中国科学: 数学　2011 年　第 41 卷　第 8 期: 689～699
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

(α,β)- 空间中的 Killing 向量场

沈斌, 康琳*

浙江大学数学系, 杭州 310027
E-mail: shenbin_cgs@hotmail.com, mumu_0@163.com

收稿日期: 2011-04-22; 接受日期: 2011-06-17; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10871171) 资助项目

摘要　本文证明了非 Riemannian (α,β)- 空间中的 Killing 向量场最大维数是 $n(n-1)/2+1$. 并且给出了具有最大维数 Killing 向量场的非 Riemannian (α,β)- 空间的度量形式. 最后, 若进一步假定 α 是一个齐性 Riemannian 度量, 则可确定 (α,β)- 空间的第二空隙. 最后给出几个低维流形上 Killing 场空间维数的例子, 这表明在 (α,β) 情形下 Killing 场空间维数的空隙被压缩.

关键词　(α,β)- 度量　Killing 向量场　空隙现象

MSC (2000) 主题分类　53B40

1　引言

Killing 向量场是指流形上保持度量不变的向量场, 也是等距变换的无穷小生成元. 在物理和几何中都有重要的应用. 因此从实际应用和理论完整两方面的需要来讲, 研究 Killing 场可能的维数就成为了一个有趣的工作, 这同时等价于寻找流形上可能的群作用的最大参数个数.

众所周知, 在 n 维 Riemannian 空间中, Killing 场张成的线性空间的维数至多是 $n(n+1)/2$. 王宪钟在 1947 年证明了任一 Finsler 流形若具有最大群作用参数, 则一定是具有常曲率的 Riemannian 流形[1]. 同时, 他也提到了流形上 Killing 场的第一空隙是从 $n(n+1)/2$ 到 $n(n-1)/2+1$. 以此为基础, Egorov[2,3] 在 1949 年得到了第二空隙是从 $n(n-1)/2+1$ 到 $(n-1)(n-2)/2+3$. 上世纪六十年代, 谷超豪和胡和生给出了确定所有齐性 Riemannian 空间中 Killing 场空间维数空隙的方法, 并以此给出了对应度量的形式 [4]. 因此这一问题在 Riemannian 情形可以说已经完全解决了.

上世纪末到本世纪初, 物理学家从新的角度重新发掘了这一问题 [5,6]. 他们添加了一些新的理论来改进爱因斯坦的相对论, 比如所谓的 DSR[7,8] 和 VSR[9]. 前者假设增加一个新的能量常数, 后者则增加了对群作用的限制. 这些理论与 Finsler 几何都有密切的关系 [10–12]. 某些基于 Finsler 度量给出的模型能简单明了地解释航天观测的一些现象. 例如可以不引入暗物质解释螺旋星云悬臂的旋转曲线 [13]; 先锋 10 号和 11 号太空船观测到的太阳系引力现象也可以由 Randers 空间来解释 [14]. 这些都表明研究 Finsler 空间的对称是有价值的. 熟知的结果表明 Finsler 空间上 Killing 场张成的空间维数达到最大一定是空间形式. 而对于非 Riemannian 情形, Egorov 在上世纪八十年代指出在 n 维 Finsler 流形上等距群维数至多是 $n(n-1)/2+2$ (参见文献 [2]). 最近, Li 和 Chang[4] 研究了伪 Riemannian 型的 Randers 空间.

英文引用格式: Shen B, Kang L. Killing vector fields on (α,β)-space (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(8): 689–699, doi: 10.1360/012011-295

文献 [5] 中指出, (α, β)- 空间中的 Killing 向量满足两个 Lie 导数方程. 一个是关于 Riemannian 度量的 Lie 导数 $\mathcal{L}_V \alpha = 0$. 另一个是关于一形式 β 的, $\mathcal{L}_V \beta = 0$. 由此, 我们进一步可以确定在 (α, β)- 空间中 Killing 向量场空间的最大维数为 $n(n-1)/2 + 1$. 一个自然的问题就是, 何时维数才能达到最大? 我们发现此时空间必须是一个乘积流形的形式 $M \times \mathbf{R}$. Randers 度量中的 Riemannian 部分 α 是一个乘积度量 $ds^2 + dt^2$, 它的一形式部分 β 是一个沿着 $\mathbf{R}$ 方向的平行向量场. (α, β)- 空间中的第二空隙被确定为从 $n(n-1)/2$ 到 $(n-1)(n-3)/2 + 3$. 最后, 假设 α 是一个常曲率 Riemannian 度量, 我们给出了一些例子说明在 (α, β)- 空间下等距群维数的空隙现象被压缩了. 特别是在低维情形, 空隙现象几乎消失.

2 基础知识

本节我们给出 Finsler 空间和 Killing 向量场的一些基础知识.

定义 1 流形 M 上的一个 Finsler 结构是指一个非负函数

$$F:\ TM \to [0, \infty)$$

满足以下性质:

(a) F 在整个穿孔切丛上 $TM \setminus 0$ 上是 C^∞ 的;

(b) F 具有正齐次性: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, 对于任意 $\lambda > 0$;

(c) Hessian 矩阵 $(g_{ij}) := \frac{1}{2}[(F^2)_{y^i y^j}]$ 在 $TM \setminus 0$ 上任一点是正定的.

装备有 Finsler 度量的流形称为 Finsler 流形, 记为 (M, F). 若基本张量 g_{ij} 与方向 y 无关, 则此度量称为 Riemannian 度量.

一类非常重要的 Finsler 度量是由一个 Riemannian 度量 α 和一个一形式 β 构成的. 我们称之为具有 (α, β)- 型的度量, 或者简称 (α, β)- 度量.

定义 2 (α, β)- 度量具有以下形式:

$$F = \alpha \phi(s),$$

其中 $s = \frac{\beta}{\alpha}$, ϕ 是一个在区间 $(-b_o, b_o)$ 上定义的 C^∞ 正函数. ϕ 满足微分方程

$$\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0, \quad |s| \leqslant b < b_o.$$

值得一提的是, 若 $\phi = \sqrt{1 + Cs^2}$, 其中 C 是一个常数, 则 F 是一个 Riemannian 度量. 若 $\phi = 1 + s$, 则 $F = \alpha + \beta$. 这就是熟知的 Randers 度量. Randers 度量是由 Randers 在 1941 年为研究相对论首次引进的.

在一般的 Finsler 流形上, Killing 向量场是指满足以下方程的向量场 V:

$$L_V(F) \equiv V^i \frac{\partial F}{\partial x^i} + y^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \frac{\partial F}{\partial y^i} = 0. \tag{2.1}$$

若 V 是一个 Killing 向量场, 则由 V 生成的单参数变换是一个等距群中的元素 [5].

当 F 是一个 Riemannian 度量时, Killing 场方程化为熟知的以下方程

$$V_{i|j} + V_{j|i} = 0, \tag{2.2}$$

这里 “|” 表示关于 Levi-Civita 联络的共变导数.

应用 Ricci 恒等式和第一 Bianchi 恒等式, 易知 Killing 向量 V 满足

$$V_{i|j|k} = V_l R_k{}^l{}_{ji}, \tag{2.3}$$

其中 $R_k{}^l{}_{ji}$ 是 M 上的曲率张量. 由 (2.3), V_i 被 V_i 和 $V_{i|j}$ 的线性组合所决定. 换言之, 一旦 V_i 和 $V_{i|j}$ 在某固定点给定, 则在附近点的 V 可由以上的常微分方程组给出. 因此, 在 n 维 Riemannian 流形上, 线性 Killing 场空间的维数至多是 $n(n+1)/2$. 下面的性质是熟知的.

性质 1 若 (M,g) 是完备 Riemannian 流形, 其等距群维数 $\dim \mathrm{Iso}(M,g) = n(n+1)/2$, 则 (M,g) 具有常曲率. □

现若进一步假设 M 的常曲率为 k, 则其线素可写为

$$ds = \frac{\sqrt{(1+k|x|^2)|dx|^2 - k\langle x, dx\rangle^2}}{1+k|x|^2},$$

其中 k 分别取 $0, 1, -1$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是指 Euler 内积. 此时 Killing 方程 (2.2) 可变形为

$$\frac{\partial V_i}{\partial x^j} + \frac{\partial V_j}{\partial x^i} + \frac{2k}{1+k|x|^2}(x_i V_j + x_j V_i) = 0. \tag{2.4}$$

方程 (2.4) 的解为

$$V^i = Q^i_k x^k + C^i + k\langle x, C\rangle x^i, \tag{2.5}$$

其中 Q 和 C 的指标由 Euler 度量 δ_{ij} 及其逆矩阵 δ^{ij} 上下拉动. 这里我们可以通过空间形式中 V 的表达式清楚地看到此时达到了等距群的最大维数.

当度量为 (α,β)- 型时, Killing 向量场方程变为

$$\left(\phi(s) - s\frac{\partial\phi(s)}{\partial s}\right)K_V(\alpha) + \frac{\partial\phi(s)}{\partial s}K_V(\beta) = 0. \tag{2.6}$$

当 F 是 Randers 度量的时候, 易知 $K_V(\alpha)$ 包含无理项部分而 $K_V(\beta)$ 都是有理项. Killing 方程 (2.6) 分裂为以下两个独立的方程:

$$K_V(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}(V_{i|j} + V_{j|i})y^i y^j = 0,$$
$$K_V(\beta) = \left(V^i\frac{\partial b_j}{\partial x^i} + b_i\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\right)y^j = 0.$$

这等价于以下两个方程, 其中一个是 Riemannian Killing 方程而另一个是由 β 给出的限制方程,

$$V_{i|j} + V_{j|i} = 0, \tag{2.7}$$

$$V^i b_{j|i} + b^i V_{i|j} = 0. \tag{2.8}$$

当 F 是一个 (α,β)- 度量, 即 $F = \alpha\phi(s)$ 时, 我们也有类似的结果. 下面的定理首先在 [5] 中被发现, 这里我们给出一个完整的证明.

定理 1[5] 若 F 是一个 M 上的非 Riemannian (α,β)- 度量, V 是其上一个 Killing 向量场, 当且仅当

$$V_{i|j} + V_{j|i} = 0,$$

$$V^i b_{j|i} + b^i V_{i|j} = 0.$$

证明 由 (2.7) 和 (2.8) 两式可知, (2.6) 在坐标变化下不变. 因此可在一点选取特殊坐标系, 使得 $\alpha = \sqrt{\delta_{ij}y^iy^j}$, $\beta = by^1$.

选取如下变量代换 [17], $y^1 = \frac{s}{\sqrt{b^2-s^2}}\bar{\alpha}$, $y^a = u^a$, 其中 $2 \leqslant a \leqslant n$, $\bar{\alpha} = \sqrt{\delta_{ab}u^au^b}$. 直接计算可知变换的 Jacobi 非零. 由此 (2.6) 等价于

$$\mathbb{A}\bar{\alpha}^2 + \mathbb{B}\bar{\alpha} + (\phi - s\phi')V_{a|b}u^au^b = 0, \tag{2.9}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \frac{1}{b^2-s^2}[(\phi - s\phi')s^2V_{1|1} + bs\phi'(V^ib_{1|i} + V_{1|1}b)],\\ \mathbb{B} &= \frac{1}{\sqrt{b^2-s^2}}[(\phi - s\phi')s(V_{1|a} + V_{a|1})u^a + \phi' b(V^ib_{a|i} + V_{1|a}b)u^a],\end{aligned}$$

这里 (2.9) 中只有 $\bar{\alpha}$ 包含 u 的无理项, 因而 (2.9) 等价于 $\mathbb{B} = 0$, 且

$$\mathbb{A}\bar{\alpha}^2 + V_{a|b}u^au^b = 0. \tag{2.10}$$

在 (2.10) 中令 $s = 0$, 有

$$V_{a|b} + V_{b|a} = 0. \tag{2.11}$$

将 (2.11) 代入 (2.10) 中得到

$$b(V^ib_{1|i} + V_{1|1}b)\frac{s\phi'}{\phi - s\phi'} + s^2V_{1|1} = 0. \tag{2.12}$$

我们断言 $V^ib_{1|i} + V_{1|1}b = 0$ 且 $V_{1|1} = 0$. 否则, $V^ib_{1|i} + V_{1|1}b \neq 0$, 则有 $\frac{\phi}{\phi - s\phi'} = Cs$, 其中 C 为常数. 其一般解为 $\phi = \sqrt{1 + Cs^2}$. 这是一个 Riemannian 度量, 矛盾.

现在有 $V^ib_{1|i} + V_{1|1}b = 0$. 代入 (2.12), 注意到 $\{y = (y^i)|s = 0\}$ 在 T_xM 中的测度为零, 有

$$V_{1|1} = 0. \tag{2.13}$$

最后由 $\mathbb{B} = 0$, 应用相同的方法, 可知

$$V_{1|a} + V_{a|1} = 0. \tag{2.14}$$

在特殊坐标系下, $V_{i|j} + V_{j|i} = 0$ 正等价于 (2.11), (2.13) 及 (2.14). 代回到 (2.6), 得

$$V^ib_{j|i} + b^iV_{i|j} = 0. \qquad \square$$

3 具有最大等距群的非 Riemannian (α,β)- 空间

本节中我们将确定非 Riemannian (α,β)- 空间中的等距群最大维数, 并给出何时这个维数达到最大.

首先, (2.7) 缩并 b^j, 并利用 (2.8) 易得

$$b^jV_{i|j} - V^jb_{i|j} = 0.$$

在一点处可选取特殊坐标系使得 $\beta = by^1$, 其中 $b^2 = a^{ij}b_ib_j$. 由 $b \neq 0$ 可知,

$$V_{i|1} = \frac{1}{b}V^jb_{1|j}.$$

这表明方程的独立初始条件减少了 $(n-1)$ 个. 则 Killing 向量场空间的维数变为 $n(n+1)/2-(n-1) = n(n-1)/2+1$. 结合定理 1, 我们得到以下结果.

定理 2 非 Riemannian (α,β)- 空间中的等距群维数是 $\frac{n(n-1)}{2}+1$. □

注 1 (2.8) 缩并上 b^j 并由 (2.7) 可知 $V^jb^2{}_{|j} = 0$. 这表明当 $b^2 \neq$ 常数 时, 非 Riemannian (α,β)- 空间等距群维数至多为 $n(n-1)/2$. □

由王宪钟的定理 [1], 含有极大参数变换的 Finsler 流形一定是常曲率 Riemannian 流形. 一个自然的问题就是在非 Riemannian (α,β)- 空间中, 包含最大等距群维数的空间是什么样的? 我们分两步给出答案. 首先我们考虑紧致流形的情形.

定理 3 一个紧致非 Riemannian (α,β)- 空间 $\tilde{M}$ 具有最大的等距群维数, 当且仅当它是一个常曲率 Riemannian 流形 M 和一维平坦流形 $\mathbf{R}$ 的乘积, 并且一形式 β 是一个方向在 $\mathbf{R}$ 上的平行向量场. $\tilde{M}$ 的度量可表示为 $ds^2 \times dt$, 其中 ds^2 是 M 上的标准度量.

证明 对 (2.8) 求一次共变导数得

$$V^j{}_{|k}b_{i|j} + V^jb_{i|j|k} - b^j{}_{|k}V_{i|j} - b^jV_sR_k{}^s{}_{ji} = 0, \tag{3.1}$$

这里我们用到 Ricci 恒等式 $V_{i|j|k} = V_sR_k{}^s{}_{ji}$.

(3.1) 缩并 b^k, 由假设, 等距群维数达到最大, 则有

$$V^j(b_{k|j}b_{i|}{}^k + b_{i|j|k}b^k - b^kb^sR_{kjsi}) = V_{i|j}b^kb^j{}_{|k}, \tag{3.2}$$

注意到定理 2 的注记, 显然有 $b^2 =$ 常数.

在一点出选取特殊坐标系, 由 $b_1 =$ 常数, 以及 (3.2) 可知

$$bb^a{}_{|1}V_{i|a} = V^j(b_{a|j}b_{i|}{}^a + bb_{i|j|1} - b^2R_{1j1i}),$$

此处 $i,j = 1,\dots,n$, $a,c = 2,\dots,n$. 限制 $i = 1,\dots,n$ 到 $c = 2,\dots,n$, 由上式可知 V^j, $V_{a|b}$ 是线性相关的. 在这一特殊坐标系下, $V_{i|1}$ 可以由 V^j 线性表示, 因此若 $b^a{}_{|1} \neq 0$, 则独立参数必然少于 $n(n-1)/2+1$.

当等距群为数达到最大, 也即流行上群作用参数个数达到最大时, 向量场 $B = b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是自平行的, 即

$$b^a{}_{|1} = 0. \tag{3.3}$$

在这一坐标系下, (3.1) 可表达为

$$V^a{}_{|c}b_{d|a} - b^a{}_{|c}V_{d|a} + V^j\left[b_{i|j|k} + \frac{1}{b}(b_{d|}{}^a + b^a{}_{|c})b_{a|j} - bR_{kj1i}\right] = 0.$$

应用同样的分析, 独立参数个数达到最大, 可知

$$V^a{}_{|c}b_{d|a} - b^a{}_{|c}V_{d|a} = 0.$$

若 $c = d$, 则有 $\sum_a(V_{a|c}b_{c|}{}^a - b^a{}_{|c}V_{c|a}) = 0$, 这表明

$$b_{c|}{}^a + b^a{}_{|c} = 0.$$

若 $c\neq d$, 则有

$$\sum_{a\neq c;a\neq d}(V_{a|c}b_{d|}{}^{a}+V_{a|d}b^{a}{}_{|c})+V_{d|c}(b_{d|}{}^{d}-b^{c}{}_{|c})=0,$$

这说明对任意取值从 2 到 n 的 $d\neq c\neq a$ 成立

$$b_{d|}{}^{a}=b^{a}{}_{|c}=0, \tag{3.4}$$

且对任意取值从 2 到 n 的 $d\neq c$ 成立

$$b_{d|}{}^{d}-b^{c}{}_{|c}=0.$$

若进一步, 空间是紧的, 则散度项 $\sum_i b_{i|}{}^{i}=(n-1)b_{2|}{}^{2}=0$. 结合上式可知 $b_{2|}{}^{2}=\cdots=b_{n|}{}^{n}=0$. 综合 (3.3), (3.4) 以及定理 2 中的注记, 我们得到 $b_{i|j}=0$.

$b_{i|j}=0$ 即为 β 平行. 有此平行向量场, 流形 $\tilde{M}$ 分解为 $\mathbf{R}\times M$, 其中 $\mathbf{R}$ 是一维向量空间, M 是一个 Riemannian 流形.

假设 V 是 M 上的一个 Killing 向量场, 由 $\tilde{M}$ 的度量是一个乘积度量可知当任一 i,j,k 取为 1 时, $\Gamma^{i}_{jk}=0$. 直接计算可知 M 上的 Killing 向量场一定是 $\tilde{M}$ 上的 Killing 向量场. 因此, $\tilde{M}$ 的等距群为数达到最大, 也即 Killing 场空间维数达到最大当且仅当 M 上的 Killing 场空间维数达到最大. 显然 M 必为常曲率 Riemannian 流形. 此时 $\tilde{M}$ 的等距群最大维数为 $n(n-1)/2+1$. 符合定理 3. □

由定理 3 的证明可知, 若非 Riemannian (α,β)- 空间具有最大维数的 Killing 向量场空间, 则一形式 β 一定是闭的. 对于非紧情形, 空间依然分裂为这样两部分. 细节的呈述和证明即下一定理.

定理 4 一个非 Riemannian (α,β)- 空间 $\tilde{M}$ 具有最大的等距群维数当且仅当它是一个常曲率 Riemannian 流形 M 和一维平坦流形 $\mathbf{R}$ 的乘积, 并且一形式 β 是一个方向在 $\mathbf{R}$ 上的平行向量场. $\tilde{M}$ 的度量可表示为 $ds^2\times dt$, 其中 ds^2 是 M 上的标准度量.

证明 若非 Riemannian (α,β)- 空间达到最大的等距群维数, 则其对应 α 为度量的 Riemannian 空间一定或为常曲率空间或为乘积空间 $M\times\mathbf{R}$.

若 $\tilde{M}$ 具有常曲率, 则 Killing 场方程的解为 (2.5). 若 $b_i\neq$ 常数, 代入方程 (2.8), 得

$$(Q^{i}{}_{k}x^{k}+k\langle x,c\rangle x^{i}+c^{i})\frac{\partial b_j}{\partial x^i}+b_i(Q^{i}{}_{j}+kc^{j}x^{i}+k\langle x,c\rangle\delta^{j}{}_{i})=0. \tag{3.5}$$

此式缩并 x^j, 得

$$x^k\left(Q^{i}{}_{k}\frac{\partial b_j}{\partial x^i}x^j+b_iQ^{i}{}_{k}\right)+x^k\left(k\langle x,c\rangle x^i\frac{\partial b_k}{\partial x^i}+c^i\frac{\partial b_k}{\partial x^i}+k\langle x,c\rangle b_k\right)=0.$$

此式对于任意的 x^k 都成立, 取 x^k 为 $\frac{\partial(x^lb_l)}{\partial x^k}$, 上式变为

$$\frac{\partial(x^lb_l)}{\partial x^k}\left(\frac{\partial b_k}{\partial x^i}x^ikx^j+\frac{\partial b_k}{\partial x^j}+kb_kx^j\right)c^j=0.$$

此方程说明至少有一个 c^i 不是独立参数. 另一方面, $Q^{i}{}_{k}$ 是一个 Lie 代数. 其极大正规 Lei 子代数的元素个数至少减少 $n-1$ 个. 因此若我们对 c^i 作出限制, 则 $Q^{i}{}_{j}$ 必须构成一个 n 维正交群的 Lie 代数. 换句话说, 表达式 (3.5) 中的 $Q^{i}{}_{j}$ 部分必须恒等于零, $Q^{i}{}_{k}(x^k\frac{\partial b_j}{\partial x^i}+b_i\delta^{j}{}_{k})=0$. 因此系数关于 i,k 指标反称. 此时 (3.5) 为

$$k\langle x,c\rangle\left(x^i\frac{\partial b_j}{\partial x^i}+b_j\right)+(b_ix^i)kc^j+\frac{\partial b_i}{\partial x^j}c^j=0. \tag{3.6}$$

又因为 β 是闭的, 得

$$\frac{\partial[b_ic^i+k\langle x,c\rangle(x^ib_i)]}{\partial x^j}=0. \tag{3.7}$$

因此有 $c^i\equiv 0$ 对任意的 i 成立. 则 Killing 场解的独立参数 c^i 和 ${Q^i}_j$ 至少减少了 n 个. 这与 $\tilde{M}$ 具有极大等距群维数矛盾. 因此 $b_i\equiv$ 常数.

若 $b_i=$ 常数 且 $k\neq 0$, (3.5) 变为

$$b_i({Q^i}_j+kc^jx^i+k\langle x,c\rangle{\delta^j}_i)=0.$$

缩并 b^j, 得

$$k\langle b,c\rangle\langle x,b\rangle+k\langle x,c\rangle b^2=0. \tag{3.8}$$

取 x 分别为 b 和 c, 则有 $c^i\equiv 0$. 这也与产生了矛盾. 因此 $k\equiv 0$.

若 $\tilde{M}$ 是一个乘积流形, $\tilde{M}=M\times\mathbf{R}$, 仅需说明 M 上的 Killing 向量场也是 $\tilde{M}$ 上的 Killing 向量场. 我们确定指标 i,j,k 表示 $\tilde{M}$ 上的向量或张量, 而 a,b,c 表示 M 上的对应量. 一形式 β 的对偶向量 B 可以分解为 $B^\perp$ 与 $B^\top$, 其中 $B^\perp$ 垂直于 M, 而 $B^\top$ 是 M 上的向量. 对于 α 和 V 我们也引入类似的分解表示.

$\mathcal{L}_V\beta=0$ 也即 $[V,B]=0$, 由上面的表示, 可展开为 $[V^\top+V^\perp,B^\top+B^\perp]$. 因为 M 和 $\mathbf{R}$ 的基不同, 可见

$$\begin{aligned}0&=[V^\top,B^\top]+[V^\perp,B^\top]+[V^\top,B^\perp]+[V^\perp,B^\perp]\\&=[V^\top,B^\top]+[V^\perp,B^\perp],\\ [V^\top,B^\top]&=0,\\ [V^\perp,B^\perp]&=0.\end{aligned}$$

这样, $\mathcal{L}_V\beta=0$ 等价于 $\mathcal{L}_{V^\top}\beta^\top=0$ 并且 $\mathcal{L}_{V^\perp}\beta^\perp=0$. 另一方面, 众所周知 $\mathcal{L}_V\alpha=0$ 等价于 $\mathcal{L}_{V^\top}\alpha^\top=0$ 并且 $\mathcal{L}_{V^\perp}\alpha^\perp=0$. 我们仅需分别考虑 M 和 $\mathbf{R}$ 上的 Killing 向量场即可. 而 M 上有至多 $n(n-1)/2$ 个 Killing 向量场. 且达到时, M 必为 $n-1$ 维空间形式. 此时若 β 在 M 上有非零分量, 则由前一部分证明可知 M 上等距群维数至少减少 $n-2$ 个. 若在 $\mathbf{R}$ 上 $b_i\neq$ 常数, 则 $\mathbf{R}$ 上不存在 Killing 向量场. 因此当 $\tilde{M}$ 具有最大维数的等距群时, β 一定为 $\mathbf{R}$ 上的平行向量场. □

4　(α,β)- 空间中的空隙现象

与 Riemannian 情形类似, 当 α 是一个齐性 Riemannian 度量时 (α,β)- 空间同样有空隙现象. 这里我们用第一和第二空隙来说明.

定理 5　设 M 是一个 n 维 (α,β)- 空间. M 上等距群维数的第一空隙为从 $n(n+1)/2$ 到 $n(n-1)/2+1$. 第二空隙为从 $n(n-1)/2$ 到 $(n-1)(n-2)/2+3$, 这里 $n\geqslant 8$.

证明　首先, 若空间对应的 Riemannian 度量 α 是常曲率的, 则易知当 α 平坦时对应的 (α,β)- 空间中上的等距群维数达到最大. 取定一点, $b_i(x)$ 可做 Tayler 展开 $b_i(x)=B_i+B_{ij}x^j+B_{ijk}x^jx^k+B_{ijkl}x^jx^kx^l+\cdots$. 由 (2.5), (2.8), 并设 $k=0$, 则有

$$V^i={Q^i}_kx^k+C^i, \tag{4.1}$$

$$b_i\frac{\partial V^i}{\partial x^j}+V^i\frac{\partial b_j}{\partial x^i}=0. \tag{4.2}$$

把 Tayler 展开代入 (4.2) 可得

$$\begin{aligned}&B_jQ^j{}_i+C^jB_{ij}=0,\\&B_{jk}Q^j{}_i+Q^j{}_kB_{ij}+C^j(B_{ijk}+B_{ikj})=0,\\&B_{jkl}Q^j{}_i+Q^j{}_k(B_{ijl}+B_{ilj})+C^j(B_{ijlk}+B_{iljk}+B_{ilkj})=0,\\&\cdots.\end{aligned} \tag{4.3}$$

由上一节可知 B_{ijk} 及更高阶导数可以由 B_i 和 B_{ij} 完全决定. 因为只需考虑前面的两个方程即可. 由直接讨论, 我们断言, 当 α 为常曲率 Riemannian 度量时, (α,β)- 空间中的 Killing 场空间维数前三个最大的值为 $n(n-1)/2+1$, $n(n-1)/2$, $(n-1)(n-2)/2+1$.

若 α 为常曲率 Riemannian 度量, 等距群维数大于 $(n-1)(n-2)/2+1$ 的只可能是以下几种情形: 从 $(n-1)(n-2)/2+2$ 到 $(n-1)(n-2)/2+(n-2)$, $(n-2)(n-3)/2+1+n$, $(n-2)(n-3)/2+1+(n-1)$ 和 $(n-2)(n-3)/2+n$.

若此时 c^i 全不为零, 则 5.1 中的第一个式子表明只有 $B_jQ^j_i$ 限制 Q^j_i 减少了 $n-1$ 个参数. 此时等距群维数为 $(n-1)(n-2)/2+n$.

若有 $n-1$ 个 c^i 不为零, 则 B_{ij} 作用在 Q^j_i 上限制了 $n-1$ 个参数. 等距群维数减少为 $n(n-1)/2$. 若进一步考虑常向量, 则维数减少为 $(n-1)(n-2)/2+1$. 例如此时 β 可选为 $(x^1+\epsilon,0,\dots,0)$ 的形式. 若有 $n-2$ 个 c^i 非零, 则 B_{ij} 至少限制了 $2n-4$ 个 Q^j_i 可由其余线性表出. 此时维数为 $(n-2)(n-1)/2+1$. 这里 β 可选为 $(x^1,x^2,0,\dots,0)$.

若有 2 个 c^i 非零, 则 B_{ij} 至少限制了 $2n-2$ 个 Q^j_i. 此时等距群维数 $(n-2)(n-3)/2+3$, 小于 $(n-1)(n-2)/2+1$.

若分别有 3 至 $n-3$ 个 c^i 非零, 则对于 Q^i_j 给出的限制都将多于有 $(n-2)$ 或 2 个 c^i 非零时的情形. 因此当 α 具有常曲率时, 前三个非 Riemannian (α,β)- 空间中的 Killing 场空间维数最大值为 $n(n-1)/2+1$, $n(n-1)/2$, $(n-1)(n-2)/2+1$.

若流形具有乘积流形 $M\times\mathbf{R}$ 结构, 其中 M 是一个常曲率 Riemannian 空间而 β 是一个沿 $\mathbf{R}$ 方向的向量场, 则前三个非 Riemannian (α,β)- 空间中的 Killing 场空间维数最大值分别为 $n(n-1)/2+1$, $n(n-1)/2$, $(n-1)(n-2)/2+2$.

若流形具有乘积流形 $M\times\mathbf{R}^2$ 结构, 其中 M 是一个常曲率 Riemannian 空间, 则前五个非常曲率 Riemannian (α,β)- 空间中的 Killing 场空间维数最大值分别为 $n(n-1)/2+3$, $n(n-1)/2+2$, $n(n-1)/2+1$, $n(n-1)/2$, $(n-2)(n-3)/2+4$. 此处 $n(n-1)/2+3$ 对应着 β 消失, 即 (α,β) 流形是一个 Riemannian 流形. 当 $n>8$ 时, 这就是第二空隙的下界. □

5 低维情形的例子

在本节中, 我们通过例子说明等距群维数的空隙在非 Riemannian (α,β)- 空间的情形下是几乎消失的, 尤其是在低维的时候. 首先我们仍然考虑 α 是常曲率的情形. 这是因为这情形包含在定理 3 中, 且 Killing 场的形式可以完全表示出来. 其次, 我们仅写出流形是 4 和 5 维的情形. 这是因为确定 $o(n)$ 的 Lie 子代数本身是一个纯代数问题. 高维的情形可以通过同样的方法得到. 最后通过补充一些特殊的 (α,β)- 空间, 在低维时空隙完全消失.

由 (4.1), (4.2) 可以看出选择不同的 β, 对 V 会有不同的限制. 式 (4.1) 中, Q^i_k 是反称矩阵, C^i 是常向量. 由经典的 Riemannian 情形可知等距群维数为 10(6+4). (Q^i_k) 的正规子代数维数为 6, 3, 2, 1. C^i 可视为平移, 可限制其子空间维数为 4, 3, 2, 1, 0. 因此 Killing 场空间的维数可能的情形列于下表 1 中.

表 1 可能的维数

7				3+4	6+1
6			2+4	3+3	6+0
5		1+4	2+3	3+2	
4	0+4	1+3	2+2	3+1	
3	0+3	1+2	2+1	3+0	
2	0+2	1+1	2+0		
1	0+1	1+0			

事实上我们有以下定理:

定理 6 设 α 是平坦度量, 则 4 维非 Riemannian (α,β)- 空间 Killing 场空间维数列于下表 2 中.

表 2 维数

7				3+4	
6				3+3	6+0
5					
4		1+3	2+2	3+1	
3		1+2		3+0	
2	0+2	1+1	2+0		
1	0+1	1+0			

证明 将 $b_i(x)$ 在一点处 Tayler 展开,

$$b_i(x) = B_i + B_{ij}x^j + B_{ijk}x^jx^k + B_{ijkl}x^jx^kx^l + \cdots .$$

由 (4.2) 可知

$$\begin{aligned}
&B_jQ^j_i + C^jB_{ij} = 0,\\
&B_{jk}Q^j_i + Q^j_kB_{ij} + C^j(B_{ijk} + B_{ikj}) = 0,\\
&B_{jkl}Q^j_i + Q^j_k(B_{ijl} + B_{ilj}) + C^j(B_{ijlk} + B_{iljk} + B_{ilkj}) = 0,\\
&\cdots .
\end{aligned} \tag{5.1}$$

同样我们只需考虑前两个方程.

令 β 是一个常向量场. 则 $(Q^j{}_i)$ 减少 $n-1$ 个独立参数.

若 β 仅有 x 项且各方向都相同 (这种情形也可称为迷向), 即 $b_i = g(x)x^i$. 易知, 若群作用参数达到最大时 β 是闭的一形式. 此时 (4.2) 等价于

$$0 = C^i\frac{\partial b_j(x)}{\partial x^i} = C^i\frac{\partial b_i(x)}{\partial x^j} = \frac{\partial(C^ib_i(x))}{\partial x^j}.$$

则 $C^i b_i(x) =$ 常数. 从而 $C \equiv 0$.

以下结论由直接计算可知.

若 C 消失, 则 $B_{ij}x^j$ 维数必须达到最大且各向同性, 比如可取为 (x^1, x^2, x^3, x^4). 此时, 等距群维数为 $6+0$. 若 $B_{ij}x^j$ 维数达到最大且三个方向满足各向同性, 如 $(x^1, x^2, x^3, 2x^4)$, 则等距群的正交部分不能保持极大, 维数减少为 $3+0$. 若 $B_{ij}x^j$ 维数达到最大且两两满足各向同性, 如 $(x^1, x^2, 2x^3, 2x^4)$, 则等距群维数进一步减少为 $2+0$. 若仅两个方向各向同性, 如 $(x^1, x^2, 2x^3, 3x^4)$, 则维数为 $1+0$. 若各向异性, 如 $(x^1, 2x^2, 3x^3, 4x^4)$, 则正交部分无法保持, 流形上没有任何 Killing 场, 维数为 $0+0$. 若 β 还含有常数向量部分 B_j, 结果也是类似的.

若 C 有一个方向非零, 则 $B_{ij}x^j$ 必须减少一维, 如 $(x^1, x^2, x^3, 0)$. 若这三个方向各向同性, 则空间等距群维数为 $3+1$. 若两个方向各向同性, 如 $(x^1, x^2, 2x^3, 0)$, 则等距群维数为 $1+1$. 若 β 还含有常数向量部分 B_j, 则相应的等距群维数为 $3+1$, $1+1$, $0+1$. 由于三维 Lie 代数不包含二维的 Lie 子代数, 因而不会出现等距群维数为 $2+1$ 的情形.

若 C 有两个方向非零, 则对应 $B_{ij}x^j$ 只有两个非零. 若这两个方向各向同性, 如 $(x^1, x^2, 0, 0)$, 空间等距群维数为 $2+2$. 否则为 $1+2$. 进一步结合常向量部分 B_j, 等距群维数可下降为 $1+2$, $0+2$.

若 C 保持三个方向, $B_{ij}x^j$ 只限一个维数自由变动. 此时空间等距群维数为 $3+3$. 进一步考虑常向量则有维数 $1+3$.

最后若 C 全非零, 则 $B_{ij}x^j$ 项消失. 空间等距群维数达到最大 $3+4$. □

由此一个直接的推论是:

推论 1 在四维非 Riemannian (α,β)- 空间中, 若 α 是常曲率 Riemannian 度量, 则其上不存在五维的 Killing 场空间. □

此时若考虑 $M \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 形式的乘积 (α,β)- 空间, 其中 β 是一个仅在某一个 $\mathbf{R}$ 方向上的一形式. 并假定 M 为常曲率 Riemannian 空间. 则等距群的维数为 $5(3+2)$. 因此四维非 Riemannian (α,β)- 空间的等距群空隙现象消失.

由同样的讨论, 我们有

定理 7 在五维非 Riemannian (α,β)- 空间中, 若 α 是平坦度量, 则其上 Killing 场空间维数列于表 3 中.

表 3 维数

11						6+5	
10						6+4	10+0
9							
8							
7				3+4	4+3	6+1	
6				3+3	4+2	6+0	
5				3+2			
4		1+3	2+2	3+1	4+0		
3		1+2	2+1	3+0			
2	0+2	1+1	2+0				
1	0+1	1+0					

□

这时等距群维数的空隙现象也仍然消失. 这是因为我们可进一步考虑如下两种情形: (1) $S^3 \times \mathbf{R}^2$, 其中 β 消失, 则等距群维数为 9. (2) $S^3 \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 其中 β 是在某一个 $\mathbf{R}$ 方向上的一形式, 则等距群维数为 8.

致谢 感谢沈一兵教授的帮助和鼓励, 感谢审稿人的仔细阅读和建议. 感谢国家自然科学基金的支持.

参考文献

1 Wang H C. On Finsler spaces with completely intergrable equations of killing. J London Math Soc, 1947, 22: 5–9
2 Egorov A I. Lacuncry Finsler spaces. Math USSR Sb, 1983, 44: 279
3 Egorov A I. To use the Fubini's theorem on the order of groups of motions in Riemannian spaces (in Russian). DAN CCCP, 1949, 66: 793–796
4 谷超豪. 齐性黎曼空间上的微分几何学. 上海: 上海科技出版社, 1965
5 Li X, Chang Z, Mo X H. Isometric group of (α, β)-type Finsler space and the symmetry of Very Special Relativity. arxiv.org/pdf/1001.2667
6 Li X, Chang Z. special relativity in Finsler spacetime with constant curvature. unpablished
7 Amelino-Camelia G. Doubly-special relativity: First results and key open problems. arxiv.org/abs/gr-qc/0210063
8 Judes S, Visser M. Conservation laws in "doubly special relativity". Phys Rev D, 2003, 68: 045001
9 Cohen A G, Glashow S L. Very Special Relativity. Phys Rev Lett, 2006, 97: 021601
10 Girelli F, Liberati S, Sindoni L. Planck-scale modified dispersion relations and Finsler geometry. Phys Rev D, 2007, 75: 064015
11 Ghosh S, Pal P. Deformed special relativity and deformed symmetries in a canonical framework. Phys Rev D, 2007, 75: 105021
12 Mignemi S. Doubly special relativity and Finsler geometry. Phys Rev D, 2007, 76: 047702
13 Chang Z, Li X. Modified Newton's gravity in Finsler space as a possible alternative to dark matter hypothesis. Phys Lett B, 2008, 668: 453–456
14 Li X, Chang Z. A possible scenario of the Pioneer anomaly in the framework of Finsler geometry. Phys Lett B, 2010, 692: 1–3
15 Bao D, Chern S S, Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. In: Graduate Texts in Mathematics 200. New York: Springer, 2000
16 Petersen P. Riemannian Geometry. In: Graduate Texts in Mathematics 171. New York: Springer, 2006
17 Li B, Shen Z M. On a class of prokectively flat Finsler metrics with constant curvature. Intern J Math, 2007, 18: 749–760

Killing vector fields on (α, β)-space

SHEN Bin & KANG Lin

Abstract In this paper, it is proved that the maximum dimension of the Killing vector space in a non-Riemannian (α, β)-space is $n(n-1)/2+1$. The non-Riemannian (α, β)-metric which admits the maximum dimension of Killing vector space is determined. At last, if we further assume that α is a homogenious Riemannian metric, the first gap is given. The examples of different dimensions of Killing vetor space in low dimensisional case can be determined. It shows the gap phenomenon almost disappear in the (α, β)-space.

Keywords: (α, β)-space, Killing vector field, gap phenomenon
MSC(2000): 53B40
doi: 10.1360/012011-295