具有无界梯度的拟共形调和映照

朱剑峰

华侨大学数学科学学院, 泉州 362021

E-mail: flandy@hqu.edu.cn

收稿日期: 2016-02-28; 接受日期: 2017-07-18; 网络出版日期: 2017-11-28

国家自然科学基金 (批准号: 11501220)、福建省自然科学基金 (批准号: 2016J01020) 和华侨大学中青年教师科技创新提升资助计划 (批准号: ZQN-PY402) 资助项目

摘要 设 $f = h + \bar{g}$ 为单位圆盘 $\mathbf{U}$ 到凸区域上的调和映照, 其中 h 和 g 为 $\mathbf{U}$ 上的解析函数且满足 $g(0) = 0$. 本文首先给出 f 的梯度 Λ_f 具有控制增长函数 $\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}$ (其中 $z \in \mathbf{U}$, $0 \leq \alpha \leq 1$) 时的一个等价刻画, 进而得到了 v -Bloch 调和映照成为拟共形映照的条件. 特别地, 当 $v = 0$ 时, f 即为双向 Lipschitz 映照. 进一步地, 本文还给出了当 $f(\mathbf{U})$ 为一般区域 (未必是凸) 而 h 为凸映照时 f 成为拟共形映照的充分必要条件.

关键词 调和映照 拟共形映照 Lipschitz 性质 v -Bloch 调和映照

MSC (2010) 主题分类 30C62, 30C20

1 引言

本文记 $\mathbf{U}$ 为复平面上的单位圆盘. 假设 f 为定义在 $\mathbf{U}$ 上的二次连续可微函数, 如果 $f_{z\bar{z}} = 0$, 则 f 为平面调和映照. 任何定义在单连通区域上的调和映照都具有如下分解: $f = h + \bar{g}$, 其中 h 和 g 为 $\mathbf{U}$ 上的解析函数. 若 $g(0) = 0$, 则上述分解是唯一的. 关于平面调和映照的定义及更多有趣的性质可参见文献 [1, 2].

对于任意的 $z \in \mathbf{U}$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$, 定义 f 的方向导数如下:

$$\partial_\theta f(z) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} = f_z(z) + e^{-2i\theta} f_{\bar{z}}(z). \quad (1.1)$$

由上式可知, 对于任意的 $z \in \mathbf{U}$, 有

$$\max_{0 \leq \theta < 2\pi} |\partial_\theta f(z)| = \Lambda_f(z) := |f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)| \quad (1.2)$$

和

$$\min_{0 \leq \theta < 2\pi} |\partial_\theta f(z)| = \lambda_f(z) := ||f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|| \quad (1.3)$$

英文引用格式: Zhu J F. Quasiconformal harmonic mappings with unbounded gradient (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 273–280, doi: 10.1360/N012016-00044

成立, 这里 $\Lambda_f(z)$ 称为调和映照 f 的梯度.

经典的 Lewy 定理^[3] 指出, f 为局部单叶、保向调和映照当且仅当其 Jacobi 函数 $J_f(z)$ 满足下列不等式:

$$J_f(z) := |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 = \lambda_f(z)\Lambda_f(z) > 0, \quad \text{对于任意的 } z \in \mathbf{U}.$$

令

$$\beta_h = \sup_{z, w \in \mathbf{U}, z \neq w} \frac{|f(z) - f(w)|}{\rho(z, w)}$$

为 f 的 Bloch 常数, 其中 $\rho(z, w) = \frac{1}{2} \ln(\frac{1+r}{1-r})$ 为 $\mathbf{U}$ 上的双曲度量, 而 r 为 $\frac{z-w}{1-\bar{z}w}$ 的模. 文献 [4] 指出, 函数 $f = h + \bar{g}$ 的 Bloch 常数可以写成 h 和 g 的导数形式如下:

$$\beta_h = \sup_{z \in \mathbf{U}} (1 - |z|^2)(|h'(z)| + |g'(z)|).$$

对于 $v \in (0, +\infty)$, 如果不等式

$$\|f(z)\|_{B_v} := |f(0)| + \sup_{z \in \mathbf{U}} (1 - |z|^2)^v \Lambda_f(z) < \infty \quad (1.4)$$

对于任意的 $z \in \mathbf{U}$ 皆成立, 则称 f 为 v -Bloch 调和映照. 关于调和映照 Bloch 常数的研究可以参见文献 [5, 6].

设 f 为定义在 $\mathbf{U}$ 上的单叶保向调和映照, 则 f 为调和 K -拟共形映照当且仅当其复特征满足

$$K(f) := \sup_{z \in \mathbf{U}} \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|} \leq K.$$

调和拟共形映照作为共形映照的自然推广, 近年来受到了许多同行的关注并成为复分析近些年来研究的热点之一 (参见文献 [7-12]).

对于定义在 $\mathbf{U}$ 上的调和映照 f , 如果存在一个常数 $L > 0$ (或 $C > 0$) 使得不等式

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad (\text{或 } C|z_1 - z_2| \leq |f(z_1) - f(z_2)|) \quad (1.5)$$

对于所有的 $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$ 都成立, 则称 f 为 Lipschitz (或 co-Lipschitz) 映照. 如果 f 同时为 Lipschitz 和 co-Lipschitz 映照, 则称 f 为双向 Lipschitz 映照.

具有双向 Lipschitz 性质的保向调和映照自然为拟共形映照, 反之却未必.

2014 年, Partyka 和 Sakan 推广了文献 [8, 定理 3.2] 的结果得到了如下定理.

定理 1.1 (参见文献 [13, 定理 3.4]) 设 $f: \mathbf{U} \mapsto \mathbf{C}$ 为单叶保向调和映照, 满足 $f(\mathbf{U})$ 为复平面上的有界凸区域, 则下列的 5 个条件彼此等价:

- (i) f 为拟共形映照且为 Lipschitz 映照;
- (ii) f 为拟共形映照且其边界函数 $F := \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ 为 Lipschitz 映照;
- (iii) f 为拟共形映照且其解析部分 h 为双向 Lipschitz 映照;
- (iv) f 为双向 Lipschitz 映照;
- (v) f 可以连续延拓到边界 $\text{cl}(\mathbf{U})$ 且其边界函数 F 绝对连续, 并满足下列条件:

$$0 < d_F, \quad \|\dot{F}\|_\infty, \|A[\dot{F}]\|_\infty < +\infty,$$

其中 $\dot{F}(e^{it}) := \frac{dF(e^{it})}{dt}$ 对于几乎处处的 t 都成立, $d_F := \text{ess inf } |\dot{F}(e^{it})|$ 而 $A[\dot{F}]$ 为 $\dot{F}$ 的 Hilbert 变换.

值得指出的是, 文献 [7,8] 及上述定理仅仅讨论了定义在 $\mathbf{U}$ 上的有界凸调和映照的拟共形性质, 且皆为双向 Lipschitz 映照. 这离调和映照的拟共形刻画尚有一定的距离. 本文中, 我们讨论在 $f(\mathbf{U})$ 为凸区域 (有界或者无界区域皆可) 的情况下 v -Bloch 调和映照 f 的拟共形性质, 这里 $0 \leq v \leq 1$ 为实常数. 特别地, 当 $v = 0$ 时, f 就是双向 Lipschitz 映照. 进一步地, 当 $f(\mathbf{U})$ 不是凸区域时, 我们也给出 f 具有拟共形性质的充分必要条件.

2 预备定理

定理 2.1 设 f 为定义在单位圆盘 $\mathbf{U}$ 上的单叶保向调和映照, 满足 $f(\mathbf{U})$ 为凸区域. 令 $0 \leq \alpha \leq 1$ 为实常数, 则下列两个条件互等价:

(i) 存在一个实常数 $M > 0$, 使得对于任意的 $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, 有

$$\frac{(\sqrt{(1+|z_1|)(1+|z_2|)})^{1-\alpha}|z_1-z_2|}{M} \leq |f(z_1)-f(z_2)| \leq \frac{M|z_1-z_2|}{(\sqrt{(1-|z_1|)(1-|z_2|)})^{1-\alpha}};$$

(ii) 存在一个实常数 $L > 0$, 使得对于任意的 $z \in \mathbf{U}$, 有

$$\frac{(1+|z|)^{1-\alpha}}{L} \leq \lambda_f(z) < \Lambda_f(z) \leq \frac{L}{(1-|z|)^{1-\alpha}}. \quad (2.1)$$

证明 (ii) $\Rightarrow$ (i) 对于任意的 $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, 令 $\varphi(t) := tz_1 + (1-t)z_2$ ($0 \leq t \leq 1$) 为连接 z_1 和 z_2 的直线段. 由 $|\varphi(t)| \leq t|z_1| + (1-t)|z_2|$ 可以得到

$$1 - |\varphi(t)| \geq 1 - t|z_1| - |z_2| + t|z_2| \geq (1-t)(1-|z_2|)$$

和

$$1 - |\varphi(t)| \geq 1 - t|z_1| - |z_2| + t|z_2| \geq 1 - t|z_1| - (1-t) = t(1-|z_1|).$$

因此,

$$(1 - |\varphi(t)|)^2 \geq t(1-t)(1-|z_1|)(1-|z_2|). \quad (2.2)$$

利用 (2.2) 和条件 (ii) 可得

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \int_0^1 \frac{df(\varphi(t))dt}{dt} \right| = \left| \int_0^1 [f_\zeta(\varphi(t))\varphi'(t) + f_{\bar{\zeta}}(\varphi(t))\overline{\varphi'(t)}]dt \right| \\ &\leq |z_1 - z_2| \int_0^1 (|f_\zeta(\varphi(t))| + |f_{\bar{\zeta}}(\varphi(t))|)dt \\ &\leq |z_1 - z_2| \int_0^1 \frac{L}{(1-|\varphi(t)|)^{1-\alpha}}dt \\ &\leq \frac{L|z_1 - z_2|}{(\sqrt{(1-|z_1|)(1-|z_2|)})^{1-\alpha}} \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{t(1-t)})^{1-\alpha}}dt \\ &= \frac{L|z_1 - z_2|}{(\sqrt{(1-|z_1|)(1-|z_2|)})^{1-\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^\alpha(2x)}{2^\alpha}dx \\ &\leq \frac{\pi L|z_1 - z_2|}{2^\alpha(\sqrt{(1-|z_1|)(1-|z_2|)})^{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

另一方面, 假设 $\xi = f(z_1)$, $\eta = f(z_2)$. 令 $\gamma(t) := t\xi + (1-t)\eta$ ($0 \leq t \leq 1$) 为连接 ξ 和 η 的直线段. 由于 $f(\mathbf{U})$ 为凸区域且 f 为单叶映照, 可得 $\gamma(t) \subseteq f(\mathbf{U})$ 且 $\Gamma(t) := f^{-1}(\gamma(t)) \subseteq \mathbf{U}$. 利用不等式 $1 + |\Gamma(t)| \geq \frac{1+|z_1|}{2}$, $1 + |\Gamma(t)| \geq \frac{1+|z_2|}{2}$ 和条件 (ii) 可得到下列的不等式:

$$\begin{aligned}
 |f(z_1) - f(z_2)| &= |\gamma'(t)| = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \\
 &= \int_0^1 |f_\zeta(\Gamma(t))\Gamma'(t) + f_{\bar{\zeta}}(\Gamma(t))\overline{\Gamma'(t)}| dt \\
 &\geq \int_0^1 [|f_\zeta(\Gamma(t))| - |f_{\bar{\zeta}}(\Gamma(t))|] |\Gamma'(t)| dt \\
 &\geq \int_0^1 \frac{(1 + |\Gamma(t)|)^{1-\alpha}}{L} |\Gamma'(t)| dt \\
 &\geq \frac{(\sqrt{(1+|z_1|)(1+|z_2|)})^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}L} \int_0^1 |\Gamma'(t)| dt \\
 &\geq \frac{(\sqrt{(1+|z_1|)(1+|z_2|)})^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}L} |z_1 - z_2|.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) 令 $z \in \mathbf{U}$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$. 由方向导数的定义 (1.1) 可得

$$\partial_\theta f(z) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} = f_z(z) + e^{-2i\theta} f_{\bar{z}}(z).$$

对于任意的 r 满足 $0 < r \leq \frac{1-|z|}{2}$, 利用条件 (i), 有

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} \right| &\leq \frac{M}{(\sqrt{(1-|z+re^{i\theta}|)(1-|z|)})^{1-\alpha}} \\
 &\leq \frac{M}{(\sqrt{(1-|z|-r)(1-|z|)})^{1-\alpha}} \\
 &\leq \frac{2^{(1-\alpha)/2}M}{(1-|z|)^{1-\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

令 $r \rightarrow 0^+$, 由 (2.5) 可知,

$$|\partial_\theta f(z)| = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} \right| \leq \frac{2^{(1-\alpha)/2}M}{(1-|z|)^{1-\alpha}}.$$

上式可以直接得到

$$\Lambda_f(z) = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} |\partial_\theta f(z)| \leq \frac{2^{(1-\alpha)/2}M}{(1-|z|)^{1-\alpha}} \leq \frac{2^{\frac{1}{2}}M}{(1-|z|)^{1-\alpha}}. \tag{2.6}$$

类似地, 对于任意的 r 满足 $0 < r \leq \frac{1+|z|}{2}$, 利用条件 (i), 有

$$\left| \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} \right| \geq \frac{(\sqrt{(1+|z|-r)(1+|z|)})^{1-\alpha}}{M} \geq \frac{(1+|z|)^{1-\alpha}}{2^{(1-\alpha)/2}M}. \tag{2.7}$$

令 $r \rightarrow 0^+$, 由 (2.7) 可知,

$$|\partial_\theta f(z)| = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} \right| \geq \frac{(1+|z|)^{1-\alpha}}{2^{(1-\alpha)/2}M}.$$

上式可以直接得到

$$\lambda_f(z) = \min_{\theta \in [0, 2\pi)} |\partial_\theta f(z)| \geq \frac{(1 + |z|)^{1-\alpha}}{2^{(1-\alpha)/2} M}. \quad (2.8)$$

证毕. $\square$

注 2.1 从定理 2.1 的证明过程可知,

- (i) 条件 (2.3) 与 (2.6) 等价只需要假设 f 具有一阶连续微分并且 $f(\mathbf{U})$ 也未必需要是凸区域;
- (ii) 条件 (2.4) 与 (2.8) 等价则需要 $f(\mathbf{U})$ 为凸区域和 f 为保向连续可微同胚映照.

假设 $f = h + \bar{g} : \mathbf{U} \mapsto \Omega$ 为单位圆到凸区域 (有界或者无界区域) 上的拟共形调和映照, 则 f 和 h 皆为 co-Lipschitz 映照 (参见文献 [7, 定理 2.5] 和 [9, 推论 3.1]). 然而 f 却未必为 Lipschitz 映照. 例如, 假设 f 为 $\mathbf{U}$ 到矩形域 Ω 上的共形映照, 则 f 在 Ω 上的 4 个顶点处的导数无界. 下列的定理 3.1 给出了在梯度 Λ_f 无界的条件下调和映照成为拟共形映照的条件.

3 主要定理及证明

定理 3.1 假设 f 为定义在 $\mathbf{U}$ 上的保向调和映照, 满足 $f(\mathbf{U})$ 为凸区域. 如果存在常数 $M > 0$, $C > 0$ 和 $0 \leq \alpha \leq 1$ 使得对于任意的 $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$ 有如下不等式成立:

$$\frac{(\sqrt{(1+|z_1|)(1+|z_2|)})^{1-\alpha} |z_1 - z_2|}{M} \leq |f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{M|z_1 - z_2|}{(\sqrt{(1-|z_1|)(1-|z_2|)})^{1-\alpha}}$$

和

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 - |\sigma(t)|^2)^{1-\alpha}} dt < C, \quad (3.1)$$

其中 $\sigma(t) := f^{-1}(tf(z_1) + (1-t)f(z_2)) \subseteq \mathbf{U}$, 则 f 为 K -拟共形映照, 这里 $K \leq 1 + 2^{2-\alpha} M^2 C$.

特别地, 若 $\alpha = 1$, 则 f 为双向 Lipschitz 映照.

证明 任取两个相异的点 $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, 并假设 $\xi = f(z_1)$ 和 $\eta = f(z_2)$. 令 $\gamma(t) := t\xi + (1-t)\eta$ ($0 \leq t \leq 1$) 为连接 ξ 和 η 两点的直线段. 由已知 $f(\mathbf{U})$ 为凸区域, 可知 $\gamma(t) \subseteq f(\mathbf{U})$. 从而,

$$\sigma(t) := f^{-1} \circ \gamma(t) \subseteq \mathbf{U}.$$

记 $w := f(z_1) - f(z_2)$ 并注意到 $\gamma'(t) = w$, 利用下列不等式:

$$\partial f^{-1}(f(z)) = \frac{\overline{h'(z)}}{J_f(z)} = \frac{\overline{h'(z)}}{|h'(z)|^2 - |g'(z)|^2} \quad (3.2)$$

和

$$\bar{\partial} f^{-1}(f(z)) = \frac{-\overline{g'(z)}}{J_f(z)} = \frac{-\overline{g'(z)}}{|h'(z)|^2 - |g'(z)|^2}, \quad (3.3)$$

可以得到

$$\begin{aligned} h(z_1) - h(z_2) &= \int_\sigma h'(z) dz = \int_0^1 h'(\sigma(t)) \sigma'(t) dt \\ &= \int_0^1 h'(\sigma(t)) [\partial f^{-1}(\gamma(t)) \gamma'(t) + \bar{\partial} f^{-1}(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)}] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 h'(\sigma(t)) [\partial f^{-1}(f(\sigma(t)))\gamma'(t) + \bar{\partial} f^{-1}(f(\sigma(t)))\overline{\gamma'(t)}] dt \\
&= \int_0^1 h'(\sigma(t)) \left[\frac{\overline{h'(\sigma(t))}}{J_f(\sigma(t))} w - \frac{\overline{g'(\sigma(t))}}{J_f(\sigma(t))} \bar{w} \right] dt \\
&= \int_0^1 \frac{|h'(\sigma(t))|^2 w - h'(\sigma(t))\overline{g'(\sigma(t))} \bar{w}}{J_f(\sigma(t))} dt.
\end{aligned}$$

记 $\frac{\bar{w}}{w} = e^{is}$, 由上式得到

$$\frac{h(z_1) - h(z_2)}{f(z_1) - f(z_2)} = \int_0^1 \frac{|h'(\sigma(t))|^2 - h'(\sigma(t))\overline{g'(\sigma(t))} e^{is}}{J_f(\sigma(t))} dt.$$

利用定理 2.1 的结果, 由 $\sigma(t)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{h(z_1) - h(z_2)}{f(z_1) - f(z_2)} \right| &\leq \int_0^1 \frac{|h'(\sigma(t))|^2 + |h'(\sigma(t))g'(\sigma(t))|}{J_f(\sigma(t))} dt \\
&= \int_0^1 \frac{|h'(\sigma(t))|}{\lambda_f(\sigma(t))} dt = 1 + \int_0^1 \frac{|g'(\sigma(t))|}{\lambda_f(\sigma(t))} dt \\
&\leq 1 + \int_0^1 \frac{2^{1-\alpha} M^2}{(1 - |\sigma(t)|^2)^{1-\alpha}} dt \\
&=: 1 + A.
\end{aligned}$$

任取 $z \in \mathbf{U}$ 、 $r > 0$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$, 令 $\zeta := z + re^{i\theta}$. 利用上述不等式有

$$\frac{1}{1+A} \left| \frac{h(\zeta) - h(z)}{\zeta - z} \right| \leq \left| \frac{h(\zeta) - h(z)}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} \frac{\overline{g(\zeta) - g(z)}}{\overline{\zeta - z}} \right|.$$

令 $r \rightarrow 0$, 则有

$$\frac{1}{1+A} |h'(z)| \leq |h'(z) + e^{-2i\theta} \overline{g'(z)}|.$$

因此选取适当的 θ 即得

$$\frac{1}{1+A} |h'(z)| \leq |h'(z)| - |g'(z)|.$$

于是,

$$\left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq 1 - \frac{1}{1+A} < 1.$$

这说明 f 为 K -拟共形映照, 且 $K \leq 1 + 2^{2-\alpha} M^2 C$. $\square$

定理 3.2 设 $f = h + \bar{g}$ 为定义在 $\mathbf{U}$ 上的保向调和映照, 满足 h 为凸映照 (即 h 为共形映照且 $h(\mathbf{U})$ 为凸区域), 则下列两个条件等价:

- (i) f 为拟共形映照;
- (ii) 存在常数 $1 \leq N < 2$, 使得对于任意的 $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, 有

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq N |h(z_1) - h(z_2)|. \quad (3.4)$$

证明 (ii) $\Rightarrow$ (i) 由已知 h 为凸映照, 利用文献 [14, 定理 5.17] 可知, f 为单叶、近于凸映照. 任取 $z \in \mathbf{U}$ 、 $r > 0$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$, 令 $\zeta := z + re^{i\theta}$. 由条件 (ii) 可知,

$$\left| \frac{h(\zeta) - h(z)}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} \frac{\overline{g(\zeta) - g(z)}}{\overline{\zeta - z}} \right| \leq N \left| \frac{h(\zeta) - h(z)}{\zeta - z} \right|.$$

令 $r \rightarrow 0$, 则有 $|h'(z) + e^{-2i\theta} \overline{g'(z)}| \leq N|h'(z)|$. 因此选取适当的 θ 即得 $|h'(z)| + |g'(z)| \leq N|h'(z)|$. 因此,

$$\left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq N - 1 < 1.$$

这就证明了 f 为拟共形映照.

(i) $\Rightarrow$ (ii) 由已知 f 为拟共形映照, 可得 $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| \leq \|\mu_f\|_\infty < 1$. 任取 $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, $z_1 \neq z_2$. 因为 h 为凸映照, 于是存在直线段 $\gamma: [0, 1] \ni t \mapsto th(z_1) + (1-t)h(z_2)$ 满足 $\gamma([0, 1]) \subset h(\mathbf{U})$. 于是,

$$\begin{aligned} |g(z_1) - g(z_2)| &= |g \circ h^{-1}(h(z_1)) - g \circ h^{-1}(h(z_2))| \\ &= \left| \int_\gamma \frac{d(g \circ h^{-1})(\zeta)}{d\zeta} d\zeta \right| \\ &\leq \int_\gamma \left| \frac{d(g \circ h^{-1})(\zeta)}{d\zeta} \right| |d\zeta| \\ &\leq \|\mu_f\|_\infty \int_\gamma |d\zeta| = \|\mu_f\|_\infty |h(z_1) - h(z_2)|, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中最后一个不等式成立是因为对于 $z = h^{-1}(\zeta)$, 下式成立:

$$\left| \frac{d(g \circ h^{-1})(\zeta)}{d\zeta} \right| = \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq \|\mu_f\|_\infty. \quad (3.6)$$

于是,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq (1 + \|\mu_f\|_\infty) |h(z_1) - h(z_2)|.$$

证毕. □

例 3.1 考虑定义在单位圆盘 $\mathbf{U}$ 上的调和映照 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \frac{\bar{z}^5}{6}$, 则对于任意的 $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, 有

$$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2) + \frac{1}{6} \overline{(z_1 - z_2)(z_1^4 + z_1^3 z_2 + z_1^2 z_2^2 + z_1 z_2^3 + z_2^4)}.$$

从而有 $|f(z_1) - f(z_2)| \geq \frac{|z_1 - z_2|}{6}$ 和 $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{11}{6} |z_1 - z_2| = N|h(z_1) - h(z_2)|$, 其中 $N = \frac{11}{6} < 1$. 进一步地计算易知, $|\frac{f_z(z)}{f_{\bar{z}}(z)}| \leq \frac{5}{6} < 1$. 这说明 $f(z)$ 为拟共形调和映照满足解析部分 $h(z) = z$ 为凸映照. 然而其象区域 $f(\mathbf{U})$ 如图 1 所示却不是凸区域.

图 1 象区域 $f(\mathbf{U})$ 的边界曲线

致谢 本文作者感谢 Ken-ichi Sakan 教授及审稿人对本文所提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Duren P. Theory of H^p Spaces. New York: Academic Press, 1970
- 2 Duren P. Harmonic Mappings in the Plane. New York: Cambridge University Press, 2004
- 3 Lewy H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. Bull Amer Math Soc (NS), 1936, 42: 689–693
- 4 Colonna F. The Bloch's constant of bounded harmonic mappings. Indiana Univ Math J, 1989, 38: 829–840
- 5 Chen S H, Ponnusamy S, Wang X T. Coefficient estimate and Landau-Bloch's constant for planar harmonic mappings. Bull Malays Math Sci Soc (2), 2011, 34: 255–265
- 6 Zhu J F. Coefficients estimate for harmonic v -Bloch mappings and harmonic K -quasiconformal mappings. Bull Malays Math Sci Soc (2), 2016, 39: 349–358
- 7 Kalaj D. On harmonic diffeomorphisms of the unit disc onto a convex domain. Complex Var Elliptic Equ, 2003, 48: 175–187
- 8 Kalaj D. Quasiconformal harmonic functions between convex domains. Publ Inst Math (Beograd) (NS), 2003, 90: 3–20
- 9 Partyka D, Sakan K. On a variant of Heinz's inequality for harmonic mappings of the unit disk onto bounded convex domains. Bull Soc Sci Lett Łódź Sér Rech Déform, 2009, 59: 25–36
- 10 Zhu J F. Some estimates for harmonic mappings with given boundary function. J Math Anal Appl, 2014, 411: 631–638
- 11 朱剑峰. 平面调和映照 Schwarz-Pick 引理的一个表述. 中国科学: 数学, 2014, 44: 823–836
- 12 Zhu J F. Landau theorem for planar harmonic mappings. Complex Anal Oper Theory, 2015, 9: 1819–1826
- 13 Partyka D, Sakan K. Quasiconformal and Lipschitz harmonic mappings of the unit disk onto bounded convex domains. Ann Acad Sci Fenn Math, 2014, 39: 811–830
- 14 Clunie J G, Sheil-Small T. Harmonic univalent functions. Ann Acad Sci Fenn Math, 1984, 9: 3–25

Quasiconformal harmonic mappings with unbounded gradient

Jianfeng Zhu

Abstract Let $f = h + \bar{g}$ be a harmonic mapping of the unit disk $\mathbf{U}$ onto a convex domain, where h and g are analytic in $\mathbf{U}$ and $g(0) = 0$. In this paper, we first find the equivalent description for Λ_f , the gradient of f , which has the control growth function $\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}$, where $z \in \mathbf{U}$ and $0 \leq \alpha \leq 1$. Then, we obtain the sufficient conditions for a v -Bloch harmonic mapping to be quasiconformal. Moreover, if $f(\mathbf{U})$ is a general domain (which may not be convex) and h is convex, then we give the necessary and sufficient conditions for f to be quasiconformal.

Keywords harmonic mapping, quasiconformal mapping, Lipschitz property, v -Bloch harmonic mapping

MSC(2010) 30C62, 30C20

doi: 10.1360/N012016-00044