中国科学 E辑：技术科学 2008年 第38卷 第11期：1995～2000
www.scichina.com tech.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

悬沙运动方程及其近底泥沙通量

李瑞杰①*，罗锋②，朱文谨③

① 海岸灾害及防护教育部重点实验室，南京 210098;
② 河海大学环境海洋实验室，南京 210098;
③ 河海大学物理海洋研究所，南京 210098
* E-mail: rjli@hhu.edu.cn

收稿日期: 2007-10-29; 接受日期: 2008-01-05
国家自然科学基金项目(批准号: 40476039)资助

摘要 悬沙运动方程及其近底泥沙通量是不平衡输沙研究的关键问题之一. 从给出二维悬沙运动方程的推导出发，阐明近底泥沙通量的物理本质为悬沙运动方程的底部边界条件. 分析研究了常用的挟沙力和切应力方法的内在联系，指出从物理意义和形式上两者的一致性，从理论上统一了挟沙力和切应力两种方法. 同时在对近底泥沙通量表达式比较分析的基础上，总结了几个需要关注的问题，为研究和解决悬沙运动及近底水沙交换问题提供了一种解决思路.

关键词
悬沙运动方程
近底泥沙通量
挟沙力
切应力

国内泥沙研究自都江堰引水工程的修筑开始，经老一代泥沙专家的研究已奠定了我国泥沙研究的国际地位，学科体系中西贯通[1~8].

在研究河流、河口以及海岸悬沙运动时，悬沙和底沙的交换量即近底泥沙通量由于确定方法不同，出现常用的挟沙力和切应力两种方法. 从这两种方法出发，近底泥沙通量出现了诸多以经验关系给出的表达形式，缺少普遍性，也有不甚合理之处. 由于不同的近底泥沙通量表达形式以及应用上的多样化，对泥沙运动的基本理论、方法的理解也出现了“百家争鸣”的局面. 这一方面对泥沙理论的研究具有积极作用，但另一方面也会导致泥沙研究在某种程度上的混乱.

本文首先从三维悬沙运动方程出发，给出二维悬沙运动方程的简要推导，以有利于理解和阐明近底泥沙通量的真正含义. 其次探求挟沙力方法和切应力方法的物理本质及其内在联系，并同时从物理意义和形式上分析两者的一致性，理论上统一了挟沙力和切应力两种方法的数学表达式. 最后再对两种方法的近底泥沙通量表达形式进行比较和总结，进一步探求两种方法的内在理论联系和相关系数的确定.

不同方法的近底泥沙通量的统一，对各相关经验系数的确定提供了一种可行的解决方法，对解决悬沙运动进而解决泥沙运动问题具有重要的理论意义.

1 悬沙运动方程

为了阐明近底泥沙通量的真正含义, 首先从三维悬沙运动方程出发, 简要给出二维悬沙运动方程的推导过程.

不平衡条件下的三维悬沙运动方程为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial us}{\partial x}+\frac{\partial vs}{\partial y}+\frac{\partial\left(w-\omega\right)s}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z\frac{\partial s}{\partial z}\right), \tag{1}$$

其中s为含沙量; t为时间; u, v, w分别为x, y, z方向的速度分量; ω为沉降速度; ε_x, ε_y, ε_z分别为x, y, z方向的扩散系数.

考虑到水面H及床面z_b微元体的质量守恒(水流连续), 自由表面边界条件为

$$\frac{\partial H}{\partial t}+u_H\frac{\partial H}{\partial x}+v_H\frac{\partial H}{\partial y}-w_H=0.$$

底部边界条件由下式给出

$$\frac{\partial z_b}{\partial t}+u_b\frac{\partial z_b}{\partial x}+v_b\frac{\partial z_b}{\partial y}-w_b=0.$$

自由表面无泥沙净通量, 即

$$\omega_H s_H+\left(\varepsilon_H\frac{\partial s}{\partial z}\right)_H=0.$$

侧边界条件这里不作讨论. 垂向积分(1)式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial h\bar{s}}{\partial t}+\frac{\partial h\overline{us}}{\partial x}+\frac{\partial h\overline{vs}}{\partial y}=&-\omega_b s_b+\frac{\partial}{\partial x}\left(h\overline{\varepsilon_x\frac{\partial s}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\overline{\varepsilon_y\frac{\partial s}{\partial y}}\right)-\left(\varepsilon_x\frac{\partial s}{\partial x}\right)_H\frac{\partial H}{\partial x}\\&+\left(\varepsilon_x\frac{\partial s}{\partial x}\right)_b\frac{\partial z_b}{\partial x}-\left(\varepsilon_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)_H\frac{\partial H}{\partial y}+\left(\varepsilon_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)_b\frac{\partial z_b}{\partial y}-\left(\varepsilon_z\frac{\partial s}{\partial z}\right)_b,\end{aligned} \tag{2}$$

其中下标 b 表示底床变量, H 表示水面变量, 上划线为垂向积分. 忽略二次项, (2)式简化为

$$\frac{\partial h\bar{s}}{\partial t}+\frac{\partial h\overline{us}}{\partial x}+\frac{\partial h\overline{vs}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(h\overline{\varepsilon_x\frac{\partial s}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\overline{\varepsilon_y\frac{\partial s}{\partial y}}\right)-\omega_b s_b-\left(\varepsilon_z\frac{\partial s}{\partial z}\right)_b, \tag{3}$$

其中后两项即为本文将讨论的近底泥沙通量F_s, 其意义为

$$F_s=\int_{z_b}^{H}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\omega s+\varepsilon_z\frac{\partial s}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}z=-\omega_b s_b-\left(\varepsilon_z\frac{\partial s}{\partial z}\right)_b. \tag{4}$$

很明显, F_s为悬沙运动方程的底边界条件.

为方便起见, (3)式也可写为

$$\frac{\partial hs_0}{\partial t}+\frac{\partial hu_0s_0}{\partial x}+\frac{\partial hv_0s_0}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon h\frac{\partial s_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon h\frac{\partial s_0}{\partial y}\right)+Fs, \tag{5}$$

其中u_0, v_0分别为x和y方向的垂向平均速度; s_0为垂向平均含沙量; h为水深; ε表示垂向平均的扩散系数.

确定F_s的方法大体有两种: 一种是挟沙力方法, F_s与水体挟沙力s^*和水体含沙量s_0有关, 即

$$F_s = -\alpha\omega s_0(1 - s^*/s_0)\,. \tag{6}$$

另一种是切应力方法, F_s与水体底部切应力τ_b, 冲刷临界切应力τ_e, 沉积临界切应力τ_d有关, 即

$$F_s = \begin{cases} \alpha\omega s_0(\tau_b/\tau_d - 1)\,, & \text{当 } \tau_b \leqslant \tau_d \text{时}, \\ 0, & \text{当} \tau_d < \tau_b < \tau_e \text{时}, \\ M(\tau_b/\tau_e - 1), & \text{当 } \tau_b \geqslant \tau_e \text{时}. \end{cases} \tag{7}$$

(6)和(7)式中α和M分别为表示沉积和冲刷的系数. 两种方法或以(6)和(7)式的形式出现, 或以(6)和(7)式的幂函数形式出现[9~19]. 它们分别从水流挟沙能力和底部切应力的角度出发, 概念和物理意义看似截然不同, 但从二维悬沙方程推导过程可以看出两种方法物理意义就是悬沙运动方程的底部边界条件即近底泥沙通量.

2　近底泥沙通量形式的统一

挟沙力S可以写成如下的函数关系形式[2],

$$\begin{aligned} S &= F\left(\frac{U^2}{gh}, \frac{U}{\omega}, \frac{D}{h}, \frac{Uh}{v}, \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}, \frac{B}{h}\right) \\ &= \rho U^2 f\left(\frac{U^2}{gh}, \frac{U}{\omega}, \frac{D}{h}, \frac{Uh}{v}, \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}, \frac{B}{h}\right) \\ &= \tau f\left(\frac{U^2}{gh}, \frac{U}{\omega}, \frac{D}{h}, \frac{Uh}{v}, \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}, \frac{B}{h}\right) = A\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

其中$U = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$为垂向平均流速, g为重力加速度, D为泥沙粒径, v为水的运动粘滞系数, γ_s和γ分别为泥沙和水的容重, B为河口断面宽度, τ为切应力, $A = f\left(\frac{U^2}{gh}, \frac{U}{\omega}, \frac{D}{h}, \frac{Uh}{v}, \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}, \frac{B}{h}\right)$为比例函数.

由(8)式得

$$s^* = A\tau_b\,. \tag{9}$$

令(7)式中的M为

$$M = \alpha_e\omega s_0. \tag{10}$$

则(7)式可以写成

$$F_s = \begin{cases} \alpha_d\omega s_0(\tau_b/\tau_d - 1), & \text{当 } \tau_b \leqslant \tau_d \text{时}, \\ 0, & \text{当} \tau_d < \tau_b < \tau_e \text{时}, \\ \alpha_e\omega s_0(\tau_b/\tau_e - 1), & \text{当 } \tau_b \geqslant \tau_e \text{时}, \end{cases} \tag{11}$$

其中α_e为冲刷系数, α_d为沉积系数.

根据(9)式, (11)式可以写成下面的形式,

$$F_s=\begin{cases}\alpha_d\omega s_0(s^*/s_d^*-1), & \text{当 } s^*\leqslant s_d^* \text{时},\\ 0, & \text{当} s_d^*<s^*<s_e^* \text{时},\\ \alpha_e\omega s_0(s^*/s_e^*-1), & \text{当 } s^*\geqslant s_e^* \text{时}.\end{cases} \tag{12}$$

由(9)式可得

$$s_d^*=A\tau_d\,,\quad s_e^*=A\tau_e\,, \tag{13}$$

其中 s_d^*, s_e^* 为近底临界挟沙力, 等于临界状态下的近底含沙量s_d, s_e, 则(12)式可写为

$$F_s=\begin{cases}\alpha_d\omega s_0(s^*/s_d-1), & \text{当 } s^*\leqslant s_d \text{时},\\ 0, & \text{当} s_d<s^*<s_e \text{时},\\ \alpha_e\omega s_0(s^*/s_e-1), & \text{当 } s^*\geqslant s_e \text{时}.\end{cases} \tag{14}$$

从(14)式可以看出, 若 $s_d=s_e=s_0$, $\alpha_d=\alpha_e=\alpha$, 则(14)式即简化为(6)式成为常用的挟沙力公式, 即挟沙力方法和切应力方法从形式上是统一的.

3 相关参数

悬沙运动方程的底部边界条件是不平衡输沙的一个关键问题, 至今尚未彻底解决, 因为学术流派和使用者选择的不同, 使得悬沙运动方程的底部边界条件即近底泥沙通量F_s的处理主要有挟沙力和切应力两种方法. 常用的挟沙力方法处理近底泥沙通量F_s也有多种表达形式, 从理论上看各种F_s的推导过程中, 并未详细分析泥沙交换的机理, 而是颇为直观地给出其公式[20], 各F_s表达式中的挟沙力s^*的公式更有数十个之多, 门类和物理意义不尽相同. 切应力方法源于经验, 其物理意义较为清晰也被普遍采纳.

从悬沙运动方程和近底泥沙通量F_s本身物理意义来讲, 挟沙力和切应力方法原本就是一致的, 都是表征悬沙运动的特性, 以及由近底泥沙通量引起的水体中含沙量的变化. 从推导上, 挟沙力方法和切应力方法形式上也是统一的. 两种方法形式统一的过程中, 引入一些相关量, 对比分析两种方法中的各对应相关量, 在进一步研究中可以相互借鉴参考确定, 对于多参数影响的泥沙输运研究有互补意义.

近底泥沙通量F_s其本身物理意义清晰, 对比两种方法相关量和系数.

(9)式挟沙力 $s^*=A\tau_b$ 物理意义清晰, 底部切应力 τ_b 与平均流速 u_0 的平方关系明确.

(7)式可表示为

$$F_s=\begin{cases}P_d\alpha_d\omega s_0<0, \\ 0, \\ P_e\alpha_e\omega s_0>0,\end{cases}\quad \text{其中}\quad \begin{matrix}P_d=(\tau_b/\tau_d-1), & \text{当 } \tau_b\leqslant\tau_d \text{时}, & \text{淤积},\\ & \text{当} \tau_d<\tau_b<\tau_e \text{时}, & \text{平衡},\\ P_e=(\tau_b/\tau_e-1), & \text{当 } \tau_b\geqslant\tau_e \text{时}, & \text{冲刷},\end{matrix} \tag{15}$$

其中 ωs_0 为泥沙交换通量, P_d和P_e分别为沉积概率和冲刷概率, τ_e 和 τ_d 通常由试验确定. 若泥沙特性和水流条件已知, 则 τ_b 可得, P_d和P_e确定. α_d 和 α_e 分别为沉积系数和冲刷系数, 物理意义清晰.

(14)式可以表示为

$$F_s=\begin{cases}P_d'\alpha_d\omega s_0<0, & \text{其中} \quad P_d'=(s^*/s_d-1), \text{当 } s^*\leqslant s_d \text{ 时,} \quad \text{淤积,}\\ 0, & \qquad\qquad\qquad \text{当 } s_d<s^*<s_e \text{ 时,} \quad \text{平衡,}\\ P_e'\alpha_e\omega s_0>0, & \qquad\quad P_e'=(s^*/s_e-1), \text{当 } s^*\geqslant s_e \text{ 时,} \quad \text{冲刷,}\end{cases} \tag{16}$$

其中s_d和s_e分别为临界沉积含沙量和临界冲刷含沙量. (15)和(16)式统一, (16)式的关键是临界含沙量s_d和s_e的确定, 挟沙力 s^* 表示饱和时的断面平均含沙量. 若泥沙特性和水流条件已知, 则 s^* 已知; s_d和s_e可由试验具体确定, 也可当作悬沙运动方程求解过程的输入参量通过冲淤验证计算确定. 一旦确定 s^*, s_d和s_e, 则表示不同水流和泥沙条件下的沉积和冲刷的概率 P_d' 和 P_e' 确定.

比较(6)和(16)式, (6)式更像是(16)式的简化形式. 一般认为悬沙粒径很细时, 无论是平衡还是不平衡条件, 含沙量沿水深变化不大, 此时　　　　　. 对于(6)式中α的物理意义不同学者有不同的提法, 例如恢复饱和系数[21], 泥沙颗粒沉降几率[9]等. α实际上包含水体的扩散与底部的交换两个方面, 冲刷和沉积时　也有所不同, (16)式中冲刷和沉积系数　,　吻合这两方面的物理意义. α,　和　是多种因素的组合, 可以利用实测资料反求. (6)式中, 记

　　　　, 其物理意义不及 P_d', P_e' 和P_d, P_e明确, 若泥沙特性和水流条件已知, 则s^*已知, 但s_0未知, 　无法确定.

挟沙力双值关系的论点[5]认为平衡条件发生由起动流速、扬动流速和止动流速描述的一个流速段内, 即流速引起底部切应力能使泥沙开始运动, 但不足以使其悬浮时, 此时悬沙运动方程的近底泥沙通量F_s为零, 此时(14)和(7)式较(6)式更为合理.

4　结论

泥沙运动研究已经取得了很大进展, 但泥沙运动理论流派繁多, 众说纷纭, 这给泥沙工作者带来诸多不便, 泥沙研究的水平也不会大幅提高. 悬沙运动方程的近底泥沙通量作为不平衡输沙的关键问题, 处理时常分别采用水流挟沙力方法和切应力方法解决. 本文从悬沙运动方程的简要推导, 进一步阐明了近底泥沙通量的含义, 基于水流挟沙力与切应力均与水流特性有关即两者存在一定的相关性, 通过引入待定系数或函数　, 论证了悬沙运动方程近底泥沙通量的两种确定方法实则一致, 理论上统一了挟沙力和切应力两种方法的数学表达式. 另外, 二维悬沙运动方程也有其他推导方式, 但意义不明确. 近底泥沙通量也有其他的表达形式, 如平衡参考浓度和临界速度等, 其物理本质与挟沙力和切应力方法是一致的, 只是判别沉积和冲刷的参量形式不同.

近底泥沙通量研究值得关注的几个问题.

1) 水体含沙量及挟沙力与切应力的关系. 影响近底泥沙通量的关键因素包括: 沉降速度、挟沙力以及临界切应力或临界含沙量等, 其中沉降速度和挟沙力的研究已很多, 关键问题是如何确定临界切应力和临界含沙量, 水体含沙量与床面切应力和水体挟沙力之间关系的研

究还很少见, 已有通过环形水槽实验进行的简单分析研究[22].

2) 临界含沙量的确定. 临界含沙量通过何种方法确定及其准确性决定底沙和悬沙的交换, 是近底泥沙通量的主要研究问题之一, 临界含沙量或通过试验具体确定, 或当作悬沙运动方程求解过程的输入参量通过冲淤验证计算确定, 也可由试验数据分析其理论或经验公式, 类比临界切应力方法两者对应物理量的确定可以相互借鉴参考.

3) 水沙交界面冲刷和沉积是否同步发生. 底沙与悬沙以何种方式进行交换, (7)和(14)式说明近底泥沙冲刷和沉积不会同时发生, 而(6)式实为净通量, 冲刷和沉积是可以同时发生的.

挟沙力方法和切应力方法还存在以幂函数形式等其他表示方法, 其本质、推导方法和物理含义与本文相同. 总之, 两种方法虽然有着各自的近底泥沙通量表达形式和不同的经验系数, 但是物理意义和数学表达式相似或相同. 本文工作对于更深入的理解泥沙运动理论有着重要的意义, 对各相关经验系数的确定提供了一种可行的解决方法. 通过本文的工作期望对泥沙研究起到一定的积极作用.

参考文献

1 钱宁, 万兆惠. 泥沙运动力学. 北京: 科学出版社, 1983
2 韩其为, 何明民. 泥沙起动规律及起动流速. 北京: 科学出版社, 1999
3 谢鉴衡. 泥沙工程学. 北京: 水利出版社, 1982
4 张瑞瑾. 河流泥沙动力学. 北京: 水利电力出版社, 1988
5 沙玉清. 泥沙运动学引论. 北京: 中国工业出版社, 1965
6 中国水利学会泥沙专业委员会. 泥沙手册. 北京: 中国环境科学出版社, 1992
7 Yang C T. Sediment Transport Theory and Practice. New York: McGraw-Hill Company, 1996
8 王光谦. 河流泥沙研究进展. 泥沙研究, 2007, 2: 64—81
9 窦国仁. 潮汐水流中悬沙运动及其冲淤计算. 水利学报, 1963, 4: 13—23
10 窦国仁, 董凤舞, 窦希萍, 等. 河口海岸泥沙数学模型研究. 中国科学 A 辑: 数学, 1995, 25(9): 995—1001
11 刘家驹. 连云港外航道的回淤计算及预报. 水利水运科学研究, 1980, 4: 31—42
12 罗肇森. 河口航道开挖后的回淤计算. 泥沙研究, 1987, 2: 13—20
13 李义天. 河道平面二维泥沙数学模型研究. 水利学报, 1989, (2): 26—35
14 曹祖德. 日本熊本港的淤积分析. 港口工程, 1990, 3: 28—36
15 乐培九. 悬移质运动扩散方程的应用. 水道港口, 2000, 3: 7—13
16 Krone R B. Flume Studies of the Transport of Sediment in Estuarial Processes. Final Report, Hydraulic Engineering Laboratory and Sanitary Engieering Research Laboratory. Berkeley: Univ of California, 1962
17 Partheniades E. Erosion and deposition of cohesive soils. J Hydraul Eng-ASCE, 1965, 91(2): 105—138
18 Yalin M S. Mechanics of Sediment Transport. Oxford: Pergamon Press, 1972. 74—110
19 Rijn L C. Sediment transport, Part II suspended load transport. J Hydraul Eng-ASCE, 1984, 110(10): 1613—1641
20 韩其为, 何明民. 论非均匀沙悬移质二维不平衡输沙方程及其边界条件. 水利学报, 1997, 1: 1—10
21 韩其为. 非均匀沙不平衡输沙的理论研究. 水利水电技术, 2007, 38(1): 14—23
22 曹祖德, 孔令双, 焦桂英. 往复流作用下粉沙的起悬和沉降过程. 水道港口, 2005, 26(1): 6—11