www.scichina.com info

info.scichina.com



# 数字图像纹理细节的分数阶微分检测及其分数阶微分滤波器实现

蒲亦非<sup>©②③④\*</sup>、王卫星<sup>©</sup>、周激流<sup>©⑤</sup>、王一扬<sup>⑤</sup>、贾华丁<sup>©</sup>

- ① 四川大学计算机学院, 成都 610064;
- ② 电子科技大学电子工程学院, 成都 610054;
- 3 Academie des Sciences de l'Institue de France, 28, rue Saint-Dominique, Paris 75007, France;
- 4 Laboratoire de l'IADI ERI (INSERM-UHP) au CHU de Nancy Brabois, Université Henri Poincaré(Nancy I), Vandoeuvre les Nancy 54511, France;
- ⑤ 四川大学电子信息学院, 成都 610064
- \* E-mail: Puyifei\_007@163.com

收稿日期: 2007-09-11; 接受日期: 2008-02-19

法中科学与应用基金(批准号: FFCSA)、中国博士后科学基金(批准号: 20060401016)、国家自然科学基金(批准号: 60572033)和中国教育部博士点基金(批准号: 20060610021)资助项目

摘要 文中提出并论述数字图像纹理细节的分数阶微分检测及其分数阶微分滤波器实现. 首先, 分别从信息论和动力学两个角度深刻阐述了分数阶微积分的几何意义和物理意义. 然后, 提出并论述了分数阶驻点、分数阶平衡系数、分数阶稳定系数、分数阶灰度共生矩阵的概念与理论, 并详细论述了分数阶灰度共生矩阵对图像纹理细节特征的检测. 然后, 论述了在 x 轴负、 x 轴正、 y 轴负、 y 轴正、 左下对角线、 左上对角线、 右下对角线、 右上对角线 8 个方向上的数字图像任意分数阶 n×n 的分数阶微分掩模的构造及其数值运算规则. 最后, 在此基础上, 提出并论述了数字图像分数阶微分滤波器的理论与构造. 仿真实验分别从定性和定量两方面证实了, 对于纹理细节信息丰富的图像信号而言, 分数阶微分具有非线性增强图像复杂纹理细节特征的独特优势与良好效果.

#### 关键词

分数阶驻点 分数阶平衡系数 分数阶稳定系数 分数阶灰度共生矩阵 分数阶微分掩模

近300年以来,分数阶微积分已成为数学分析的一个重要分支,但对于国内外众多数学家乃至工程技术界的物理学家而言它还鲜为人知.一般而言,Euclid 测度下的分数阶微积分,是将整数阶微积分的整数步长推广到分数步长的结果,数学上要求必须使用 Euclid 测度;同时,

由于物理过程中的随机变量为粒子随机运动的位移, 所以, 在 Euclid 测度意义下, 原则上可以 应用分数阶微积分来处理与分析物理状态与过程, 目前, Euclid 测度下的分数阶微积分已经被 用于扩散过程、粘弹性理论和随机分形动力学的研究. 但其绝大多数应用还仅仅停留在处理物 理变化过程中的暂态,而对系统的演化过程很少涉及.如何将分数阶微积分应用于现代信号 分析与处理, 特别是数字图像处理之中, 在国际上还是一个研究甚少的新兴学科分支[1~10]. 正 如历史上许多基于分数阶的数学方法(如分数阶 Fourier 变换、分数阶子波包变换等)在它们刚 被引入到现代信号处理这一领域之初,许多学者对它秉持一种观望甚至怀疑的态度一样,分 数阶微积分在现代信号分析与处理中的应用也同样需要人们在思维上跨越从整数阶到分数 阶、从整数维到分数维、从整数型量纲到分数型量纲、从 Euclid 测度观到分形测度观的门槛. 人 们对这种崭新数学方法的研究热情也常常首先需要一两个比较理想的应用突破来激发, 正是 基于这种原始的热望, 本文针对这个前沿课题的冰山一角进行了尝试性地探索和研究. 绝大 多数的分形结构是事物演化过程(如分形生长)和演化的最终产物(如断口等),数字图像中的邻 域内像素与像素之间的灰度值具有高度自相似性: 图像信号中高度自相似的分形信息通常是 以复杂的纹理细节特征来表现的[1-4.11]. 各类函数的分数阶 v 阶微积分具有 2 个明显的特征: 其 中一大部分函数类, 它们的 v 阶微积分是幂函数; 另一部分函数的 v 阶微积分或者是某种函 数与幂函数的迭加, 或者是某种函数与幂函数的乘积<sup>[1,5-8,12]</sup>. 这种规律性是否预示着某种自然 界的变化规律呢?科学研究已经证实许多分数阶、分数维的数学方法是目前人类对许多自然 现象的最佳描述. 于是很自然地想到, 能否利用分数阶微分处理来增强二维乃至n维图像信号 中具有分形信息的复杂纹理细节特征呢?与整数阶微分不同,直流或低频信号的分数阶微分 值一般不为 0: 对信号进行分数阶微分处理既非线性地加强了信号的高频分量, 又在一定程度 上非线性地加强了信号的中频分量,同时还极大地非线性保留了信号的低频和直流分量[1-5].因 此, 图像分数阶微分具有特殊的特殊 Mach 现象; 其拮抗特性具有特殊的生物视觉感受野模 型[1.2], 数字图像的分数阶微分掩模特性有别于其整数阶微分掩模特性[1~3]. 基于发明专利[4], 本文提出并论述了分数阶微积分的几何意义、物理意义以及图像纹理细节特征的分数阶微分 检测方法: 阐述了数字图像分数阶微分掩模及其数值运算规则: 进而根据数字图像分数阶微 分的性质以及数字图像处理、数字电路、串行数字视频码流的输入特点,提出并论述了一种实 时、非线性增强数字图像复杂纹理细节特征的数字图像处理电路装置的新方案, 即数字图像的 分数阶微分滤波器[4].

# 1 理论推导和分析

#### 1.1 分数阶微积分的几何意义和物理意义

众所周知,函数一阶导数的几何意义是曲线的斜率;其整数阶积分则是规整几何图形的 Euclid 测度.函数一阶和二阶导数的物理意义分别是速度和加速度;函数一阶导数的动力学物理意义则是流.那么函数分数阶微积分的几何意义和物理意义是什么?这是分数阶微积分应用研究必须首先回答的问题.

分形数学理论中产生了测度观的转变,分形几何否定了 Newton-Lebnitz 导数的存在性. 以

Hausdorff 测度为基础的分形理论,虽然历经了 80 余年的研究至今仍然还是一种很不完善的数学理论,Hausdorff 测度下的微积分数学理论的构造至今尚未能完成。目前分数阶微积分常用的 Grümwald-Letnikov 定义是在 Euclid 测度下定义的分数阶微积分,是将整数阶微积分的整数步长推广到分数步长的结果,在数学上要求必须使用 Euclid 测度. 分数阶微积分的 G-L 定义将微积分阶次从整数  $m \in \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}$  表示整数)阶推广到实数(包括分数,甚至可推广到复数) $\nu$  阶。因此,原则上在 Euclid 测度下定义的分数阶微积分可被应用于处理与分析在 Euclid 测度意义下的物理状态与过程.

 $\forall v \in \mathbb{R}$ , 令其整数部分为[v], 若信号  $s(t) \in [a,t]$  ( $a < t, a \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) 存在 m+1 阶连续导数; 当 v>0 时, m 至少取[v], 则分数阶(v 阶)导数的 G-L 定义为[12]

$$\stackrel{G}{=} \mathbf{D}_{t}^{v} s(t) \triangleq \lim_{h \to 0} s_{h}^{(v)}(t) \triangleq \lim_{h \to 0} h^{-v} \sum_{r=0}^{n-1} \begin{bmatrix} -v \\ r \end{bmatrix} s(t-rh)$$

$$\triangleq \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{\left(\frac{t-a}{n}\right)^{-v}}{\Gamma(-v)} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(r-v)}{\Gamma(r+1)} s\left(t-\frac{r(t-a)}{n}\right) \right\}, \tag{1}$$

其中,

$$\begin{bmatrix} -v \\ r \end{bmatrix} = \frac{(-v)(-v+1)\cdots(-v+r-1)}{r!}.$$

为使  $s_h^{(-\nu)}(t)$  达到非零极限,须当  $h \to 0$  时  $n \to \infty$ ,故令 h = (t-a)/n,于是 n = [(t-a)/h]. 分数阶微积分的量纲数  $\begin{bmatrix} {}^G_a \mathbf{D}_t^{\nu} s(t) \end{bmatrix} = 1 - \nu$ ,等于分数,为有理数. 这一点不同于整数阶微积分的量纲数等于 0 或负整数.

对于任意平方可积的能量型信号  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$  而言,可以推导其 v 阶分数阶微分的 Fourier 变换为 $^{[5,13]}$ 

$$\boldsymbol{D}^{\nu}s(t) = \boldsymbol{D}_{\nu}s(t) = \frac{\mathrm{d}^{\nu}s(t)}{\mathrm{d}t^{\nu}} \stackrel{FT}{\Leftrightarrow} (\boldsymbol{D}_{\nu}s)(\omega) = (\mathrm{i}\omega)^{\nu} \cdot \hat{s}(\omega) = \hat{d}_{\nu}(\omega)\hat{s}(\omega), \quad \nu \in \mathbb{R}^{+},$$
 (2)

其中,v阶微分算子 $\mathbf{D}_v = \mathbf{D}^v$ 是v阶微分乘子函数 $\hat{d}(\omega) = (\mathbf{i}\omega)^v$ 的乘性算子,其分数阶微分的滤波函数为

$$\begin{cases} \hat{d}(\omega) = (i\omega)^{\nu} = \hat{a}_{\nu}(\omega) \cdot \exp(i\theta_{\nu}(\omega)) = \hat{a}_{\nu}(\omega) \cdot \hat{p}_{\nu}(\omega), \\ \hat{a}_{\nu}(\omega) = |\omega|^{\nu}, \quad \hat{\theta}_{\nu}(\omega) = \frac{\nu\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega). \end{cases}$$
(3)

由(3)式知,从信息论的观点看,信号分数阶微积分的物理意义是对信号的广义调幅调相,即分数阶调幅调相.信号分数阶微积分的结果是原信号的振幅随其数字频率呈分数阶幂指数变化,其相位是其数字频率的广义 Hilbert 变换[1.5].

由(1)式知,信号s(t)的v阶差分为

$$\Delta^{\nu} s = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(r-\nu)}{\Gamma(r+1)} s \left( t - \frac{r(t-a)}{n} \right). \tag{4}$$

可见, v 阶差分(分数阶差分)是差分的一般形式,是广义差分.整数阶差分表达式可被镶嵌在 (4)式中,整数阶差分是分数阶差分的差分阶次取整的特例.函数分数阶导数的几何意义是其函数曲线的广义斜率,即分数阶斜率;其分数阶积分则是规整几何图形的广义 Euclid 测度,即分数阶 Euclid 测度.

从动力学的观点看,分数阶导数是广义导数,是广义流与广义速度的数学概括.由此可以推论,分数阶导数物理意义是分数阶流或分数阶速度.广义加速度包含于广义速度之中. [0,1]阶的分数阶速度是广义速度,是零阶位移矢量与一阶速度矢量之间的分数阶时间连续内插,是对距离变化快慢和方向的分数阶连续度量,是对瞬时平衡状态的低阶([0,1]阶)度量. [0,1]阶速度的存在亦说明,零阶位移和一阶速度之间存在分数阶的连续内插,其区别不是绝对的. 物理运动并非只存在离散和连续 2 种形式,而普遍存在离散和连续之间的运动状态. 自然界存在不指向最速下降方向的梯度矢量. 这是从平直时空观向弯曲时空观的转变; 一阶以上的分数阶速度是广义加速度,是 m 阶加速度矢量和 m+1 阶加速度矢量之间的分数阶时间连续内插,是对速度变化快慢和方向的分数阶连续度量,是对瞬时平衡状态的高阶(>1 阶)度量. 于是,传统的流(速度)和加速度是分数阶流和分数阶速度的特例. 不失普遍性,以正态 Gauss 信号 $\phi(t)=1/\sqrt{2\pi}e^{-t^2/2},-\infty < t < \infty$ ,为例进行分析,其各分数阶导数的数值实现<sup>[5]</sup>如图 1 所示.

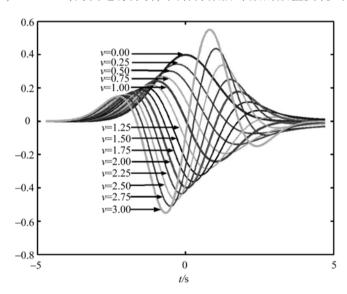


图 1 正态 Gauss 信号各分数阶微分

v=0.00 表示既不做微分也不做积分运算,即原始信号本身. 由图 1 知,分数阶微积分算子 具有有界性,即 $|\mathbf{D}^{v}s(t)|$ = $|s^{(v)}(t)|$ < $\infty$ ; 具有连续性,即 $\lim_{v_1\to v_2}\mathbf{D}^{v_1}s(t)=\mathbf{D}^{v_2}s(t)$ , $v_1,v_2\in\mathbb{R}$ . 换言 之,分数阶微积分值是其相邻阶次分数阶微积分值的连续内插;具有实值性,即 $\mathbf{D}^{v}s(t)\in\mathbb{R}$  具有  $D^{\nu}[0] \equiv 0$ , 对于所有的  $\nu$  均成立. 其中, [0]表示为幅值恒零的特殊单位阶跃信号. 但对于幅值非零的单位阶跃信号而言, 其分数阶微积分值一般不为 0.

如上所述,分数阶导数 $\phi^{(v)}(t)$ 是分数阶梯度矢量,仅当v取整数时,它才指向最速下降方 向. 分数阶导数  $\phi^{(v)}(t)$  是对  $\phi(t)$  曲线上各点的瞬时平衡状态的分数阶度量.  $\phi^{(1)}(t)=0$  对应着  $\phi(t)$  曲线上的一阶驻点,是该曲线上的一阶瞬时平衡点(可能为稳定平衡点,亦可能为非稳定 平衡点),可见,一阶导数在本质上并不是对曲线或曲面上某点瞬时稳定状态的一阶度量,而 是对该点瞬时平衡状态的一阶度量. 该点的瞬时稳定状态还有赖于其所在曲线或曲面的凸凹 性,是其所在曲线或曲面凸凹性和该点瞬时平衡状态共同作用的结果;推而广之, $\phi^{(v)}(t)=0$ 对应着  $\phi(t)$  曲线上的广义驻点(分数阶驻点),是该曲线上的  $\nu$  阶瞬时平衡点(分数阶平衡点). 由此可以推论, 分数阶导数的物理本质并不是对曲线或曲面上某点瞬时稳定状态的分数阶度 量,而是对该点瞬时平衡状态的分数阶度量.该点的瞬时稳定状态还有赖于其所在曲线或曲 面的凸凹性,是其所在曲线或曲面凸凹性和该点瞬时平衡状态共同作用的结果.于是,一阶驻 点(极大值或极小值点)和二阶驻点(当该点的 3 阶导数不为 0 时, 即为拐点)是分数阶驻点的特 例. 由图 1 知, 一阶驻点所对应的分数阶(本处特指 v 取 [0,1) 阶)微分值一般不为 0, 分数阶驻 点和一阶驻点一般不重复, 类似地, 二维曲面上一阶驻点(局部极值点和全局最值点)的一阶微 分为 0, 但其分数阶微分一般不为 0. 于是自然想到, 可将分数阶微分应用到二维曲面乃至 n维曲面上构造学习训练算法. 基于分数阶梯度的学习训练算法能够很容易跳出局部极值点, 有利于克服基于一阶梯度的传统学习训练算法(如自适应信号处理、自适应控制、神经网络训 练等)易于陷入局部极值点的缺点.

由图 1 知,由于分数阶微积分具有连续性,若时间 t (自变量)按  $\infty \to 0 \to -\infty$  变化时,则  $\phi^{(v)}(t) = 0$  所对应的阶次 v 按  $0 \to 1 \to \infty$  进行变化.分数阶导数在信号  $\phi(t)$  的上升缘段  $(t \in (-\infty,0))$  考察了信号的高阶( $(1,\infty)$ ) 阶)分数阶驻点;在信号  $\phi(t)$  的下降缘段  $(t \in [0,\infty))$  考察了信号的高阶( $(1,\infty)$ ) 阶)分数阶驻点;在信号  $\phi(t)$  的下降缘段  $(t \in [0,\infty))$  考察了信号的低阶([0,1]阶)分数阶驻点.归纳知,对于向上凸的信号而言, $\phi^{(1)}(t)_{t=t_0} = 0$  对应着  $\phi(t)$  曲线上的一阶驻点  $(t_0,\phi(t_0))$ ; 当  $t \ge t_0$  时, $\phi^{(v)}(t) = 0$  所对应的阶次 v 按  $1 \to 0$  进行变化;当  $t < t_0$  时, $\phi^{(v)}(t) = 0$  所对应的阶次 v 按  $1 \to 0$  进行变化;当  $t < t_0$  时, $\phi^{(v)}(t) = 0$  所对应的阶次 v 按  $1 \to 0$  进行变化;当  $v \in v$  大约  $v \in v$  为自变量,以分数阶驻点所对应的分数阶导数阶次完整族谱系列。该分数阶导数阶次完整簇谱系列一阶为分水岭。若考察信号  $\phi(t)$  的分数阶导数阶次完整族谱系列。该分数阶导数阶次完整簇谱系列一阶为分水岭。若考察信号  $\phi(t)$  的上升缘段的低阶([0,1]阶)分数阶驻点,只需将信号  $\phi(t)$  先做关于其一阶驻点与一阶导数过零点连线的偶对称变换,然后再做[0,1]阶分数阶导数即可。显然,关于其一阶驻点与一阶导数过零点连线偶对称的信号,其曲线上偶对称点的[0,1]阶分数阶驻点是偶对称的。可以证明,对向下凸的信号而言,其结论恰好关于一阶对换。由图 1 亦知,信号  $\phi(t)$  的高阶( $v \in v$  的高阶( $v \in v$  的高阶( $v \in v$  的一般是不对称信号,一般不能保持微分前后的对称不变性。因此,信号  $\phi(t)$  的高阶( $v \in v$  的)分数阶导数所对应的  $v \in v$  个高阶( $v \in v$  的)分数阶导数所对应的  $v \in v$  个高阶( $v \in v$  的)分数阶导数所对应的  $v \in v$  个高阶( $v \in v$  的)分数

阶驻点是不对称的. 换言之,偶对称曲线上的偶对称点所对应的高阶(>1 阶)瞬时平衡状态是不相同的(这一性质与整数阶微分具有显著的区别). 与此同时,信号 $\phi(t)$  的低阶([0,1]阶)分数阶导数的曲线是单峰突降的,拖着长长负尾巴,只能一次穿越零值线,只能对应 $\phi(t)$  曲线上唯一一个低阶([0,1]阶)分数阶驻点(低阶([0,1]阶)瞬时平衡点). 信号 $\phi(t)$  的低阶([0,1]阶)分数阶导数曲线、高阶(>1 阶)分数阶导数曲线以及零值线三者可能出现共同的交点. 信号 $\phi(t)$  的低阶([0,1]阶)分数阶驻点与其高阶(>1 阶)分数阶驻点可能是同一点. 可以推论,分数阶微积分 $\phi^{(v)}(t)$  所对应的分数阶次v 的物理本质是对瞬时平衡状态的一种分数阶刻画,是分数阶平衡系数.

#### 1.2 图像纹理细节特征的分数阶微分检测

图像纹理细节特征一般表现为领域内像素之间灰度值的相对变化. 这种相对变化又反映为图像灰度值纵向投影和横向投影的包络曲线上各点的瞬时平衡状态的相对变化. 包络曲线上各点的灰度值大小是瞬时幅值(瞬时灰度值位移的模值), 是其瞬时平衡状态的零阶度量; 包络曲线上相应各点的分数阶导数是其瞬时平衡状态的分数阶度量. 工程实践中除了需考察其瞬时幅值外, 还需考察灰度值的相对变化快慢和方向(瞬时平衡状态的低阶([0,1]阶)分数阶度量). 正态 Gauss 信号的[0,1]阶分数阶导数的过零点族如图 2 所示.

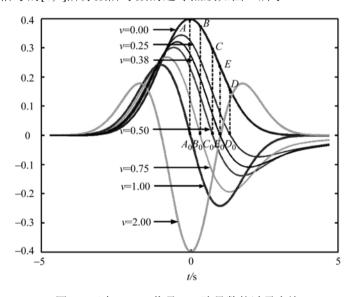


图 2 正态 Gauss 信号[0,1]阶导数的过零点族

由图 2 知, 在信号  $\phi(t)$  的下降缘段( $t \in [0,\infty)$ ), 点  $A_0 \, \psi^{(1)}(t) = 0$ , 对应于信号  $\phi(t)$  的 A 点. 点  $B_0 \, \psi^{(0.75)}(t) = 0$ , 对应于  $\phi(t)$  的 B 点. 点  $C_0 \, \psi^{(0.5)}(t) = 0$ , 对应于  $\phi(t)$  的 C 点. 点  $D_0 \, \psi^{(0.25)}(t) = 0$ , 对应于  $\phi(t)$  的 D 点. 这里  $\phi(t)$  曲线是向上凸的, 点 A 是非稳定平衡点, 当有极小的力作用于物体, 物体就会从点 A 向下非均匀加速滑落. 当物体分别置于  $\phi(t)$  曲线上 B, C, D 点时, 物体会以不同的初始瞬时加速度向下滑落. 物体从  $\phi(t)$  曲线的 A, B, C, D 点向下滑, 由

于势能的不同, 到达 $\phi(t)$  曲线最低点时, 物体将具有不同的动能W,  $W_A > W_B > W_C > W_D$ . 由图 2 亦知, 信号 $\phi(t)$  的二阶驻点E 点与其 $v \approx 0.38$  阶分数阶驻点相重合.

那么怎样度量 $\phi(t)$  曲线上A, B, C, D 各点的稳定状态呢?如上所述,分数阶导数的物理本质并不是对曲线或曲面上某点瞬时稳定状态的分数阶度量,而是对该点瞬时平衡状态的分数阶度量。该点的瞬时稳定状态还有赖于其所在曲线或曲面的凸凹性,是其所在曲线或曲面凸凹性和该点瞬时平衡状态共同作用的结果。分数阶微积分 $\phi^{(v)}(t)$  所对应的分数阶次v 的物理本质是对瞬时平衡状态的一种分数阶刻画,是分数阶平衡系数。若我们将稳定状态定义为单位"1"值,将非稳定状态定义为"0"值,若函数 $\phi(t)$  的凸凹性用 $\eta$ 表示,

$$\eta = \begin{cases}
1, & \dot{\sqcap} \perp \dot{\sqcap}, \\
-1, & \dot{\sqcap} \dot{\sqcap} \dot{\sqcap}.
\end{cases}$$
(5)

则可定义  $\phi(t)$  曲线上各点的分数阶稳定系数[1.2]为

$$\rho = \begin{cases}
1 - v, & \eta = 1, \\
v, & \eta = -1.
\end{cases}$$
(6)

其中, v 是当 $\phi^{(v)}(t)$ =0时所对应的分数阶微分阶次. 如前所述,  $v \in [0,1]$ , 故分数阶稳定系数  $\rho \in [0,1]$ . 某点的分数阶稳定性系数  $\rho$  值越逼近于单位"1"值,说明该点越趋于稳定状态;其  $\rho$  值越逼近于"0"值,说明该点越趋于非稳定状态. 由此可以推论,分数阶稳定系数是对曲线 或曲面上某点的瞬时稳定状态的分数阶度量. 如上所述,若求解信号  $\phi(t)$  的上升缘段的低阶 ([0,1]阶)分数阶驻点所对应的阶次 v,只需将信号  $\phi(t)$  先做关于其一阶驻点与一阶导数过零点连线的偶对称变换,然后再做[0,1]阶分数阶导数即可. 显然,关于其一阶驻点与一阶导数过零点连线偶对称的信号,其曲线上的偶对称点的分数阶稳定系数相等. 图 2 中 A, B, C, D 点的稳定系数  $\rho_A$  = 0, $\rho_B$  = 0.25, $\rho_C$  = 0.5, $\rho_D$  = 0.75. 图 2 中信号的稳定系数随时间 t 的变化函数  $\rho(t)$  曲线如图 3 所示.

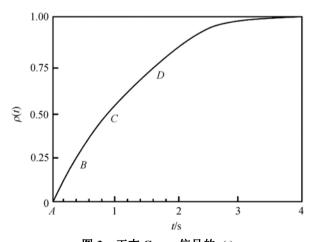


图 3 正态 Gauss 信号的 $\rho(t)$ 

由图 3 可知, 点 A, B, C, D 的稳定状态依次升高, 这与物理实际情况相吻合.

怎样借助分数阶稳定系数 $\rho$ 来检测图像纹理细节特征呢?图像s(x,y)灰度值在[0,255]范围内变化,s(x,y)灰度值恒为非负.二维数字图像s(x,y)灰度值纵向(x方向)投影和横向(y方向)投影的包络曲线对应稳定系数函数分别为 $\rho(y)$ 和 $\rho(x)$ .不失普遍性,以 $\rho(x)$ 为例进行研究.若s(x,y)的灰度值横向(y方向)投影特例及其 $\rho(x)$ 如图 4 所示.

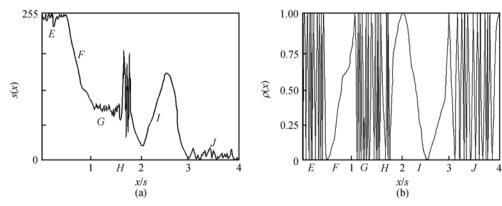


图 4 s(x,y)在 y 方向上的灰度值投影及其 $\rho(x)$  (a) y 方向上的灰度值投影; (b)  $\rho(x)$ .

由图 4 知,首先,在 x 正方向上,若  $\rho(x)$  处于 0 → 1 的上升缘段,则图像 s(x,y)的横向(y 方向)灰度值投影包络曲线由极大峰值变为极小谷值,邻域内像素由亮变暗;反之,若  $\rho(x)$  曲线处于 1 → 0 的下降缘段,则其灰度值投影包络曲线由极小谷值变为极大峰值,邻域内像素由暗变亮。第二, $\rho(x)$  在 E 、G 、H 和 J 段对应的  $\rho(x)$  的振荡频率较大,对应着 s(x,y)的横向(y 方向)灰度值投影包络曲线上密集变化的波纹。其中, $\rho(x)$  的振荡频率在 E 、G 和 H 段量大,在 J 段上的图像纹理细节相对较为稀疏。同时,s(x,y)在 E 、G 和 H 段上的灰度值变化最为频繁,呈现密集的图像纹理细节;在 J 段上的图像纹理细节相对较为稀疏。同时,s(x,y)在 E 、G 和 J 段对应的灰度值波动幅度较小,呈现小的波纹,在 H 段对应的灰度值波动幅度较大,呈现大的振荡。说明在 E 、G 和 J 段图像纹理细节的明暗对比不高,在 H 段图像纹理细节的明暗对比相对较高。第三, $\rho(x)$  在 F 和 I 段进行低频振荡,对应着 s(x,y)的横向(y 方向)灰度值投影包络曲线上跨度较宽、变化较缓的波动。说明 s(x,y)在 F 段呈现灰度值变化较缓的图像平滑过渡的轮廓,在 I 段呈现跨度较宽的图像边缘。第四,s(x,y)的横向(y 方向)灰度值投影包络曲线在 E 段的平均幅值最大,接近于 255,在 G 和 H 段的平均幅值最小,接近于 0。说明 s(x,y)在 E 段的纹理细节是处于白色平滑背景中,在 G 和 G G 和 G G G

于是我们可定义基于分数阶微积分的分数阶灰度共生矩阵来对图像纹理特征进行检测. 它具有 4 个参数: 角度矩、灰度值投影幅值、灰度值投影幅值差和分数阶稳定系数频率. 一般, 角度矩取 0°(y 方向上投影)、45°、90°(x 方向上投影)和 135°四种值. 分数阶灰度共生矩阵的每 一种参数又分为 4 种测试值, 共有 12 种分数阶灰度共生矩阵纹理参数测试值. 最后将同一纹 理参数 4 种角度的不同测试值进行平均,再对所有邻域求其平均值.因此,分数阶灰度共生矩阵反映了图像纹理细节特征关于方向、相邻间隔、变化幅度、变化频率和所处图像背景的综合信息.

### 1.3 数字图像分数阶微分掩模及其数值运算规则

在 Euclid 测度下各种分数阶微分定义都应该满足如下 3 点性质: 1) 在平坦段(图像灰度值不变的区域)的分数阶微分值是由对应奇异跳变处的极大值渐趋于 0(Riemann-Liouville 定义除外). 而平坦段的任意整数阶微分必为 0. 这是分数阶微分相对于整数阶微分的显著区别之一. 2) 在灰度阶梯或斜坡的起始点处的分数阶微分值非 0, 起到了加强高频信息的作用. 3) 沿斜坡的分数阶微分值非 0, 亦非常数. 而沿斜坡的整数阶微分值为常数. 数字图像的分数阶微分能够非线性增强数字图像的复杂纹理细节特征[1.2].

根据(1)式, 若一元信号 s(t)的持续期为  $t \in [a,t]$ , 将信号持续期[a,t]按单位等分间隔 h=1 进行等分,所以  $n=[(t-a)/h]^{h=1}=[t-a]$ . 可以推导出一元信号 s(t) 分数阶微分的差值表达为[1.3]

$$\frac{d^{\nu}s(t)}{dt^{\nu}} \approx s(t) + (-\nu)s(t-1) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)}{2}s(t-2) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)(-\nu+2)}{6}s(t-3) + \dots + \frac{\Gamma(n-\nu-1)}{(n-1)!\Gamma(-\nu)}s(t-n+1).$$
 (7)

由于计算机或数字滤波器处理的是数字量,其值有限;图像信号灰度的最大变化量是有限的;数字图像灰度变化发生的最短距离是在两相邻像素之间,因此二维数字图像在x 和y 轴方向上的持续时间(图像矩阵的规模)只可能以像素为单位进行度量,s(x,y)的最小等分间隔只可能是h=1. 若二维数字图像信号中x 和y 的持续期分别为  $x \in [x_1,x_2]$  和 $y \in [y_1,y_2]$ ,则最大等分数分别为  $n_x = [(x_2-x_1)/h] = [x_2-x_1]$  和  $n_y = [(y_2-y_1)/h] = [y_2-y_1]$ ;对于数字图像而言,即使分数阶微分掩模的尺度大到等于数字图像本生的尺度( $N = \min(n_x,n_y)$ ),也只可能是对其分数阶微分解析值的最大逼近,而永远不可能等于其分数阶微分的解析值.针对如何构造 $n \times n$  ( $n \le N$ )的数字图像分数阶微分掩模,我们定义 s(x,y) 在x 和y 坐标轴负方向上分数阶偏微分的后向差分近似表达式分别为[3]

$$\frac{\partial^{\nu} s(x,y)}{\partial x^{\nu}} \approx s(x,y) + (-\nu)s(x-1,y) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)}{2}s(x-2,y) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)(-\nu+2)}{6}s(x-3,y) + \dots + \frac{\Gamma(k-\nu-1)}{(k-1)!\Gamma(-\nu)}s(x-k+1,y) + \dots,$$

$$\frac{\partial^{\nu} s(x,y)}{\partial x^{\nu}} \approx s(x,y) + (-\nu)s(x,y-1) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)}{2}s(x,y-2)$$
(8)

$$\frac{\partial^{\nu} s(x, y)}{\partial y^{\nu}} \approx s(x, y) + (-\nu)s(x, y-1) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)}{2}s(x, y-2) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)(-\nu+2)}{6}s(x, y-3) + \dots + \frac{\Gamma(k-\nu-1)}{(k-1)!\Gamma(-\nu)}s(x, y-k+1) + \dots$$
(9)

在上述 2 个后向差分近似表达式中选取的前 n 项和分别作为 s(x,y) 在 x 和 y 坐标轴负方向上分数阶偏微分的近似值

$$\frac{\partial^{\nu} s(x,y)}{\partial x^{\nu}} \approx s(x,y) + (-\nu)s(x-1,y) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)}{2}s(x-2,y) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)(-\nu+2)}{6}s(x-3,y) + \dots + \frac{\Gamma(n-\nu-1)}{(n-1)!\Gamma(-\nu)}s(x-n+1,y), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^{\nu} s(x, y)}{\partial y^{\nu}} \approx s(x, y) + (-\nu)s(x, y - 1) + \frac{(-\nu)(-\nu + 1)}{2} s(x, y - 2) + \frac{(-\nu)(-\nu + 1)(-\nu + 2)}{6} s(x, y - 3) + \dots + \frac{\Gamma(n - \nu - 1)}{(n - 1)!\Gamma(-\nu)} s(x, y - n + 1). \tag{11}$$

可见,s(x,y) 在 x 和 y 坐标轴负方向上分数阶偏微分的近似值(n 项和)中的每一对应求和项的系数值都是相同的. 这 n 个非零系数值中只有首项求和项的系数值是常数"1",其它 n-1 个非零系数值都是分数阶微分阶次 v 的函数. 这 n 个非零系数值按顺序分别是: 1, -v, ((-v)(-v+1))/2, ((-v)(-v+1)(-v+2))/6, ...,  $(\Gamma(n-v-1))/((n-1)!\Gamma(-v))$ . 可以证明这 n 个非零系数值之和不等于零,这是图像分数阶微分与图像整数阶微分在特性上的显著区别之一. 在 x 坐标轴负方向上的相对逼近误差为

$$\varepsilon s_{\bar{x}}^{(\nu)}(x,y) = \frac{\Gamma(n-\nu)}{n!\Gamma(-\nu)} s(x-n,y) + \dots + \frac{\Gamma(N-\nu-1)}{(N-1)!\Gamma(-\nu)} s(x-N+1,y). \tag{12}$$

在v坐标轴负方向上的相对逼近误差为

$$\varepsilon s_{y^{-}}^{(\nu)}(x,y) = \frac{\Gamma(n-\nu)}{n!\Gamma(-\nu)} s(x,y-n) + \dots + \frac{\Gamma(N-\nu-1)}{(N-1)!\Gamma(-\nu)} s(x,y-N+1). \tag{13}$$

(12)和(13)式中的相对逼近误差不是相对于图像分数阶微分的解析解,而是相对于分数阶微分掩模的尺度大小等于二维数字图像的尺度时的数值解(对于其解析解的最佳逼近).

	0	$\Gamma(n-\nu-1)$ $(n-1)!\Gamma(-\nu)$	0			:				:	
	:	:	:			0		0	0	0	
	0	(-v)(-v+1)	0			$\Gamma(n-\nu-1)$ $(n-1)!\Gamma(-\nu)$		(-v)(-v+1)	-v	1	
	0	-v	0			0		0	0	0	
	0	1	0			:	÷	:	:	:	
		(a)			•	(b)					
	0	1	0			:	:	:	:	:	
	0	-v	0			0	0	0		0	
	0	(-v)(-v+1)	0			1	-v	(-v)(-v+1)	:	$\Gamma(n-v-1)$ $(n-1)!\Gamma(-v)$	
	:	:	÷			0	0	0		0	
	0	$\Gamma(n-v-1)$ $(n-1)!\Gamma(-v)$	0			:	:	:		:	
		(c)			(d)						
	0	0	0	1		:			0	$\Gamma(n-v-1)$ $(n-1)!\Gamma(-v)$	
	0	0	-v	0		0	0	0	··	0	
	0	(-v)(-v+1)	0	0		0	0	(-v)(-v+1)	0		
0	.:	0	0	0		0	-v	0	0		
	-				1 1						
$\Gamma(n-v-1)$ $(n-1)!\Gamma(-v)$	0	:	i	:		1	0	0	0		
			:	:		1	0	0 (f)	0		
		:	:	:		1	0		0		
(n-1)!Γ(-v) Γ(n-v-1)	0	(e)						(f)			
$\frac{\Gamma(n-\nu-1)}{(n-1)!\Gamma(-\nu)}$	0	(e)	:	:		1	0	(f) 0	0		
$\frac{\Gamma(n-\nu-1)}{(n-1)!\Gamma(-\nu)}$	0	(e) : : 0	: 0	•		0	0 -v	(f) 0 (-v)(-v+1)	0		
$\frac{\Gamma(n-v-1)}{(n-1)!\Gamma(-v)}$	0	(e) (o) (-v)(-v+1) 2	0 0	0 0		0 0	0 -v	(f) 0 0 (-v)(-v+1) 2	0		

图 5 8 个方向上的分数阶微分掩模

(a)  $W_x^-$ ; (b)  $W_y^-$ ; (c)  $W_x^+$ ; (d)  $W_y^+$ ; (e)  $W_{\text{LDD}}$ ; (f)  $W_{\text{RUD}}$ ; (g)  $W_{\text{LUD}}$ ; (h)  $W_{\text{RDD}}$ 

计算机数字图像处理是以对图像的离散像素直接处理为基础的. 分数阶微分掩模的数值运算规则是采用分数阶微分掩模卷积的方案来实现数字图像分数阶微分的空域滤波. 这种空间滤波的机理就是在待处理的数字图像中逐点移动掩模(算子、模板). 针对数字灰度图像和数字彩色图像的性质不同,分数阶微分掩模的数值运算规则分为 2 种: 第 1 种,分数阶微分掩模针对数字灰度图像的数值运算规则. 在  $n_x \times n_y$  的数字图像 s(x, y)中,用分数阶微分掩模进行滤波, $W_x^-$ , $W_y^+$ , $W_y^-$ , $W_y^+$ , $W_{LDD}$ , $W_{RUD}$ , $W_{RUD}$  的卷积数值运算规则分别是

$$S_{\bar{x}}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{z=-2b}^{0} \sum_{k=-b}^{b} W_{\bar{x}}(z,k) S(x+z,y+k), \tag{14}$$

$$S_{x^{+}}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{z=0}^{2b} \sum_{k=-b}^{b} W_{x}^{+}(z,k) S(x+z,y+k), \tag{15}$$

$$S_{\bar{y}}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{z=-b}^{b} \sum_{k=-2b}^{0} W_{\bar{y}}(z,k) S(x+z,y+k), \tag{16}$$

$$S_{y^{+}}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{z=-b}^{b} \sum_{k=0}^{2b} W_{y}^{+}(z,k) S(x+z,y+k), \tag{17}$$

$$S_{\text{LDD}}^{(v)}(x,y) = \sum_{z=0}^{2b} \sum_{k=-2b}^{0} W_{\text{LDD}}(z,k) S(x+z,y+k), \tag{18}$$

$$S_{\text{RUD}}^{(v)}(x,y) = \sum_{z=-2b}^{0} \sum_{k=0}^{2b} W_{\text{RUD}}(z,k) S(x+z,y+k), \tag{19}$$

$$S_{\text{LUD}}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{z=-2b}^{0} \sum_{k=-2b}^{0} W_{\text{LUD}}(z,k) S(x+z,y+k), \tag{20}$$

$$S_{\text{RDD}}^{(v)}(x,y) = \sum_{z=0}^{2b} \sum_{k=0}^{2b} W_{\text{RDD}}(z,k) S(x+z,y+k).$$
 (21)

第 2 种,分数阶微分掩模针对数字彩色图像的数值运算规则. 分数阶微分掩模针对数字彩色图像的数值运算规则与其针对数字灰度图像的数值运算规则基本相同. 不同之处在于各像素s(x,y)的 R、G、B 三个分量值分别都要历经与分数阶微分掩模针对数字灰度图像完全相同的数值运算规则,从而分别得到像素s(x,y)的 R、G、B 三个分量值在上述 8 个方向上的v 阶分数阶偏微分的近似值. 由于 RGB 各分量之间存在相关性,同时由于其灰度值限制在[0, 255]之间,因此,当数字图像分数阶微分的阶次 $v \in [0,1]$  的取值较小或较大时,对数字图像 RGB 各分量进行非线性加强后,可能严重破坏其相关性,叠加得到的 RGB 彩色图像就可能出现色彩失真. 因此,对数字彩色图像而言,在 YCrCb 和 HSV 色彩空间中进行分数阶微分不失是一种更好的选择[1-3].

#### 1.4 数字图像分数阶微分滤波器构造

一般地,数字图像 S(x,y) ( $L\times H$  的像素矩阵,每行有 H个像素,x取 0~(L-1)之间的整数,y取 0~(H-1)之间的整数)的L行像素的灰度值或 RGB 值一般不是并行输入,而是串行输入(L

行像素的灰度值或 RGB 值一行像素接一行像素输入,每行输入 H 个像素的灰度值或 RGB 值,形成串行数字视频码流)数字图像滤波器的.根据串行数字视频码流的输入特点,用  $S_x(k)$  表示串行数字视频码流中的像素(下标 x 表示每一帧数字图像 S(x,y) 是以一行像素接一行像素输入的方式形成串行数字视频码流的,S(x,y) 从它最下面的一行(第 L 行)开始从下至上输入;k 表示像素  $S_x(k)$  在串行数字视频码流中的像素序号.k 从  $L\times H$  —1 开始计数,逐像素输入 k 值减一,直至为0).若  $S_x(k)$  对应串行输入前坐标 (x,y) 上的像素 S(x,y),则  $S_x(k\pm mH\pm b)$  对应串行输入前坐标  $(x\pm m,y\pm b)$  上的像素  $S(x\pm m,y\pm b)$  .

根据上述数字图像分数阶微分掩模及其数值运算规则, 我们可以构造数字图像分数阶微分滤波器<sup>[4]</sup>, 其模型如图 6 所示.

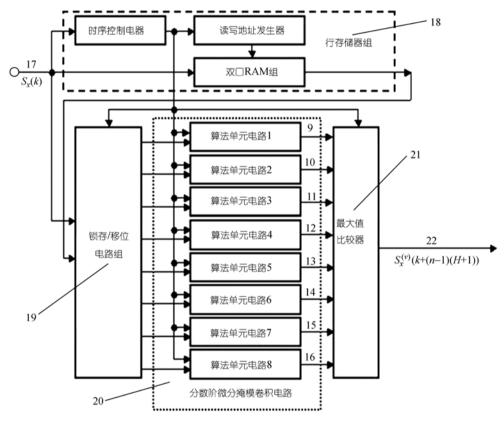


图 6 数字图像分数阶微分滤波器模型

如图 6 所示,数字图像的分数阶微分滤波器是由数字视频流行存储器组 18、锁相/移位电路组 19、分数阶微分掩模卷积电路 20 与最大值比较器 21 级联而成. 1~8 分别是在上述 8 个方向上的算法单元电路.端口 9~16 分别输出数字图像像素在上述 8 个方向上的 $\nu$  阶分数阶偏微分的近似值.串行数字视频码流  $S_x(k)$  从端口 17 输入后分成 3 路:第 1 路顺序经过行存储器组 18、锁相/移位电路组 19、分数阶微分掩模卷积电路 20 处理后,分别在端口 9~16 输出像素

 $S_x(k+(n-1)(H+1))$  在x 轴负方向、x 轴正方向、y 轴负方向、y 轴正方向、左下对角线、右上 对角线、左上对角线和右下对角线8个方向上的v阶分数阶偏微分的近似值,再经过最大值比 较器 21 处理后, 在端口 22 输出这 8 个近似值中的最大值作为像素  $S_{\nu}(k+(n-1)(H+1))$  的  $\nu$  阶 分数阶微分值近似值  $S_{\nu}^{(\nu)}(k+(n-1)(H+1))$ ; 第 2 路触发时序控制电路产生相应的时序控制信 号; 第 3 路与行存储器组 18 的输出一起馈入锁相/移位电路组 19 生成(2n-1)×(2n-1)的像素 阵列, 行存储器组 18 根据串行数字视频码流的输入特点, 利用当前输入像素, 根据处理的数 字图像的性质不同, 行存储器组 18 分为 2 种结构: 第 1 种结构, 当处理数字灰度图像时, 这个 行存储器组 18 采用 2n-2 个行存储器完成 2n-1 行视频图像数据的获取;第 2 种结构, 当处理 数字彩色(RGB)图像时, 行存储器组 18 由 3 个完全相同且并行处理的行存储器组子电路构成; 其中每个行存储器组子电路与上述用以处理数字灰度图像时的行存储器组18的电路结构和参 数完全相同. 锁相/移位电路组 19 根据串行数字视频码流的输入特点, 利用当前输入像素, 根 据处理的数字图像的性质不同, 锁相/移位电路组 19 分为 2 种结构: 第 1 种结构, 当处理数字 灰度图像时, 这个锁相/移位电路组 19 共采用 3n<sup>2</sup>-3n 个 D 触发器, 通过对数字灰度图像进行 点延时产生计算数字灰度图像分数阶微分所需的 $(2n-1)\times(2n-1)$ 像素阵列; $(2n-1)\times(2n-1)$ 像素阵列的第 1 行采用 2n-2 个 D 触发器, 第 2 行采用 2n-3 个 D 触发器, 一直到第 n-1 行每 行采用 D 触发器的个数都是逐行减一, 第n-1行采用  $n \cap D$  触发器;  $(2n-1) \times (2n-1)$  像素阵 列的第 n 行采用 2n-2 个 D 触发器:  $(2n-1)\times(2n-1)$  像素阵列的第 n+1 行采用 n 个 D 触发器, 第n+2行采用n+1个D触发器,一直到第2n-1行每行采用D触发器的个数都是逐行加一,第 2n-1 行采用 2n-2 个 D 触发器. 第 2 种结构, 当处理数字彩色图像时, 这个锁相/移位电路组 19 由 3 个完全相同且并行处理的锁相/移位电路组子电路构成: 其中每个锁相/移位电路组子电 路与上述用以处理数字灰度图像时的锁相/移位电路组 19 的电路结构和参数完全相同: 这 3 个 锁相/移位电路组子电路通过对数字彩色图像进行点延时分别产生计算数字彩色图像分数阶微 分所需的 R、G、B 这 3 个分量值的  $(2n-1)\times(2n-1)$  像素阵列; 共采用  $9n^2-9n$  个 D 触发器. 20 是分数阶微分掩模卷积电路. 21 是最大值比较器. 端口 22 输出像素 S<sub>v</sub>(k+(n-1)(H+1)) 的 v 阶 分数阶微分  $S_{v}^{(v)}(k+(n-1)(H+1))$  的近似值.

其中,分数阶微分掩模卷积电路 20 的阶次 v 可在  $0\sim1$  之间取分数或有理小数值,根据工程精度的不同要求,阶次 v 分为单精度型、双精度型和长双精度型 3 种浮点数据,算法单元电路  $1\sim8$  的计算数据类型也分为 3 种相应类型.为使分数阶微分掩模( $n\times n$  的方阵)有明确的轴对称中心,分数阶微分掩模的尺寸数 n 是奇数; n 的最小取值是 3, n 的最大取值小于待进行分数阶微分的数字图像的尺寸数(若待进行分数阶微分的数字图像 S(x,y)是  $L\times H$  的像素矩阵,当 L=H 时,其尺寸数为 L; 当  $L\neq H$  时,其尺寸数为 L 和 H 中的最小值).分数阶微分掩模卷积电路 20 由 8 个并行计算的特定的算法单元电路  $1\sim8$  构成;根据待处理的数字图像的性质不同,它分为 2 种结构:第 1 种结构,当处理数字灰度图像时,算法单元电路  $1\sim8$  分别计算数字灰度图像中像素在 x 轴负方向、 x 轴正方向、 y 轴负方向、 y 轴正方向、 分数阶微分掩模右上对角线、 分数阶微分掩模左上对角线和分数阶微分掩模右下对角线 8 个

不同方向上的分数阶偏微分近似值. 算法单元电路 1~8 共同的电路结构如图 7 所示.

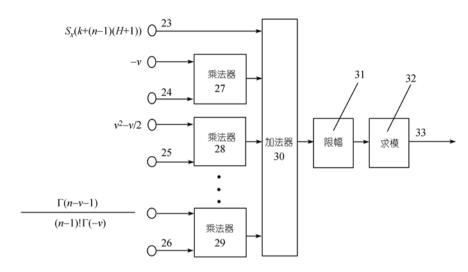


图 7 算法单元电路 1~8 共同的电路结构

如图 7 所示,端口 23 输入像素  $S_x(k+(n-1)(H+1))$  值;端口 24~26 的输入像素值和算法单元电路 1~8 有关,不同的算法单元电路对应的端口 24~26 的输入像素值不同,在本说明书关于算法单元电路 1~8 的电路结构的说明中有详细阐述;27~29 是 n-1 个功能相同的乘法器;30 是加法器;31 是限幅器;32 是求模器;端口 33 输出像素  $S_x(k+(n-1)(H+1))$  的灰度值或 R、G、B分量值在上述 8 个方向的某一个方向上的 v 阶分数阶偏微分的近似值。因任何数乘以"1"其值不变,所以在构建具体电路时为了减少所用乘法器的个数,只选取 -v, ((-v)(-v+1))/2,((-v)(-v+1)(-v+2))/6,…, $(\Gamma(n-v-1))/((n-1)!\Gamma(-v))$  这 n-1 个非零系数值作为乘法器的权系数值。因此,每个算法单元电路由比分数阶微分掩模尺寸数n(奇数)少一个的n-1(偶数)个乘法器27~29、一个加法器 30、一个限幅器 31 和一个求模器 32 构成;这n-1 个乘法器 27~29 的非零权值按顺序分别是:-v, $(v^2-v)/2$ ,((-v)(-v+1)(-v+2))/6,…, $(\Gamma(n-v-1))/((n-1)!\Gamma(-v))$ ;限幅器 31 将加法器 30 的输出值限制在 0~255 的范围内,当限幅器 31 的输入值小于 0 时,它输出 0. 当限幅器 31 的输入值大于 255 时,它输出 255;求模器 32 的输出值惯入最大值比较器 21.

第 2 种结构: 当处理数字彩色图像时,算法单元电路 1~8 中的每个算法单元电路都由 3 个完全相同且并行计算的算法单元子电路构成;算法单元电路 1~8 共有 8×3=24 个算法单元子电路;算法单元电路 1~8 中的第  $p(1 \le p \le 8)$ 个算法单元电路的每个算法单元子电路都与上述用以处理数字灰度图像时的第 p 个算法单元电路的电路结构和参数完全相同;算法单元电路 1~8 中的 3 个算法单元子电路分别并行计算数字彩色图像中像素的 R、G、B 这 3 个分量值在上述8 个方向上的分数阶微分近似值。由图 6 知,分数阶微分掩模卷积电路 20 包括如下 8 个特定的算法单元电路构成。

算法单元电路 1 计算像素  $S_v(k+(n-1)(H+1))$  在 x 轴负方向上的 v 阶分数阶偏微分的近似

值;根据待处理的数字图像的性质不同,算法单元电路 1 分为 2 种结构:第 1 种结构,当输入的数字视频流  $S_x(k)$  是数字灰度图像时,像素  $S_x(k+(n-1)(H+1))$  的灰度值直接馈入加法器;像素  $S_x(k+(n-1)(H+1)-H)$  的灰度值与权值 -v 相乘后馈入加法器;像素  $S_x(k+(n-1)(H+1)-H)$  的灰度值与权值  $(v^2-v)/2$  相乘后馈入加法器;以此类推,若  $1 \le m \le n$ ,像素  $S_x(k+(n-1)(H+1)-(m-1)H)$  的灰度值与权值  $(\Gamma(m-v-1))/((m-1)!\Gamma(-v))$  相乘后馈入加法器;第 2 种结构,当输入的数字视频流  $S_x(k)$  是数字彩色图像时,算法单元电路 1 由 3 个完全相同且并行计算的算法单元子电路构成;其中每个算法单元子电路与上述用以处理数字灰度图像时的算法单元电路 1 的电路结构和参数完全相同;这 3 个算法单元子电路分别并行计算像素  $S_x(k+(n-1)(H+1))$  的 R、G、B 这 3 个分量值在 x 轴负方向上的 v 阶分数阶偏微分近似值.

同理, 算法单元电路 2~8 分别用于计算像素  $S_x(k+(n-1)(H+1))$ 在 x 轴正方向上、y 轴负方向上、y 轴正方向上、左下对角线方向上、右上对角线方向上、左上对角线方向上和右下对角线方向上v 阶分数阶偏微分的近似值.

由图 6 可知,最大值比较器 21 计算分数阶微分掩模卷积电路 20 的 8 个算法单元电路输出值中的最大值,根据处理的数字图像的性质不同,最大值比较器 21 分为 2 种结构:第 1 种结构,当处理数字灰度图像时,最大值比较器 21 有 8 路输入,1 路输出,输入端口 9~16 分别馈入算法单元电路 1~8 的输出灰度值,输出端口 22 输出 8 个馈入灰度值中的最大值(即数字灰度图像像素灰度值的 v 阶分数阶微分近似值);第 2 种结构,当处理数字彩色图像时,最大值比较器 21 由 3 个完全相同且并行处理的最大值比较器子电路构成;最大值比较器 21 其中每个最大值比较器子电路与在第 1 种结构中用以处理数字灰度图像时的最大值比较器 21 的电路结构和参数完全相同;这 3 个最大值比较器子电路分别并行计算数字彩色图像像素的 R、G、B 这 3 个分量值的 v 阶分数阶微分近似值.

# 2 实验仿真及结果分析

由图 6 和 7 知,在工程实际应用中,数字灰度图像的分数阶微分滤波器中的分数阶微分掩模卷积电路 20 的运算规则常采用 3×3 的分数阶微分掩模的卷积方案。在上述 8 个方向上的 v阶分数阶微分掩模( $W_x$ ,  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_y$ ,  $W_y$ ,  $W_{LDD}$ ,  $W_{RUD}$ ,  $W_{LUD}$  和  $W_{RDD}$ )的尺寸数 n=3, 这 8 个方向上的 v 阶分数阶微分掩模中的 3 个非零系数值按顺序分别是: 1,-v,((-v)(-v+1))/2 =  $(v^2-v)/2$ .所以,其中行存储器组 18 采用  $2n-2|_{n=3}=4$  个行存储器完成  $2n-1|_{n=3}=5$  行视频图像数据的获取;其中锁相/移位电路组 19 共采用  $3n^2-3n|_{n=3}=18$  个 D 触发器,通过对数字灰度图像进行点延时产生计算数字灰度图像分数阶微分所需的  $(2n-1)\times(2n-1)|_{n=3}=5\times5$  像素阵列;其中算法单元电路  $1\sim8$  共有  $8\times(n-1)|_{n=3}=16$  个乘法器,每个算法单元电路中  $n-1|_{n=3}=2$  个乘法器的非零权值依按顺序分别是: -v,( $v^2-v$ )/2.按照图 6 和 7 所述的级联电路结构及其行存储器组 18、锁相/移位电路组 19、分数阶微分掩模卷积电路 20 和最大值比较器 21 的具体电

路结构和电路参数,就可以方便地构建出 3×3 数字图像的分数阶微分滤波器的具体电路,如图 8 所示.

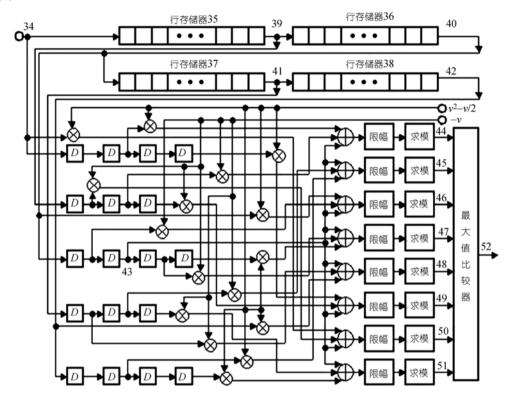


图 8 数字图像的 3×3 分数阶微分滤波器

图 8 中未画出其中的时序控制电路及其被触发产生的时序控制信号. 其中,端口 34 输入串行数字灰度视频码流  $S_x(k)$ ; 35~38 是行存储器;端口 39 输出像素  $S_x(k+H)$ ;端口 40 输出像素  $S_x(k+2H)$ ;端口 41 输出像素  $S_x(k+3H)$ ;端口 42 输出像素  $S_x(k+4H)$ ;端口 43 输出像素  $S_x(k+2H+2)$  的灰度值;端口 44~51 分别输出像素  $S_x(k+2H+2)$  的灰度值在上述 8个方向上的 v 阶分数阶偏微分的近似值;端口 52 输出像素  $S_x(k+2H+2)$  的灰度值的 v 阶分数阶微分  $S_x^{(v)}(k+2H+2)$  的近似值.

本实验同时使用 $W_x^-$ ,  $W_x^+$ ,  $W_y^-$ ,  $W_y^+$ ,  $W_{LDD}$ ,  $W_{RUD}$ ,  $W_{LUD}$  和 $W_{RDD}$  8 个方向上的分数掩模分别对图像 s(x,y)进行分数阶微分. 为了运算简便,比较 8 个方向上的运算结果,将其中最大值作为像素 s(x,y)分数阶微分的灰度值. 对于 RGB 彩色图像的分数阶微分处理,需要对其 R、G、B 分量分别进行分数阶微分,然后再合成为 RGB 彩色图像. 另外,为了更直观对比分数阶微分对图像复杂纹理细节特征的增强效果,本实验所示图像分数阶微分结果是原图像与其分数阶微分值进行像素迭加后的结果. 32 位 RGB 岩石纹理彩图的分数阶微分实验结果如图 9 所示.





图 9 32 位 RGB 岩石纹理彩图的分数阶微分

(a) 原图; (b) v = 0.55 阶分数阶微分

从肉眼定性分析知,进行分数阶微分后,图像中那些具有复杂纹理细节特征的岩石纹理变得更加清晰.为便于定量分析,本实验对该岩石纹理彩图及其分数阶微分的灰度值纵向(*x* 方向)投影进行对比分析,如图 10 所示.

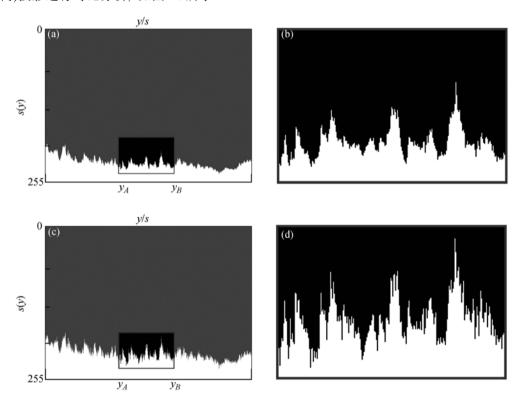


图 10 32 位 RGB 彩图及其分数阶微分的灰度值投影对比

(a) 原图的灰度值 x 方向投影; (b) 原图的灰度值 x 方向投影局部; (c) 原图 v = 0.55 阶微分的灰度值 x 方向投影; (d) 原图 v = 0.55 阶微分的灰度值 x 方向投影局部

由图9和10知,首先,与图像整数阶微分掩模相同,图像分数阶微分掩模同样加强了原图中灰度值变化较大的高频边缘信息,但其加强幅度没有整数阶微分大,所以不会出现黑白分明的边缘;其次,与图像整数阶微分掩模不同,图像分数阶微分在一定程度上保持了原图的灰

度直方图分布的包络. 所以, 图像分数阶微分在一定程度上保持了原图的低频轮廓信息, 而图像整数阶微分却不能; 最后, 不论图像分数阶微分还是整数阶微分都使原图的灰度投影增加了许多"毛刺", 但是, 只有图像分数阶微分才是在原图灰度投影的包络上增加"毛刺", 图像整数阶微分改变了原图对应灰度投影的包络. 所以, 图像分数阶微分能使原图平滑区域中灰度相对变化不太剧烈的纹理细节信息得到非线性地加强, 而图像整数阶微分对于它们微分的结果趋近于零. 图像整数阶微分改变原图对应灰度投影的包络, 从而改变了原图灰度直方图分布, 使得处理后的结果要么灰度值很高, 要么灰度值很低(即要么是白, 要么就是黑), 从而丢掉了大量的纹理细节信息. 图像分数阶微分具有非线性加强纹理细节信息的能力. 图像分数阶微分掩模既能尽量非线性保留图像平滑区域中的低频轮廓特征, 同时又能非线性增强图像中灰度值跃变幅度相对较大的高频边缘特征, 而且还能非线性增强图像中灰度值跃变幅度和频率变化相对不大的高频纹理细节特征.

本实验还对该岩石纹理彩图及其分数阶微分的灰度值纵向(x 方向)投影包络曲线的分数阶稳定系数函数 $\rho(y)$ 进行对比分析,如图 11 所示.

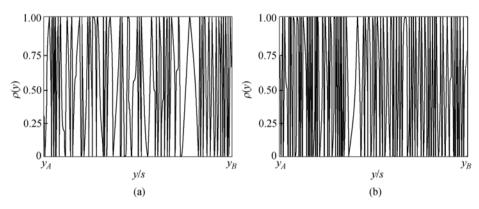


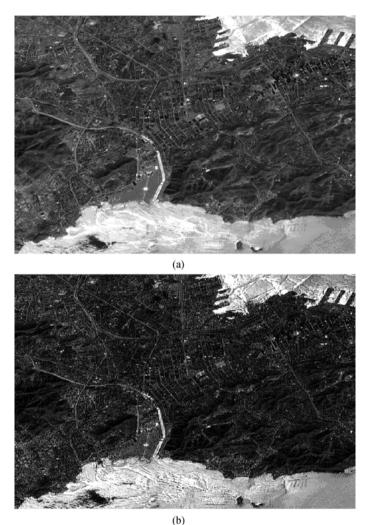
图 11 灰度垂直投影对应的分数阶稳定系数对比

(a) 原图的 $\rho$ (y); (b)  $\nu$  = 0.55 阶微分后的 $\rho$ (y)

由图 11 知,图像分数阶微分后,其分数阶稳定系数的振荡频率明显增大.说明图像分数阶微分后其灰度发生较频繁的差异,其纹理细节特征得到了增强.至此,本实验从定性和定量2个方面证实了分数阶微分具有非线性增强图像复杂纹理细节特征的优良特性.对于纹理细节信息丰富的图像信号而言,分数阶微分对灰度变化不大的平滑区域中的纹理细节信息的增强效果明显优于整数阶微分运算.

近年来,随着下一代高清晰数字电视对图像清晰度和实时性要求的不断提高、随着生物医学图像(如细胞图像、X光片、乳腺钼靶片、CT图像、MRI图像、PET图像、超声图像等)对后期图像处理清晰度和实时性要求的不断提高,随着银行票据智能识别系统对票据复杂纹理细节特征预处理质量要求的不断提高,随着卫星遥感图像对其复杂地理纹理细节特征的增强程度以及对只有几个像素的小目标识别能力要求的不断提高,随着指纹、虹膜、掌纹等生物特征智能识别系统对复杂生物纹理特征预处理质量要求的不断提高,图像分数阶微分理论、数值实现算法及其分数阶微分滤波器有望在这些领域中得到广泛的应用.文末,我们给出一幅关于卫星遥

感图像分数阶微分前后的效果对比图,以进一步说明图像分数阶微分既能尽量非线性保留图像平滑区域中的低频轮廓特征,同时又能非线性增强图像中灰度值跃变幅度相对较大的高频边缘特征,而且还能非线性增强图像中灰度值跃变幅度和频率变化相对不大的高频纹理细节特征,如图 12 所示.



**图 12** 卫星遥感图像的分数阶微分 (a) 原图; (b) v = 0.55 阶分数阶微分

# 3 结束语

如何将分数阶微积分应用于现代信号分析与处理,特别是数字图像处理之中,在国际上还是一个研究甚少的新兴学科分支.本文的研究致力于将一种崭新的数学方法(分数阶微积分)应用到数字图像处理这门学科之中.本文分别从信息论和动力学的观点 2 个角度深刻阐述了分数阶微积分的几何意义和物理意义;提出并论述了分数阶驻点、分数阶平衡系数、分数阶

稳定系数、分数阶灰度共生矩阵、分数阶微分掩模的崭新概念与理论;提出并论述了数字图像分数阶微分滤波器的理论与构造.仿真实验分别从定性和定量 2 个方面证实了分数阶微分具有非线性增强图像复杂纹理细节特征的独特优势与良好效果.

**致谢** 感谢法国国家科学院 Jacques Caen 院士、Anne-Sophie 女士和法国南锡第一大学 Jacques Felblinger 教授的指导和交流.

#### 参考文献 \_\_\_\_

- 1 蒲亦非. 分数阶微积分在现代信号分析与处理中应用的研究. 博士学位论文. 成都: 四川大学, 2006. 155—212
- 2 蒲亦非. 将分数阶微分演算引入数字图像处理. 四川大学学报(工程科学版), 2007, 39(3): 124—132
- 3 蒲亦非, 王卫星. 数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则. 自动化学报, 2007, 33(11): 1128—1135
- 4 蒲亦非. 数字图像的分数阶微分滤波器. 中国, 200610021702.3. 2006
- 5 蒲亦非, 袁晓, 廖科, 等. 现代信号分析与处理中分数阶微积分的五种数值实现算法. 四川大学学报(工程科学版), 2005, 37(5): 118—124
- 6 Pu Y F, Yuan X, Liao K, et al. Structuring analog fractance circuit for 1/2 order fractional calculus. In: Proceedings of the 6th International Conference on ASIC. Shanghai: IEEE, 2005. 1039—1042
- 7 Pu Y F. Implement any fractional order multilayer dynamics associative neural network. In: Proceedings of the 6th International Conference on ASIC. Shanghai: IEEE, 2005. 635—638
- 8 Pu Y F, Yuan X, Liao K, et al. A recursive net-grid-type analog fractance circuit for any order fractional calculus. In: Proceedings of IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Canada: IEEE, 2005. 1375—1380
- 9 蒲亦非,袁晓,廖科,等.连续子波变换数值实现中尺度采样间隔的确定.四川大学学报(工程科学版),2004,36(6):111—116
- 10 蒲亦非, 袁晓, 廖科, 等. 一种实现任意分数阶神经型脉冲振荡器的格形模拟分抗电路. 四川大学学报 (工程科学版), 2006, 38(1): 128—132
- 11 Falconer K. 分形几何-数学基础及其应用. 曾文曲, 刘世耀, 译. 东北工业学院出版社, 1991. 80—120
- 12 Oldham K B, Spanier J. The Fractional Calculus. New York/London: Academic Press, 1974. 5—96
- 13 袁晓, 陈向东, 李齐良, 等. 微分算子与子波构造. 电子学报, 2002, 30(5): 769-773