

Fokker-Planck模拟离子声波中离子的能量输运

赵斌, 郑坚*

中国科学技术大学近代物理系, 中国科学院基础等离子体重点实验室, 合肥 230026

* 联系人, E-mail: jzheng@ustc.edu.cn

2008-12-29 收稿, 2009-03-08 接受

国家自然科学基金(批准号: 10625523, 10676033)和国家高技术研究发展计划惯性约束聚变专题资助项目

摘要 利用线性化Fokker-Planck方程模拟了激光等离子体中的离子声波, 重点研究了离子声波过程中的离子热流. 通过将线性化Fokker-Planck方程转化为本征值问题, 求解得到离子声波的本征模和扰动分布函数, 进而计算出 ZT_e/T_i 和 $k\lambda_{ii}$ 对离子热流的影响, 这里 Z , T_e/T_i , k , λ_{ii} 分别表示离子的有效电荷数、电子与离子的温度之比、离子声波的波数和离子的平均自由程. 在碰撞极限下 $k\lambda_{ii} \rightarrow 0$, 数值计算给出的离子热流与Braginskii的结果一致. 当 $k\lambda_{ii}$ 较大时, Braginskii理论不再成立, 离子热流出现受限的现象. 在朗道阻尼可以忽略的情况下, 离子热流随 $k\lambda_{ii}$ 的演化能够非常好地用公式进行拟合, 并给出了拟合参数与 ZT_e/T_i 的关系.

关键词

Fokker-Planck
离子声波
离子热流
激光等离子体

在激光等离子体物理的研究中, 输运和等离子体中的波都是重要的研究对象. 由于在激光等离子体的部分区域, 参数分布非常陡峭, 经典的热输运理论不成立, 热流呈现非局域性. 考察离子声波中的热输运是研究非局域热输运和非局域热流模型的有力工具. Bell^[1]最早利用线性Fokker-Planck(FP)方程解析研究了离子声波中的电子热流, 发现只有当离子声波的波长远远大于电子平均自由程时, 电子的热流才是经典的Spitzer-Härm^[2]热流, 当离子声波的波长相对于电子的自由程减小时, 经典的热流不再适用, 而发生热流受限的现象. 后来Epperlein^[3]利用FP模拟观察到了相同的现象, 并细致讨论了电子碰撞对离子声波中电子热流的影响. Tracy等人^[4]在计算熵波时也发现, 当 $k_{\text{ent}}\lambda_{ii}$ 较大时, 离子的热流将小于经典的离子热流, k_{ent} 和 λ_{ii} 分别是熵波的波数和离子的平均自由程.

热流可以通过Fokker-Planck方程来求解^[2,5,6], 但是一般计算比较复杂. Bell在研究离子声波中电子热流时, 也提出了利用卷积处理热流的思想, 即热流不再仅与局域的参数分布有关, 而是非局域的. 非局域卷积核描述是抛开繁杂的Fokker-Planck计算, 简

洁地描述非局域热流的途径, 更具有实用价值. 基于Bell的思想, 后来的研究者陆续提出了许多有关电子热流的非局域卷积模型^[7-10], 其中的一些经典的模型, 如Luciani-Mora-Virmont (LMV)模型、Epperlein-Short (E-S)模型、Batshchev模型的积分核都有一般的形式^[8-10]:

$$G(\eta(x, x')) = \int_0^\infty \frac{e^{ik\eta(x, x')}}{1 + (\alpha k \lambda_e)^\beta} dk, \quad (1)$$

$$q_e(x) = \int_{-\infty}^\infty q_{\text{SH}}(x') G(x, x') dx', \quad (2)$$

其中 $\eta(x, x') = \frac{1}{\alpha \lambda_e} \int_x^{x'} dx'' \frac{n_e(x'')}{n_e(x')}$, $G(x, x')$ 是非局域热流模型的卷积核, q_e 和 q_{SH} 分别为电子的非局域热流和经典的Spitzer-Härm热流, 在流体理论成立的情况下, $k\lambda_e \rightarrow 0$, $G(x, x')$ 退化为 δ 函数, 非局域热流也即为经典的热流. λ_e 是有效非局域长度, 对于LMV模型和E-S模型, $\lambda_e = \lambda_{ei} Z / \sqrt{(Z+1)/\sqrt{9\pi/2}}$, $\lambda_{ei} = 3T_e^2 / (4\sqrt{2\pi} n_e Z e^4 \ln \Lambda)$ 是电子-离子平均自由程, α 和 β 为两个拟合因子.

在激光等离子体物理中, 内爆发生时, 离子的平

均自由程很大, 离子的热流也变得十分重要. 本文利用线性Fokker-Planck方程模拟离子声波, 重点研究离子声波中离子的热流以及离子热流卷积核的表达式. 将线性Fokker-Planck方程转化为本征值方程来求解, 模拟考察了 ZT_e/T_i 和 $k\lambda_{ii}$ 对离子热导的影响. 在碰撞极限下 $k\lambda_{ii} \rightarrow 0$, 计算的热导系数能够精确给出离子热导的经典值. 当 $k\lambda_{ii}$ 较大时, 发现经典的热导系数不再成立, 离子热流出现受限的现象. 在朗道阻尼可以忽略的情况下, 发现离子热导随 $k\lambda_{ii}$ 的演化能够非常好地利用公式予以拟合, 并给出了拟合参数随 ZT_e/T_i 的变化关系. 对于 $ZT_e/T_i=10$, 我们计算发现, 在碰撞极限到无碰撞极限的整个区间, 非局域公式整体上不能给出较好的拟合. 在弱碰撞区间, 朗道阻尼起主要作用, 计算的离子热导与已有的理论结果相符, 热导与 $1/k$ 成正比^[11], 这也与考虑了静电场修正的计算结果一致^[7].

1 计算方程和模型

考虑描述电子、离子的Fokker-Planck方程, 假设系统沿着 Z 方向存在小的静电扰动, 扰动的分布函数和扰动电场为 $F_\alpha = f_0^\alpha(\mathbf{v}) + f_1^\alpha e^{i(kz - \omega t)}$, $E = -\nabla\varphi$, 其中 $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 e^{i(kz - \omega t)}$, 当然这里假定了 $f_1^\alpha/f_0^\alpha \ll 1$, $\varphi_1/\varphi_0 \ll 1$, 式中 $f_0^\alpha = n_0^\alpha \exp(-v^2/2v_\alpha^2)/(2\pi v_\alpha^2)^{3/2}$ 是背景粒子的麦克斯韦速度分布函数, $v_\alpha = (k_B T_\alpha/m_\alpha)$ 是粒子的热速度, n_α 是背景 α 类粒子的数密度. 电子和离子的线性化Fokker-Planck方程组可表达为^[4]

$$i(kv_z - \omega)f_1^i + i \frac{Ze\phi kv_z}{T_i} f_0^i = C(f_0^i, f_1^i) + C(f_1^i, f_0^i), \quad (3a)$$

$$i(kv_z - \omega)f_1^e - i \frac{e\phi kv_z}{T_e} f_0^e = 0. \quad (3b)$$

我们已经假设了电子无碰撞, 即电子满足线性化的Vlasov方程. 由电子满足的方程(3b)我们可以得到电子的扰动密度(n_1^e):

$$\begin{aligned} n_1^e &= \int f_1^e d\mathbf{v} = \frac{e\phi}{T_e} \int \frac{kv_z f_0^i}{(kv_z - \omega)} d\mathbf{v} \\ &= \frac{en_0^e}{T_e} \phi \left[1 + \left(\frac{\omega}{kv_e} \right) Z(\omega/kv_e) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $Z(\omega/kv_e)$ 是等离子体色散函数^[12], 对于离子声波, 频率较低, 一般有 $\omega/k \ll v_e$, 这样我们可以得到极限情况下 $\omega/kv_e \rightarrow 0$ 扰动电势的解:

$$\varphi_1 = \frac{T_e n_1^e}{en_0^e}.$$

利用准中性近似 $n_1^e = Zn_1^i$, 则方程(3)封闭可解, 其中 $C(f_0, f_1)$ 和 $C(f_1, f_0)$ 为离子碰撞项. 对扰动分布函数做Legendre展开 $f_1 = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(v) P_l(\mu)$, 代入方程(3)

可以得到关于Legendre展开系数的方程链. 将Legendre展开在 L 阶截断后, 利用有限差分或者矩展开的方法^[4,13], 方程(3)可以化成本征值方程来求解. 我们这里使用了Tracy的方法, 利用有限差分数值求解^[4,14]. 从物理上说, 本征解中只有三个虚部最小的解是我们感兴趣的, 即阻尼率最小的三个解, 分别对应着一支零频的熵波和两支反平行传播的离子声波, 即一对阻尼率相同、实部相反的解 $\omega_{ia} = \pm\omega - \gamma_{ia}$. 一旦本征值确定下来, 相应的本征矢也就随之确定. 本征矢对应着扰动的分布函数, 利用它我们可以计算各种感兴趣的扰动宏观量.

2 计算结果与讨论

对于波数为 k 的扰动, 利用上述的线性Fokker-Planck方程求解, 我们可以得到离子声波的本征频率和扰动分布函数, 进而我们可以计算出相应的扰动密度 ρ_1 、扰动速度 u_1 、扰动温度 T_1 以及离子热流 q_1 . 为了闭合广义流体力学方程, 需要定义热导系数, 这里采用Chang-Callen给出的热流与热导系数的关系^[15]:

$$q_1 = -ikn_0 v_T \lambda_{ii} k T_1 + \kappa' n_0 T_i u_1,$$

其中 κ 是我们关注的热导系数. 在碰撞极限下它是我们熟悉的Braginskii离子热导系数, $\kappa = 3.95$ ^[6]; 离子-离子碰撞的平均自由程为

$$\lambda_{ii} = \frac{3\sqrt{\pi} T_i^2}{4\pi n_i Z^4 e^4 \ln \Lambda}.$$

这样我们可以求出在不同的扰动波数(k)、不同的碰撞参数($k\lambda_{ii}$)下离子声波中的离子热导系数.

电子非局域热流理论认为, 电子热流的傅里叶分量仍然正比于温度梯度的傅里叶分量:

$$q_k = -ik\kappa T_k,$$

q_k 是热流的傅里叶分量, $\kappa(k)$ 是热导系数, 一般它是 k 的函数, 只有在碰撞极限下, κ 才独立于波数 k 退化为经典的热导系数 κ_{SH} . 为了得到一般情况下的热传导系数, 需要借助于Fokker-Planck模拟来计算不同

波数下, 扰动热流与扰动温度的比值. 从方程(1)我们可以看出, 对于不同波长下的热导系数, 几种经典的非局域热导模型可表达为

$$\kappa / \kappa_{\text{SH}} = 1 / [1 + (\alpha k \lambda_e)^\beta], \quad (5)$$

λ_e 是有效非局域长度. 对方程(5)作傅里叶逆变换可以得到电子非局域热流的积分核. 参数 $\alpha = 32$, $\beta = 2$ 是经典的LMV模型^[8], $\alpha = 50$, $\beta = 1$ 是Epperlein-Short(E-S)模型^[9].

考虑离子在不同波长下的热导系数, 我们将电子的非局域热流理论应用在离子热流的描述上, 我们假设离子的热流也可以用方程(5)相同的形式来描述:

$$\frac{\kappa}{\kappa_{\text{Br}}} = \frac{1}{1 + (\alpha k \lambda_{ii})^\beta}. \quad (6)$$

图1和2分别给出了 $ZT_e/T_i=22, 80$ 时, FP 模拟的

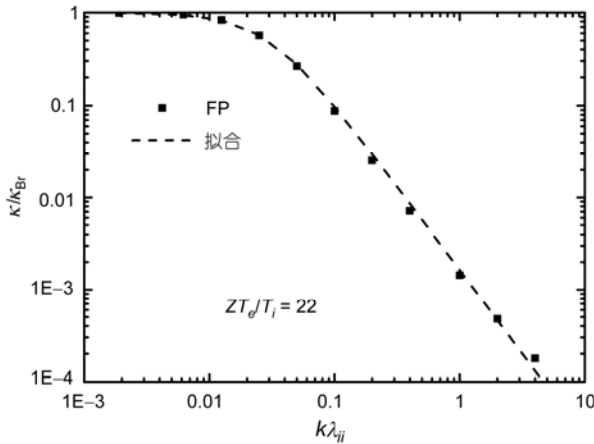


图1 $ZT_e/T_i=22$, FP 计算的离子热导系数与相应的非局域模型公式的拟合

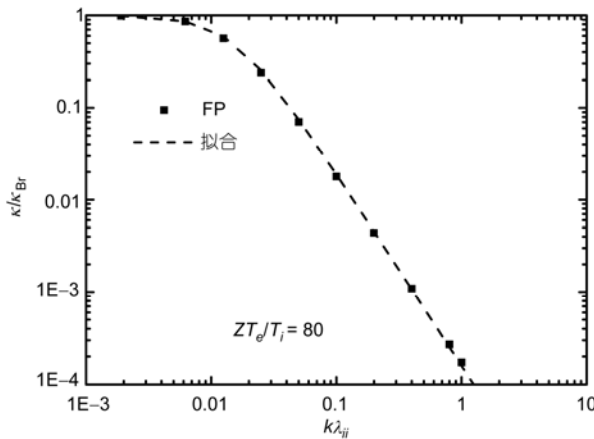


图2 $ZT_e/T_i=80$, FP 计算的离子热导系数与相应的非局域模型公式的拟合

热导系数与公式(6)的拟合曲线. 拟合中 $ZT_e/T_i=22$: $\alpha = 34$, $\beta = 1.83$; $ZT_e/T_i=80$: $\alpha = 67$, $\beta = 2.08$. 从图中我们可以看出, 在碰撞极限下, 计算的热导与 Braginskii 的结果一致, 当碰撞变弱时($k\lambda_{ii}$ 增大), 计算的热导系数减小, Braginskii 热导系数不再成立. 由图中我们也可以看出, 非局域公式(6)能够很好地拟合离子热导随 $k\lambda_{ii}$ 的变化.

在 ZT_e/T_i 相对较小, 图3给出了 $ZT_e/T_i=10$, FP计算的离子热导系数与非局域模型公式(6)在碰撞和弱碰撞区间的拟合曲线. 此时非局域公式不再能够整体上拟合离子的热导系数, 但是在强碰撞区间和弱碰撞区间分别能够较好地拟合, 在 $k\lambda_{ii} \sim 1$ 附近, 两种拟合都有一定的偏差. 在弱碰撞区, 我们的拟合结果是 $1/(1+75k\lambda_{ii})$. 理论上, 在 $k\lambda_{ii} \gg 1$ 时, 此时朗道阻尼起主要作用, 由Vlasov方程计算的热导正比于 $1/k$ ^[11], 这与我们在弱碰撞下的计算结果和拟合公式是一致的. 在 $k\lambda_{ii} \ll 1$ 时, 主要是离子碰撞起主导作用, 强碰撞区间也能很好地拟合. 而在 $k\lambda_{ii} \sim 1$ 附近, 碰撞效应和朗道阻尼同时作用, 都不能忽略, 非局域公式给出的拟合偏差较大. 在图1和2中, ZT_e/T_i 较大时, 即 $\omega/kv_i \gg 1$, 离子朗道阻尼 $\propto \exp(-|\omega/kv_i|^2/2)$ 可以忽略, 公式(6)能够很好地拟合离子的热流.

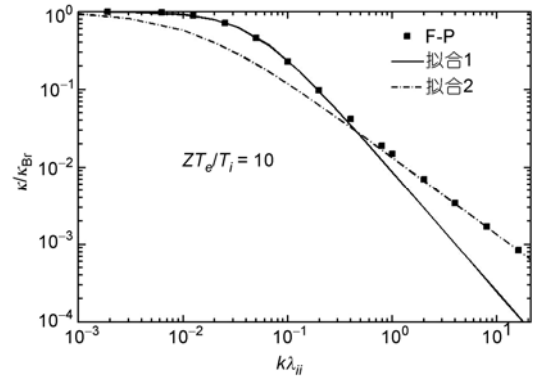
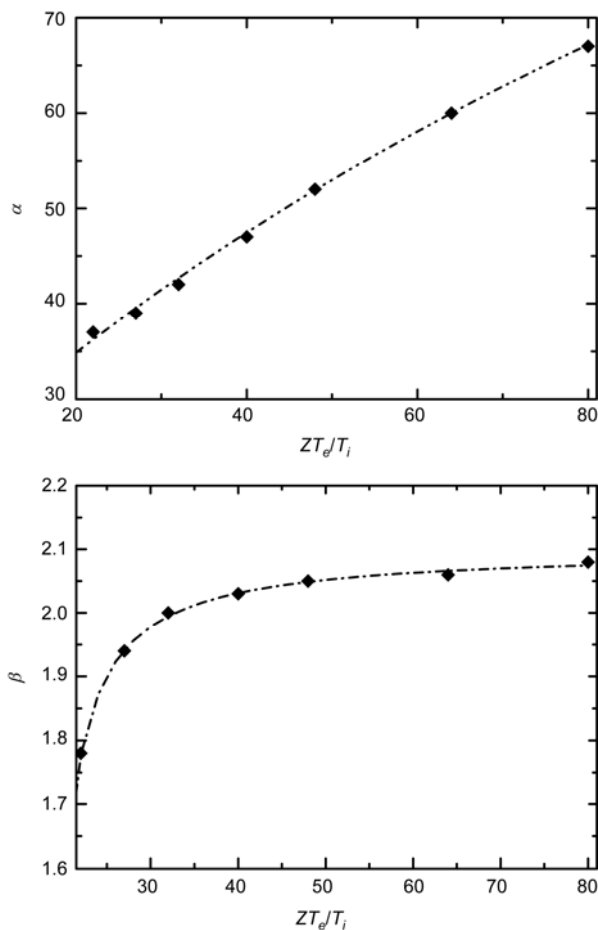


图3 $ZT_e/T_i=10$, FP 计算的离子热导系数与非局域模型公式在碰撞和弱碰撞区间的拟合

在电子的非局域拟合公式中, 拟合参数 α , β 取值是定值, 不依赖等离子体的其他参数. 对离子的热流的拟合, 我们发现参数 α , β 不再是定值, 而是随 ZT_e/T_i 变化的量. 在考虑参数 ZT_e/T_i 较大(≥ 22)的情况下, 对不同的 ZT_e/T_i 的离子热导进行拟合, 我们给出了拟合参数 α , β 随 ZT_e/T_i 的变化关系:

图4 参数 α , β 随 ZT_e/T_i 的变化与拟合图

$$\alpha = \frac{5860 + 225.6(ZT_e/T_i)}{275.7 + (ZT_e/T_i)}, \quad (7)$$

$$\beta = \frac{6.485 - 151.2(ZT_e/T_i) + 8.403(ZT_e/T_i)^2}{1 - 68.98(ZT_e/T_i) + 4.002(ZT_e/T_i)^2}. \quad (8)$$

图4分别给出了参数 α 和 β 随 ZT_e/T_i 的变化以及(7)和(8)式的曲线图. (7)和(8)式结合非局域公式(6)可以让我们计算在不同碰撞强度 $k\lambda_{ii}$ 、不同 ZT_e/T_i 时的离子热导, 这样我们可以用流体力学方程来描述不同碰撞强度下的离子非局域热流.

3 结论

本文利用线性化 Fokker-Planck 方程求解离子声波, 重点研究了离子声波过程中的离子热流. 通过将线性化 Fokker-Planck 方程化为本征值问题, 可以得到对应于离子声波的本征扰动分布函数, 进而计算出 ZT_e/T_i 和 $k\lambda_{ii}$ 对离子热导的影响, 在碰撞极限下 $k\lambda_{ii} \rightarrow 0$, 数值计算给出的离子热导与 Braginskii 的结果一致. 当 $k\lambda_{ii}$ 较大时, Braginskii 理论不再成立, 离子热流出现受限的现象. 在朗道阻尼可以忽略的情况下, 离子热导系数随 $k\lambda_{ii}$ 的演化能够非常好地利用(6)式进行拟合, 并给出了拟合参数 α 和 β 与 ZT_e/T_i 的关系. 离子的非局域公式可以让我们利用流体方程来考察离子的非局域热流, 以及非局域热流对其他物理过程的影响.

参考文献

- 1 Bell A R. Electron energy transport in ion waves and its relevance to laser produced plasmas. *Phys Fluids*, 1983, 26: 279—284[doi]
- 2 Spitzer L, Härm R. Transport phenomena in a completely ionized gas. *Phys Rev*, 1953, 89(6): 977—981
- 3 Epperlein E M. Effect of electron collisions on ion-acoustic waves and heat flow. *Phys Plasmas*, 1994, 1: 109—115[doi]
- 4 Tracy M D, Williams E A, Estabrook K G, et al. Eigenvalue solution for the ion-collisional effects on ion-acoustic and entropy waves. *Phys Fluids B*, 1993, 5: 1430—1439[doi]
- 5 Zhu S P, Gu P J. A heat transport model including the effect of non-Maxwellian electron distribution and its application in laser produced plasma. *Chin Phys Lett*, 1999, 16(7): 520—522[doi]
- 6 Braginskii S I. *Reviews of Plasma Physics*. New York: Consultants Bureau, 1965. 205
- 7 Xu Y, He X T. Modified formula of nonlocal electron transport in a laser-produced plasma. *Phys Rev E*, 1994, 50: 443—447[doi]
- 8 Luciani J F, Mora P, Virmont J. Nonlocal heat transport due to steep temperature gradients. *Phys Rev Lett*, 1983, 51: 1664—1667[doi]
- 9 Epperlein E M, Short R W. A practical nonlocal model for electron heat transport in laser plasmas. *Phys Fluids B*, 1991, 3: 3092—3098[doi]
- 10 Batshchev O V, Bychenkov V Y, Detering F, et al. Heat transport and electron distribution function in laser produced plasmas with hot spots. *Phys Plasmas*, 2002, 9: 2302—2310[doi]
- 11 Hammett G W, Perkins F W. Fluid moment models for Landau Damping with application to the ion-temperature-gradient instability. *Phys Rev Lett*, 1990, 64: 3019—3022[doi]

- 12 Fried B D, Conte S D. The Plasma Dispersion Function. New York: Academic Press, 1961. 1—3
- 13 Zheng J, Yu C X. Ion-collisional effects on ion-acoustic wave: An eigenvalue technique via moment expansion. Plasma Phys Control Fusion, 2000, 42: 435—441[[doi](#)]
- 14 Zhao B, Zheng J. A Fokker-Planck study of the eigenmodes in an unmagnetized pair plasma. Phys Plasmas, 2007, 14: 062106[[doi](#)]
- 15 Chang Z, Callen J D. Unified fluid/kinetic description of plasma microinstabilities. Part I: Basic equations in a sheared slab geometry. Phys Fluids B, 1992, 4: 1167—1181[[doi](#)]

Fokker-Planck simulation of ion energy transport in ion acoustic waves

ZHAO Bin & ZHENG Jian

CAS Key Laboratory of Basic Plasma Physics, Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Ion acoustic wave is computed by solving linearized Fokker-Planck equation as an eigenvalue problem. Ion energy transport in ion acoustic wave is studied as a function of $k\lambda_{ii}$ and T_e/T_i . It is found computed ion conductivity can give an exact agreement with Braginskii value of 3.95 in collisional limit $k\lambda_{ii} \rightarrow 0$. When $k\lambda_{ii}$ increases, ion conductivity decreases and Braginskii theory breaks down, which indicates that the ion heat flux becomes nonlocal. When Landau damping is negligible, ion conductivity as a function of $k\lambda_{ii}$ is well fitted by nonlocal formulas, and the fitting parameter as a function of T_e/T_i is found and presented. Thus the ion nonlocal heat formulas are developed, which can provide an efficient and practical implementation in fluid description.

Fokker-Planck, ion acoustic wave, ion conductivity, laser-produced plasma