_2 \mathbf{u}|} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \Pi_y \tilde{U}^y \Pi_y V^y dydx. \end{aligned} \quad (4.36)$$

对于所有的 $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ 和 $\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}$, 将方程 (4.35) 和 (4.36) 加起来, 有

$$\hat{a}(\Pi_2 \hat{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) + \hat{b}(\Pi_2 \hat{\mathbf{U}}; \Pi_2 \hat{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) = \hat{a}(\Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) + \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{u}; \Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}). \quad (4.37)$$

将 $\hat{a}(\Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V})$ 移到左边, 并且 (4.37) 两边同时减去 $\hat{b}(\Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}; \Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V})$, 得到

$$\begin{aligned} & \hat{a}(\Pi_2 (\hat{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}}), \Pi_2 \mathbf{V}) + \hat{b}(\Pi_2 \hat{\mathbf{U}}; \Pi_2 \hat{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) - \hat{b}(\Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}; \Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) \\ &= \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{u}; \Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) - \hat{b}(\Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}; \Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}). \end{aligned}$$

令 $\Pi_2 \mathbf{V} = \Pi_2 (\hat{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}}) = (\Pi_x (\hat{U}^x - \tilde{U}^x), \Pi_y (\hat{U}^y - \tilde{U}^y))$, 利用 (4.19), 有

$$\begin{aligned} \bar{a} \|\Pi_2 \mathbf{V}\|^2 &= \bar{a} \|\Pi_2 (\hat{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}})\|^2 \\ &\leq \hat{a}(\Pi_2 \mathbf{V}, \Pi_2 \mathbf{V}) + \hat{b}(\Pi_2 \hat{\mathbf{U}}; \Pi_2 \hat{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) - \hat{b}(\Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}; \Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) \\ &= \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{u}; \Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) - \hat{b}(\Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}; \Pi_2 \tilde{\mathbf{U}}, \Pi_2 \mathbf{V}) \\ &\leq C(h^2 + \tau^2) \|\Pi_2 (\hat{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}})\|. \end{aligned} \quad (4.38)$$

因此,

$$\|\Pi_2 (\hat{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}})\| \leq C(h^2 + \tau^2). \quad (4.39)$$

联立 $\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{U}}$ 的误差逼近结果, 即可完成引理证明. \square

注 4.2 有了 $\hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{u}}$ 和 $\hat{P} - p$ 的估计, 就可以将估计 $\mathbf{U} - \mathbf{u}$ 和 $P - p$ 转化为估计 $\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}$ 和 $P - \hat{P}$. 再结合后面定义的 \mathbf{U}^{1D} 又可以将估计 $\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}$ 转化为估计 $\mathbf{U}^{1D} - \hat{\mathbf{U}}$.

现在给出误差估计.

定理 4.1 设原问题 (2.1) 的解 u 和 p 足够光滑, U^x 、 U^y 和 P 是差分格式 (3.10)–(3.14) 的解. 当 h 和 τ 充分小时, 存在一个与 h 和 τ 无关的正常数 C 使得

$$\|u^x - U^x\|_x + \|u^y - U^y\|_y + \|p - P\|_M \leq C(h^2 + \tau^2). \quad (4.40)$$

证明 (1) 先证明 (4.40) 中关于 U^x 和 U^y 的估计.

定义 $U_{i+\frac{1}{2},j}^{1Dx}$ 、 $P_{i,j}^{1Dx}$ 、 $U_{i,j+\frac{1}{2}}^{1Dy}$ 和 $P_{i,j}^{1Dy}$ 分别为 $u_{i+\frac{1}{2},j}^x$ 、 $p_{i,j}$ 、 $u_{i,j+\frac{1}{2}}^y$ 和 $p_{i,j}$ 的一维有限差分逼近, 满足

$$\begin{cases} (a_0 + Q_x(a_1, a_2, \mathbf{U}^{1D}))_{i+\frac{1}{2},j} U_{i+\frac{1}{2},j}^{1Dx} = -[d_x P^{1Dx}]_{i+\frac{1}{2},j}, \\ [D_x U^{1Dx}]_{i,j} = \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} \int_{\Omega_{i,j}} \left(f - \frac{\partial u^y}{\partial y} \right) dx dy, \quad U_{\frac{1}{2},j}^{1Dx} = 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\begin{cases} (a_0 + Q_y(a_1, a_2, \mathbf{U}^{1D}))_{i,j+\frac{1}{2}} U_{i,j+\frac{1}{2}}^{1Dy} = -[d_y P^{1Dy}]_{i,j+\frac{1}{2}}, \\ [D_y U^{1Dy}]_{i,j} = \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} \int_{\Omega_{i,j}} \left(f - \frac{\partial u^x}{\partial x} \right) dx dy, \quad U_{i,\frac{1}{2}}^{1Dy} = 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

由于

$$\int_0^1 \left(f - \frac{\partial u^y}{\partial y} \right) dx = \int_0^1 \frac{\partial u^x}{\partial x} dx = u^x(1, y) - u^x(0, y) = 0,$$

我们得到

$$\sum_i h_i \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} \int_{\Omega_{i,j}} \left(f - \frac{\partial u^y}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{\tau_j} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_0^1 \left(f - \frac{\partial u^y}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (4.43)$$

从方程组 (4.41), 我们知道 U^{1Dx} 是有定义的. 类似地, 我们可以证明 U^{1Dy} 也是有定义的. 因此, 包含 P^{1Dx} 和 P^{1Dy} 的方程变成线性的, 于是, P^{1Dx} 和 P^{1Dy} 也是有定义的.

类似文献 [16, 21] 中一维问题的误差估计技巧, 对于 $u^x - U^{1Dx}$ 的估计只用到 (4.41) 的第二个方程, 对于 $u^y - U^{1Dy}$ 的估计只用到 (4.42) 的第二个方程, 我们可以得到

$$\|u^x - U^{1Dx}\|_x \leq C(h^2 + \tau^2), \quad \|u^y - U^{1Dy}\|_y \leq C(h^2 + \tau^2). \quad (4.44)$$

有了 $u^x - U^{1Dx}$ 和 $u^y - U^{1Dy}$ 的估计, 我们可以将 $u^x - U^x$ 和 $u^y - U^y$ 的估计转化为估计 $U^x - U^{1Dx}$ 和 $U^y - U^{1Dy}$.

下面只要估计 $U^x - U^{1Dx}$ 和 $U^y - U^{1Dy}$ 即可. 首先推导它们满足的方程.

根据条件 (4.43) 和 $U_{i,j+\frac{1}{2}}^{1Dy}$ 的定义, 有

$$U_{N_x+\frac{1}{2},j}^{1Dx} = 0, \quad U_{i,N_y+\frac{1}{2}}^{1Dy} = 0.$$

结合 (4.41) 和 (4.42), 有

$$\begin{cases} (U^{1Dx} - U)_{\frac{1}{2},j} = (U^{1Dx} - U)_{N_x+\frac{1}{2},j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_y, \\ (U^{1Dy} - U)_{i,\frac{1}{2}} = (U^{1Dy} - U)_{i,N_y+\frac{1}{2}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_x. \end{cases} \quad (4.45)$$

由方程组 (3.10)、(4.41) 和 (4.42) 我们得到, 对于任意的 $(x_i, y_j) \in \Omega$, 下式成立:

$$[D_x(U^x - U^{1Dx}) + D_y(U^y - U^{1Dy})]_{i,j} = 0. \quad (4.46)$$

由 $\hat{a}(\cdot, \cdot)$ 和 $\hat{b}(\cdot, \cdot)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}
& \hat{a}(\Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U}), \Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})) + \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{U}^{1D}; \Pi_2 \mathbf{U}^{1D}, \Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})) - \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{U}; \Pi_2 \mathbf{U}, \Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})) \\
&= \sum_{i,j} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \{(a_0 + Q_x(a_1, a_2, \mathbf{U}^{1D}))_{i+\frac{1}{2},j} U_{i+\frac{1}{2},j}^{1Dx} (U^{1D} - U)_{i+\frac{1}{2},j}^x \\
&\quad - (a_0 + Q_x(a_1, a_2, \mathbf{U}))_{i+\frac{1}{2},j} U_{i+\frac{1}{2},j}^x (U^{1D} - U)_{i+\frac{1}{2},j}^x\} dx dy \\
&\quad + \sum_{i,j} \int_{\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}} \{(a_0 + Q_y(a_1, a_2, \mathbf{U}^{1D}))_{i,j+\frac{1}{2}} U_{i,j+\frac{1}{2}}^{1Dy} (U^{1D} - U)_{i,j+\frac{1}{2}}^y \\
&\quad - (a_0 + Q_y(a_1, a_2, \mathbf{U}))_{i,j+\frac{1}{2}} U_{i,j+\frac{1}{2}}^y (U^{1D} - U)_{i,j+\frac{1}{2}}^y\} dx dy \\
&= (-d_x P^{1Dx} + d_x P, U^{1Dx} - U^x)_x + (-d_y P^{1Dy} + d_y P, U^{1Dy} - U^y)_y \\
&= (P^{1Dx} - P, D_x(U^{1Dx} - U^x))_M + (P^{1Dy} - P, D_y(U^{1Dy} - U^y))_M. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

由 (4.19)、假设 (2.4) 和 Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned}
\bar{a}\|\Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})\|^2 &= \bar{a}(\|U^{1Dx} - U^x\|_x^2 + \|U^{1Dy} - U^y\|_y^2) \\
&\leqslant \hat{a}(\Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U}), \Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})) + \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{U}^{1D}; \Pi_2 \mathbf{U}^{1D}, \Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})) \\
&\quad - \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{U}; \Pi_2 \mathbf{U}, \Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})) \\
&= (P^{1Dx} - P, D_x(U^{1Dx} - U^x))_M + (P^{1Dy} - P, D_y(U^{1Dy} - U^y))_M. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

由 (4.41)、(4.42)、(4.46) 和 (4.16) 的定义, 有

$$\begin{aligned}
&(P^{1Dx} - P, D_x[U^{1Dx} - U^x])_M + (P^{1Dy} - P, D_y[U^{1Dy} - U^y])_M \\
&= (P^{1Dx} - \hat{P}, D_x[U^{1Dx} - U^x])_M - (P^{1Dy} - \hat{P}, D_y[U^{1Dy} - U^y])_M \\
&= -(d_x P^{1Dx} - d_x \hat{P}, U^{1Dx} - U^x)_M + (d_y P^{1Dy} - d_y \hat{P}, U^{1Dy} - U^y)_M \\
&= ((a_0 + Q_x(a_1, a_2, \mathbf{U}^{1D})) U^{1Dx} - (a_0 + Q_x(a_1, a_2, \hat{\mathbf{U}})) \hat{U}^x, U^{1Dx} - U^x)_x \\
&\quad + ((a_0 + Q_y(a_1, a_2, \mathbf{U}^{1D})) U^{1Dy} - (a_0 + Q_y(a_1, a_2, \hat{\mathbf{U}})) \hat{U}^y, U^{1Dy} - U^y)_y \\
&= \hat{a}(\Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \hat{\mathbf{U}}), \Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})) \\
&\quad + \hat{b}(\Pi_2 \mathbf{U}^{1D}; \Pi_2 \mathbf{U}^{1D}, \Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})) - \hat{b}(\Pi_2 \hat{\mathbf{U}}; \Pi_2 \hat{\mathbf{U}}, \Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})). \tag{4.49}
\end{aligned}$$

联立 (4.48) 和 (4.49), 得到如下估计:

$$\begin{aligned}
\|\Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})\|^2 &\leqslant C\|\Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \hat{\mathbf{U}})\|^2 \\
&= C(\|U^{1Dx} - u^x + u^x - \hat{U}^x\|_x^2 + \|U^{1Dy} - u^y + u^y - \hat{U}^y\|_y^2) \\
&\leqslant C(\|U^{1Dx} - u^x\|_x^2 + \|u^x - \hat{U}^x\|_x^2 + \|U^{1Dy} - u^y\|_y^2 + \|u^y - \hat{U}^y\|_y^2) \\
&= C(\|U^{1Dx} - u^x\|_x^2 + \|U^{1Dy} - u^y\|_y^2 + \|\Pi_2(u - \hat{U})\|^2). \tag{4.50}
\end{aligned}$$

再联立 (4.44) 可得到

$$\begin{aligned}
\|U^x - u^x\|_x^2 + \|U^y - u^y\|_y^2 &= \|\Pi_2(\mathbf{u} - \mathbf{U})\|^2 \leqslant 2\|\Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{u})\|^2 + 2\|\Pi_2(\mathbf{U}^{1D} - \mathbf{U})\|^2 \\
&\leqslant C(\|U^{1Dx} - u^x\|_x^2 + \|U^{1Dy} - u^y\|_y^2 + \|\Pi_2(u - \hat{U})\|^2)
\end{aligned}$$

$$\leq C(h^2 + \tau^2)^2. \quad (4.51)$$

故得到 (4.40) 中关于 U^x 和 U^y 的估计.

(2) 下面给出压力的误差估计.

对于离散函数 $P_{ij} - \hat{P}_{ij}$ ($1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y$) 定义分片常数函数 $P(x, y) - \hat{P}(x, y)$ 如下:

$$P(x, y) - \hat{P}(x, y) = P_{ij} - \hat{P}_{ij}, \quad (x, y) \in \Omega_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq N_x, \quad 1 \leq j \leq N_y.$$

设 \mathbf{W} 是如下辅助问题的解:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{W} = P - \hat{P}, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (4.52)$$

由于速度的离散 l^2 范数是二阶收敛的, 利用逆估计可以得到 $|U_{i+\frac{1}{2},j}^x|$ 和 $|U_{i,j+\frac{1}{2}}^y|$ 无穷范数有界. 利用文献 [16, 定理 4.2] 中介绍的对偶技巧, 可以证明对于上一节格式定义的离散解 P 、 U^x 和 U^y 及引理 4.4 中定义的离散压力插值, 存在一个与 h 和 τ 无关的正常数 C 满足

$$\|P - \hat{P}\|_M^2 \leq C(\|U^x - \hat{U}^x\|_x^2 + \|U^y - \hat{U}^y\|_y^2). \quad (4.53)$$

联立 (4.40) 和引理 4.4 中 $\Pi_2(u - \hat{U})$ 的估计, 我们得到

$$\|P - \hat{P}\|_M^2 \leq C(\|U^x - \hat{U}^x\|_x^2 + \|U^y - \hat{U}^y\|_y^2) \leq C(h^2 + \tau^2)^2. \quad (4.54)$$

再结合 (4.33) 中 $p - \hat{P}$ 的估计, 即可得到 (4.40) 中关于 P 的估计. 定理证毕. \square

5 数值实验

本节给出块中心有限差分格式的数值算例. 为简单计, 求解区域选择为单位正方形区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

我们举两个例子, 利用格式求解、验证该格式的收敛阶. 我们用方程 (2.5) 代替方程 (2.1), 设定 a_1 和 a_2 是常量或变量. 我们利用给定的解析解, 计算得到方程右端和边界条件.

初始网格选为 10×10 的非均匀网格, 然后依次将网格细分 4 次, 每一次都是先对上一层网格的每个单元在每个方向上进行等距剖分, 然后进行适当扰动来形成非等距网格. 这样形成的网格在任何局部区域都不是等距网格. 我们用 x 方向和 y 方向上的最大最小步长比 h_{\max}/h_{\min} 和 τ_{\max}/τ_{\min} 表示网格剖分非均匀的程度.

例 5.1 边界条件为齐次 Neumann 边界条件, 压力和速度的解析解表示为

$$\begin{cases} p(x, y) = \arctan(x + y - 1), & \mathbf{u}(x, y) = \left(-\frac{y}{1+x+y}, \frac{x}{1+x+y} \right)^T, \\ a_1 = 0.4, & a_2 = 0.8. \end{cases}$$

数值计算结果在表 1 和图 2 中, 其中

$$E_{u,l^2} = (\|u^x - U^x\|_x^2 + \|u^y - U^y\|_y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad E_{p,l^2} = \|p - P\|_M^2.$$

表 1 例 5.1 的计算误差和收敛阶

$N_x \times N_y$	$E_{u,l2}$	收敛阶	$E_{p,l2}$	收敛阶	$\frac{h_{\max}}{h_{\min}}$	$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}$
10 × 10	1.787E-1	-	1.403E-2	-	1.74	2.00
20 × 20	4.493E-2	1.98	3.579E-3	1.97	1.88	1.86
40 × 40	1.142E-2	1.98	9.236E-4	1.96	1.80	1.99
80 × 80	2.880E-3	1.98	1.429E-4	1.98	2.00	2.18
160 × 160	7.229E-4	1.99	5.885E-5	1.98	2.15	2.18

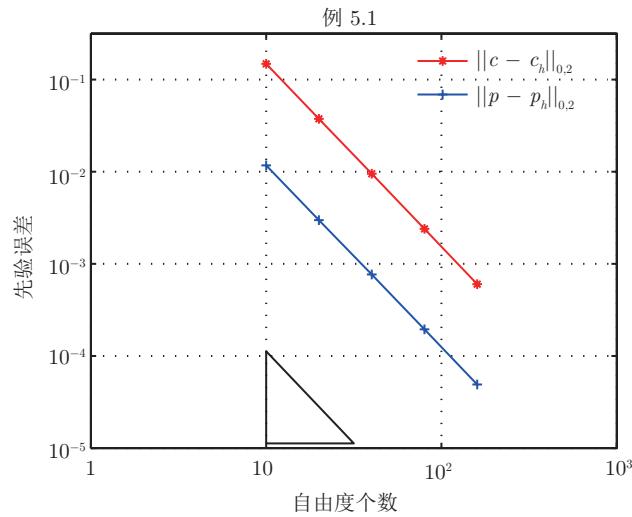


图 2 例 5.1 的收敛阶

例 5.2 边界条件为齐次 Neumann 边界条件, 压力和速度的解析解表示为

$$\begin{cases} p(x, y) = \arctan(x + y - 1), & \mathbf{u}(x, y) = \left(-\frac{y}{1+x+y}, \frac{x}{1+x+y} \right)^T, \\ a_1 = 0.3 + 0.2x, & a_2 = 0.6 + 0.4x. \end{cases}$$

数值计算结果在表 2 和图 3 中.

表 2 例 5.2 的计算误差和收敛阶

$N_x \times N_y$	$E_{u,l2}$	收敛阶	$E_{p,l2}$	收敛阶	$\frac{h_{\max}}{h_{\min}}$	$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}$
10 × 10	1.384E-1	-	1.328E-2	-	1.63	2.04
20 × 20	3.584E-2	1.95	3.330E-3	1.99	2.01	1.68
40 × 40	9.528E-3	1.91	8.854E-4	1.98	1.73	1.71
80 × 80	2.504E-3	1.93	1.342E-4	1.98	1.93	2.21
160 × 160	5.471E-4	1.93	5.474E-5	1.96	2.10	2.21

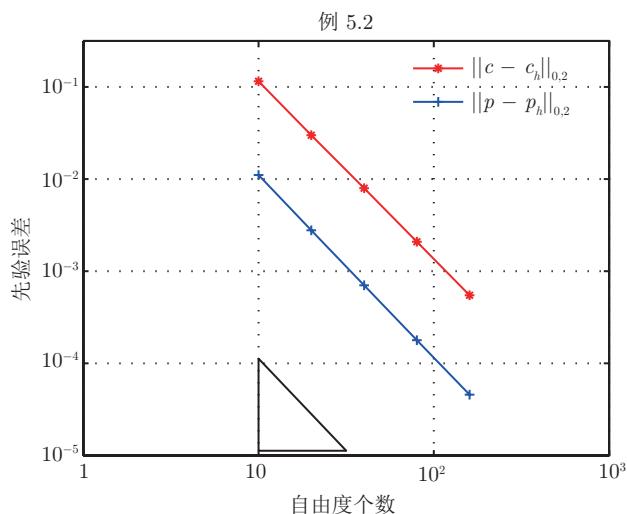


图 3 例 5.2 的收敛阶

从表 1 和 2 及图 1 和 2 可以看出, 压力和速度的块中心有限差分逼近在离散 l^2 模意义下是二阶收敛的. 这些结果与定理 4.5 中的误差估计结果一致.

致谢 作者对匿名评审专家的悉心阅读和帮助性建议表示感谢, 这些建议使本文质量有了很大提高.

参考文献

- 1 Aziz K, Settari A. Petroleum Reservoir Simulation. London: Applied Science Publishers, 1979
- 2 Neuman S P. Theoretical derivation of Darcy's law. *Acta Mech*, 1977, 25: 153–170
- 3 Whitaker S. Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy's law. *Transp Porous Media*, 1986, 1: 3–25
- 4 Ruth D, Ma H. On the derivation of the Forchheimer equation by means of the averaging theorem. *Transp Porous Media*, 1992, 7: 255–264
- 5 Barree R D, Conway M W. Beyond beta factors: A complete model for Darcy, Forchheimer and trans-Forchheimer flow in porous media. In: SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Houston: Society of Petroleum Engineers, 2004, 1–8
- 6 Barree R D, Conway M W. Multiphase non-Darcy flow in proppant packs. *SEP Prod Oper*, 2009, 24: 257–268
- 7 Wu Y, Lai B, Miskimins J L, et al. Analysis of multiphase non-Darcy flow in porous media. *Transp Porous Media*, 2011, 88: 205–223
- 8 Girault V, Wheeler M F. Numerical discretization of a Darcy-Forchheimer model. *Numer Math*, 2008, 110: 161–198
- 9 Roberts J E, Thomas J M. Mixed and hybrid methods. In: Finite Element Methods, Part 1: Handbook of Numerical Analysis, vol. 2. North-Holland: Elsevier Science Publishers B V, 1991, 523–569
- 10 Lopez H, Molina B, Jose J S. Comparison between different numerical discretizations for a Darcy-Forchheimer model. *Electron Trans Numer Anal*, 2009, 34: 187–203
- 11 Park E J. Mixed finite element method for generalized Forchheimer flow in porous media. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2005, 21: 213–228
- 12 Pan H, Rui H. Mixed element method for two-dimensional Darcy-Forchheimer model. *J Sci Comput*, 2012, 52: 563–587
- 13 Raviart P A, Thomas J M. A mixed finite element method for second order elliptic problems. In: Mathematical Aspects of the Finite Element Method. Lecture Notes in Mathematics, vol. 606. New York: Springer, 1977, 292–315
- 14 Brezzi F, Douglas Jr J, Marini L D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numer Math*, 1985, 47: 217–235
- 15 Pan H, Rui H. A mixed element method for Darcy-Forchheimer incompressible miscible displacement problem. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2013, 264: 1–11
- 16 Weiser A, Wheeler M F. On convergence of block-centered finite difference for elliptic problems. *SIAM J Numer Anal*, 1988, 25: 351–375

- 17 Arbogast T, Dawson C N, Keenan P T, et al. Enhanced cell-centered finite differences for elliptic equations on general geometry. *SIAM J Sci Comput*, 1998, 19: 404–425
- 18 Arbogast T, Wheeler M F, Yotov I. Mixed finite elements for elliptic problems with tensor coefficients as cell-centered finite differences. *SIAM J Numer Anal*, 1997, 34: 828–852
- 19 Wheeler M F, Xue G, Yotov I. A multipoint flux mixed finite element method on distorted quadrilaterals and hexahedra. *Numer Math*, 2012, 121: 165–204
- 20 Wheeler M F, Yotov I. A multipoint flux mixed finite element method. *SIAM J Numer Anal*, 2006, 44: 2082–2106
- 21 Rui H, Pan H. A block-centered finite difference method for the Darcy-Forchheimer model. *SIAM J Numer Anal*, 2012, 50: 2612–2651
- 22 Milner F A, Park E J. A mixed finite element method for a strongly nonlinear second-order elliptic problem. *Math Comp*, 1995, 64: 973–988

A block-centered finite difference method for general non-Darcy flow in porous media

RUI HongXing & ZHAO DanHui

Abstract A block-centered finite difference scheme is introduced to solve the nonlinear equation of non-Darcy model, in which it can maintain local mass conservation and the velocity and pressure can be approximated simultaneously. The second-order error estimates in discrete l^2 norm for both pressure and velocity are established on a nonuniform rectangular grid. Numerical experiments using the scheme show the consistency of the convergence rates of our method with the theoretical analysis.

Keywords general non-Darcy flow, nonlinear, block-centered finite difference, second-order error estimates, local mass conservation

MSC(2010) 65N06, 65N12, 65N15

doi: [10.1360/012016-8](https://doi.org/10.1360/012016-8)