中　国　科　学（A 辑）
第 28 卷　第 4 期　SCIENCE IN CHINA (Series A)　1998 年 4 月

所有基本相互作用力统一的一个模型 *

周光召
（中国科学院, 北京 100086）

吴岳良
（中国科学院理论物理研究所, 北京 100080）

摘要　提出了一个统一强、电磁、弱和引力 4 种基本相互作用的模型. 普通 4 维时空的切空间是由 4 个标架场支撑的 14 维内部时空的一个子流形. 粒子物理标准模型和引力的统一由内部空间的规范对称性来描述.

关键词　统一理论　内部空间　广义标架场　引力

本世纪理论物理最大的努力之一是统一由 Einstein 广义相对论[1, 2]描述的引力和由 Yang-Mills 规范理论[3]描述的其他 3 种基本相互作用力(强, 电磁和弱). 最大的困难之一是所谓的"此路不通"定理1), 它的证明依据了 4 维时空的定域相对论量子场论. 统一所有相互作用力的大部分企图涉及到高维时空, 例如 Kaluza-Klein Yang-Mills 理论[4, 5], 超引力理论[6, 7]和超弦理论[8~11]等等. 在 Kaluza-Klein Yang-Mills 理论中, 为了使标准模型的规范群能作为流形的保位群, 流形的最小维数必须是 11 维[12]. 即使如此, 由于 Atiyah-Hirzebruch 指标定理, Kaluza-Klein 方法仍不能给出标准模型中的 Fermi 表示. 最大的超引力具有 SO(8)对称性, 其作用量通常表示成 11 维时空中 $N=1$ 的超引力. 很遗憾, SO(8)对称性太小, 不能包括标准模型. 自洽的超弦理论也要求 10 维时空. 在超弦理论中, 尽管所有的相互作用都包括, 但有几百万个真空态. 问题是如何从那么多个真空态中去找到物理上所对应的那一个真的真空态.

在这篇文章中, 我们将考虑另外一种方案. 首先, 我们注意到标准模型中[13~15]每一代夸克和轻子可以统一成 SO(10)的 16 维复手征旋量表示[16] 2). 每一个复手征旋量属于 SO(1, 3)的 4 维表示. 在一个统一理论中, 一个有吸引力的想法是把所有 64 个实旋量分量放在同一层次上处理, 即它们必须属于某个大群的表示. 很自然地, 我们考虑 SO(1, 13)作为我们的统一群, SO(1, 13)规范势作为基本相互作用来统一自然界中的 4 种基本相互作用力(强, 电磁, 弱和引力). 其次, 为了避免上面提到的所谓"此路不通"定理和其他一些问题的限制, 我们考虑普通时空仍然是一个 4 维流形 S_4, 它具有度规 $g_{\mu\nu}(x)$, $\mu, \nu=0, 1, 2, 3$. 在每一点 $P: x^{\mu}$, 有一个 d-维的平直空间 M_d ($d>4$), 具有标号 $(1, -1, \cdots, -1)$. 我们假设在 4 维流形 S_4 上每一点 P 的切空间 T_4 是由 4 个矢量 $e_{\mu}^{A}(x)$, $\mu=0, 1, 2, 3$; $A=0, 1, \cdots, d-1$ 支撑的 d-维平直空间 M_d 的一个 4-维子流形, 并且满足

1998-01-04 收稿
*国家杰出青年科研基金资助项目(批准号: 19625514)

1) Coleman S, Mandula J. Phys Rev, 1967, 159: 1 251

2) Fritzsch H, Minkowski P. Ann Phys, 1975, 93: 193

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^A(x)e_\nu^B(x)\eta_{AB}, \tag{1}$$

这里 $\eta_{AB}=\mathrm{diag}(1,-1,\cdots,-1)$可以看作是 d-维平直空间M_d 的度规．我们将称 $e_\mu^A(x)$为广义标架场．一旦标架场 $e_\mu^A(x)$被给定，我们总可以增补另外 $d-4$ 个矢量场 $e_m^A(x)\equiv e_m^A(e_\mu^A(x))$，$m=1, 2, \cdots, d-4$，使它们满足

$$e_\mu^A(x)e_m^B(x)\eta_{AB} = 0,\quad e_m^A(x)e_n^B(x)\eta_{AB} = g_{mn}. \tag{2}$$

这里 $g_{mn}=\mathrm{diag}(-1,\cdots,-1)$．$e_m^A(x)$可以唯一确定到 1 个具有 SO$(d-4)$转动不变的量．在平直空间 M_d，我们可以利用 $e_\mu^A(x)$和 $e_m^A(x)$把它分解成两个正交的流形 $T_4\otimes C_{d-4}$．这里 C_{d-4}被看作是描述除自旋外内部对称性为 SO$(d-4)$的内部空间，它由 $d-4$ 个正交矢量 $e_m^A(x)$支撑．在 M_d 的新坐标系统中，度规张量的形式为

$$\begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

利用 $e_\mu^A(x)$和 $e_m^A(x)$，我们可以定义相应的协变矢量 $e_A^\mu(x)$和 $e_A^m(x)$，它们满足

$$\begin{aligned} &e_A^\mu(x)e_\nu^A(x) = g_\nu^\mu,\quad e_A^m(x)e_n^A(x) = g_n^m, \\ &e_A^\mu(x)e_m^A(x) = 0,\quad e_A^m(x)e_\nu^A(x) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

在广义坐标变换和 M_d 空间的转动下，$e_\mu^A(x)$作为普通空间的协变矢量和 M_d 空间的矢量进行变换，$e_m^A(x)$作为 C_{d-4}空间的协变矢量和 M_d 空间的矢量进行变换．为使理论在广义坐标变换和在平直空间 M_d 的定域转动下不变，必须引进对应于广义坐标变换的仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x)$和定域 SO$(1, d-1)$转动的规范势 $\Omega_\mu^{AB}(x)=-\Omega_\mu^{BA}(x)$．这些变换通过要求切空间 T_4 是由 4 个标架场 $e_\mu^A(x)$支撑的内部时空 M_d 的 1 个子流形以及 $e_\mu^A(x)$为协变常标架场而联系起来，即 $e_\mu^A(x)$满足条件

$$D_\mu e_\rho^A = \partial_\mu e_\rho^A - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma e_\sigma^A + g_U\Omega_{\mu B}^A e_\rho^B = 0, \tag{5}$$

并较容易证明

$$D_\mu g_{\rho\sigma} = \partial_\mu g_{\rho\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda g_{\rho\lambda} = 0, \tag{6}$$

$$D_\mu e_A^\rho = \partial_\mu e_A^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho e_A^\sigma - g_U\Omega_{\mu A}^B e_B^\rho = 0. \tag{7}$$

根据以上考虑，我们现在可以构造一个在广义坐标变换下不变和具有定域 SO$(1, d-1)$对称性以及满足约束条件方程(5)的作用量．另外，要求作用量中的参数是无量纲的，并且要求它在数幂的意义上是可重整的．满足这些要求的作用量的普遍形式为

$$\begin{aligned} S_B = \int d^4x\,\sqrt{-g}\Big\{ &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{AB}F_{\rho\sigma}^{CD}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\eta_{AC}\eta_{BD} - \frac{1}{2}\xi\phi^2 F_{\mu\nu}^{AB}e_A^\mu e_B^\nu + \\ &\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \zeta F_{\mu\nu}^{AB}F_{\rho\sigma}^{CD}g^{\mu\rho}\eta_{AC}e_B^\nu e_D^\sigma + \\ &a_1F_{\mu\nu}^{AB}F_{\rho\sigma}^{CD}e_C^\mu e_D^\nu e_A^\rho e_B^\sigma + a_2F_{\mu\nu}^{AB}F_{\rho\sigma}^{CD}e_C^\mu e_B^\nu e_A^\rho e_D^\sigma + a_3F_{\mu\nu}^{AB}F_{\rho\sigma}^{CD}e_A^\mu e_B^\nu e_C^\rho e_D^\sigma\Big\}, \end{aligned} \tag{8}$$

这里 $\phi(x)$是为避免带有维数的耦合常数而引进的 1 个标量场，$a_i(i=1,2,3)$，ζ，ξ 和 λ 是无量纲的参数，$F_{\mu\nu}^{AB}$ 是以标准的方式定义的场强

$$F_{\mu\nu}^{AB} = \partial_\mu\Omega_\nu^{AB} - \partial_\nu\Omega_\mu^{AB} + g_U(\Omega_{\mu C}^A\Omega_\nu^{CB} - \Omega_{\nu C}^A\Omega_\mu^{CB}), \tag{9}$$

张量 F_μ^A 被定义为$F_\mu^A = F_{\mu\nu}^{AB} e_B^\nu$.

利用标架场 $e_A^\mu(x)$和 $e_A^m(e_\mu^A(x))$, 我们可以把 $\Omega_\mu^{AB}(x)$分成 3 部分：描述引力的部分 $e_A^\sigma(x)\Omega_\mu^{AB}(x)e_B^\rho(x)(\rho, \sigma = 0, 1, 2, 3)$, 描述规范相互作用的部分 $e_A^m(x)\Omega_\mu^{AB}(x)e_B^n(x)$和描述引力与规范作用耦合的部分 $e_A^m(x)\Omega_\mu^{AB}(x)e_B^\sigma(x)$. 从约束方程(5), 我们得到

$$g_U e_{\sigma A}(x)\Omega_\mu^{AB}(x)e_B^\rho(x) = \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - e_{\sigma A}\partial_\mu e^{\rho A}, \tag{10}$$

$$g_U e_{mA}(x)\Omega_\mu^{AB}(x)e_B^\sigma(x) = - e_{mA}\partial_\mu e^{\sigma A}. \tag{11}$$

类似地, 我们可以把 $e_A^m(x)\Omega_\mu^{AB}(x)e_B^n(x)$重新表示为

$$g_U e_A^n(x)\Omega_\mu^{AB}(x)e_B^m(x) = g_U A_\mu^{mn}(x) - \frac{1}{2}(e_A^n\partial_\mu e^{mA} - e_A^m\partial_\mu e^{nA}), \tag{12}$$

这里 $A_\mu^{mn}(x) = - A_\mu^{nm}(x)(m, n = 1, \cdots, d-4)$是$(d-4)$-维空间$C_{d-4}$中定域转动 SO$(d-4)$所对应的规范势.

注意到由于约束条件 $D_\mu e_\rho^A = 0$, 不是所有的规范场 $\Omega_\mu^{AB}(x)$简单地对应于新的传播场. 我们现在简单地计算一下独立的自由度. 约束方程有 $4\times 4\times d$ 个自由度, 规范场 $\Omega_\mu^{AB}(x)$有 $4d(d-1)/2$个自由度, 标架场 $e_\mu^A(x)$有 $4\times d$ 个自由度, 仿射联络 $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$有 40 个自由度对应于对称部分$(\Gamma^\rho_{(\mu\sigma)} = \Gamma^\rho_{(\sigma\mu)})$和 24 个自由度对应于反对称部分$\left(\Gamma^\rho_{[\mu\sigma]} = -\Gamma^\rho_{[\sigma\mu]}\right)$, 人们可以看到除了反对称部分 $\Gamma^\rho_{[\mu\sigma]}$ 外, 独立的自由度为$(4d + 4(d-4)(d-5)/2)$. 这些独立的自由度正好与标架场 $e_\mu^A(x)$和对称群 SO$(d-4)$的规范场 $A_\mu^{mn}(x)$的自由度完全一致. 另外, 在陪集 SO$(1, d-1)$/ SO$(d-4)$上的规范条件导致$(4d-10)$个附加的约束关系. 这样, 真正的独立自由度被减少到$(10 + 4(d-4)(d-5)/2)$个, 它正好是度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$和对称群 SO$(d-4)$规范场 $A_\mu^{mn}(x)$的自由度. 当 $d = 14$, 所得到的场的独立自由度已足够描述 4 种基本相互作用力. Einstein 的广义相对论由度规张量来描述. 传递电磁、弱和强相互作用所对应的光子, W-Bose 子和胶子由对称群 SO(10)[16] 规范势 $A_\mu^{mn}(x)$的不同分量给出. 曲率张量 $R_{\mu\nu\sigma}^\rho$和 $R_{\nu\sigma} = R_{\mu\nu\sigma}^\rho g_\rho^\mu$ 以及标量曲率 $R = R_{\nu\sigma}g^{\nu\sigma}$与场强 $F_{\mu\nu}^{AB}$ 的关系可以简单地写成 $R_{\mu\nu\sigma}^\rho = g_U F_{\mu\nu}^{AB} e_A^\rho e_{\sigma B}$, $R_{\nu\sigma} = g_U F_{\mu\nu}^{AB} e_A^\mu e_{\sigma B}$和 $R = g_U F_{\mu\nu}^{AB} e_A^\mu e_B^\nu$. 不难检验关系式 $R_{\mu\nu}^{AB} R_{AB}^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{mn} F_{mn}^{\mu\nu} + g_U^{-2} R_{\mu\rho\nu\sigma} R^{\mu\rho\nu\sigma}$ 和 $R_\mu^A R_A^\mu = R_{\mu\rho} R^{\mu\rho}/g_U^2$, 这里 $F_{\mu\nu}^{mn}(x)$是规范势 $A_\mu^{mn}(x)$的场强

$$F_{\mu\nu}^{mn} = \partial_\mu A_\nu^{mn} - \partial_\nu A_\mu^{mn} + g_U(A_{\mu q}^m A_\nu^{qn} - A_{\nu q}^m A_\mu^{qn}). \tag{13}$$

从这些关系式, 作用量 S_B 可以用下面的简单形式来表示

$$S_B = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{mn}F_{mn}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 - \frac{1}{2}\xi\frac{1}{g_U}\phi^2 R + \frac{1}{g_U^2}\left[\left(a_1 - \frac{1}{4}\right)R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + (a_2 + \zeta)R_{\mu\rho}R^{\mu\rho} + a_3 R^2\right]\right\}. \tag{14}$$

这个作用量与含有所谓 R^2-引力以及标量场的大统一理论具有相同的形式, 因此, 它也应该是可重整化的.

在我们的现实世界里, 存在三代夸克和轻子. 每一代夸克和轻子有 64 个实自由度. 这些自由度将被表示为 Weyl Fermi $\Psi_+(x)$的 64 个实分量, 这里 $\Psi(x)$属于 SO(1, 13)的基本旋量表示. 这样, Fermi 作用量可以写为

$$S_F = \int d^4 x \sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}\bar{\Psi}_+ e_A^\mu \Gamma^A\left(\mathrm{i}\,\partial_\mu + g_U \Omega_\mu^{BC}\frac{1}{2}\Sigma_{BC}\right)\Psi_+ + \mathrm{h.c.}\right\}, \tag{15}$$

这里 Σ_{AB} 是 SO(1, $d-1$)在旋量表示中的生成元，$\Sigma_{AB}=\frac{\mathrm{i}}{4}[\Gamma_A, \Gamma_B]$. Γ^A 是所谓的 γ 矩阵，它们满足$\{\Gamma^A, \Gamma^B\}=2\eta^{AB}$. 值得注意的是尽管所得到总的作用量 $S=S_B+S_F$ 较简单，但 Fermi 作用量中的规范作用部分将是非平凡的. 这是因为规范势 $\Omega_\mu^{AB}(x)$与独立自由度 $A_\mu^{mn}(x)$和 $e_\mu^A(x)$之间的联系是非线性的(这从关系(10)～(12)式可以看出). 尤其是附加的标架场 $e_m^A(x)$与原标架场 $e_\mu^A(x)$之间存在着很强的非线性关系.

现在让我们考虑在普通空间的广义坐标变换下和在内部空间 M_d 定域 SO(1, $d-1$)转动下的守恒量. 在定域 SO(1, $d-1$)转动下 $\Psi_+(x)\to \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\omega^{AB}\Sigma_{AB}}\Psi_+(x)$, 不难得到下面的守恒定律

$$D_\mu(\sqrt{-g}S_{AB}^\mu) - \sqrt{-g}\,T_{[AB]} \equiv 0, \tag{16}$$

这里

$$S_{AB}^\mu = g_U \frac{1}{4}\bar{\Psi}_+ e_C^\mu\{\Gamma^C, \Sigma_{AB}\}\Psi_+, \tag{17}$$

$$T_{[AB]} = -\mathrm{i}\frac{1}{2}[\bar{\Psi}_+ e_A^\mu \Gamma_B D_\mu \Psi_+ - (D_\mu\bar{\Psi}_+) e_A^\mu \Gamma_B \Psi_+]. \tag{18}$$

广义坐标变换导致大家所熟悉的能动量守恒定律

$$D^\nu(\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}) \equiv \sqrt{-g}F_{\mu\nu}^{AB}S_{AB}^\nu, \tag{19}$$

这里

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathscr{L} - \mathrm{i}\frac{1}{2}e_\nu^A[\bar{\Psi}_+ \Gamma_A D_\mu \Psi_+ - (D_\mu\bar{\Psi}_+)\Gamma_A\Psi_+]. \tag{20}$$

利用协变常数标架场 $e_\mu^A(x)$, 我们可以把 S_{AB}^μ 和 $T_{[AB]}$ 投影为

$$S_{\rho\sigma}^\mu = S_{AB}^\mu e_\rho^A e_\sigma^B, \tag{21}$$

$$T_{[\rho\sigma]} = T_{[AB]}e_\rho^A e_\sigma^B = T_{\rho\sigma} - T_{\sigma\rho}. \tag{22}$$

这样，角动量守恒定律可写为

$$D_\mu(\sqrt{-g}S_{\rho\sigma}^\mu) - \sqrt{g}\,T_{[\rho\sigma]} \equiv 0. \tag{23}$$

很容易证明由方程(19)和(23)给出的两个守恒定律与在平直空间的狭义相对论所给出的是相自洽的，这可从下面的关系式看出

$$-T_{[\rho\sigma]} = \partial_\mu L_{[\rho\sigma]}^\mu \equiv \partial_\mu(x_\rho T_\sigma^\mu - x_\sigma T_\rho^\mu), \tag{24}$$

这里 $L_{\rho\sigma}^\mu$是轨道角动量，$J_{\rho\sigma}^\mu \equiv S_{\rho\sigma}^\mu + L_{\rho\sigma}^\mu$代表总角动量.

从简单的想法出发，我们给出了一个关于强、电磁、弱和引力 4 种基本相互作用力的一个可能的统一模型，并且构造了一个无量纲参数的作用量来作为基本粒子之间所有基本相互作用力之量子理论的基础. 这样的一个理论可能仍然是某个更基本理论的一个有效理论，但它是一个可重整的理论. 关于含有标量场的 R^2-引力的可重整性的一般证明可以在文献[17]中找到. 在广义相对论中，只有经典的 Einstein 方程被证实与实验数据相一致. 故 Einstein 的广义相对论可以被理解为低能极限下的经典理论. 为此，Einstein-Hilbert 作用量(包括宇宙

项)可能是由低能极限下诱导出来的结果[17][1)]．例如，这些项可能来自于自发对称破缺．最后，我们来评论一下所谓的幺正性问题，它是由高阶导数项在微扰论处理的框架下引起的．但当能量标度接近 Planck 能标时，高阶导数项将变得重要．这时，引力作用变得较强，以至于度规场的微扰展开处理不再适用．从规范理论的观点来看，定域 Lorentz 群不是紧致的．因此不是所有规范场的分量是物理的，这就需要引进一些附加条件来消除那些非物理的分量．这类似于通常的规范理论，人们用规范条件来消除规范场的非物理分量(对无质量的规范场，时间和纵向分量是非物理的分量)．为此，要解决引力理论中的所谓幺正性问题，需要发展非微扰的方法，甚至引进完全新的观念．我们将在以后的研究中进一步探讨这个问题．

我们希望本文的模型提供给我们一个在量子场论框架下统一所有基本相互作用力的一种新的途径．虽然最初的想法和最后得到的模型都是简单的，但仍然需要我们作很多理论和实验的努力来确定自然界的真正选择．

参　考　文　献

1 Einstein A. Sitz Preuss Akad Wiss, 1915, 778: 844
2 Einstein A. Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann Phys Lpz, 1916, 49: 769
3 Yang C N, Mills R L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. Phys Rev, 1954, 96: 191
4 Kaluza T H. On the problem of unity in physics. Sitz Preuss Akad Wiss, 1921, K1: 966
5 Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. Z Physik, 1926, 37: 895
6 Freedman D, Ferrara S, Van Nieuwenhuizen P. Progress toward a theory of supergravity. Phys Rev, 1976, D13: 3 214
7 Deser S, Zumino B. Consistent supergravity. Phys Lett, 1976, 62B: 335
8 Green M, Schwartz J H. Covariant description of superstrings. Phys Lett, 1984, 149B: 117
9 Candelas P, Horowitz G T, Strominger A, et al. Vacuum configurations for superstrings. Nucl Phys, 1985, B258: 46
10 Gross D, Harvey J, Martinec E, et al. Heterotic string. Phys Rev Lett, 1985, 54: 502
11 Green M B, Schwartz J H, Witten E. Superstring Theory, Cambridge: Cambridge University Press, 1987
12 Witten E. Search for a realistic Kaluza-Klein theory. Nucl Phys, 1981, B186: 412
13 Glashow S L. Partial-symmetries of weak interactions. Nucl Phys, 1961, 22: 579
14 Weinberg S. A model of leptons. Phys Rev Lett, 1967, 19: 1 264
15 Salam A. In: Svartholm N, ed. Proceedings of the Eight Nobel Symposium, on Elementary Particle Theory, Relativistic Groups, and Analyticit, Stockholm, Sweden, 1968. Stockholm: Almqvist and Wikell, 1968
16 Georgi H. In: Carlson C, ed. Particles and Fields 1974. New York: Amer Inst of Physics, 1975
17 Stelle K. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. Phys Rev, 1977, D16: 953

1) Voronov B L, Tyutin I V, Yad Fiz. J Nucl Phys, 1984, 39: 998