科 学 通 报
第 39 卷 第 13 期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1994 年 7 月

曲线上微分算子环的 Stafford-Smith 问题*

刘海霞 王明生
(北京师范大学数学系，北京 100875)

关键词 微分算子环、Artin 代数

设 X 是特征为零的代数闭域 k 上的仿射代数曲线，$O(X)$ 表示 X 上的正则函数环，$D(X)$ 是 X 上微分算子环，$H(X)$ 是 $D(X)$ 的导出 Artin 代数．Stafford-Smith 在文献[1] 中提出如下两个问题：

Stafford-Smith 问题 I: $D(X)$ 是否有无限的总体同调维数？

Stafford-Smith 问题 II: 给定一个任何有限维代数 A, 是否存在仿射曲线 X, 使得 $H(X)=A$?

Brown 在文献[2] 中提出了如下问题：是否 $H(X)$ 总是为拟遗传代数？

本文的目的在于对上面这些问题给出回答．

1 Stafford-Smith 问题 I

设 $B=k[x]$, k 为特征零代数封闭域，x 为不定元，$f=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$. $I=x^3(x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3(x-4)^2(x-5)^2B$ 是 B 的一个理想．令 $a_1=f$, $a_2=f^2$, $a_3=x^3(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^2(x-4)(x-5)$, $A=k+ka_1+ka_2+ka_3+I$. 则 A 是 B 的子环，又 $x=x^4(x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3(x-4)^2(x-5)^2/x^3(x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3(x-4)^2(x-5)^2$ 在 A 的商域中，所以 A 与 B 具有相同的商域．令 X 是由 A 决定的仿射不可约曲线，即 $O(X)=A$. 我们将确定 X 上微分算子环 $D(X)$ 的导出 Artin 代数 $H(X)$.

显然 X 的正规化 $\widetilde{X}=\mathbb{A}_k^1$, $O(\widetilde{x})=B$. I 是 B 在 A 中导子，即 $I=A_{nn_A}B/A$. 由文献[3] 第 5 章第 5 节，X 有唯一奇点 P 对应于极大理想 $ka_1+ka_2+ka_3+I$. 记这个极大理想为 m, 显然 $mB=fB$. 于是正规化映射 $\pi:\mathbb{A}_k^1\to X$ 非分歧．

令 $O=O_{x,p}=k+ka_1+ka_2+ka_3+IA_m$, 则 O 的整闭包为 $\widetilde{O}=B_m$. $\widetilde{O}$ 在 O 中导子 $E=A_{nn_O}\widetilde{O}/O=IA_m$. O 的最大非分歧扩张为 $\widetilde{O}$.

命题 1.1 设曲线 X 如上，则

$$H(X)=H(O)=\left\{\left.\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & \delta\\ \beta & \alpha & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \alpha & \gamma\\ 0 & 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}\right|\ \alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \gamma,\ \mu\in k\right\}.$$

证 利用 $k[x]$ 中因式分解直接计算可得：

1993-07-05 收稿，1994-03-10 收修改稿．
* 国家教委博士点基金资助项目．

$$E_0=x^3\widetilde{O}\bigcap O=ka_3+E,\qquad E_1=(x-1)^3\widetilde{O}\bigcap O=ka_3+E,$$
$$E_2=(x-2)^3\widetilde{O}\bigcap O=k(a_2-3a_3)+E,\quad E_3=(x-3)^3\widetilde{O}\bigcap O=k(3a_2-a_3)+E,$$
$$E_4=(x-4)^2\widetilde{O}\bigcap O=ka_2+k(288a_1-a_3)+E,$$
$$E_5=(x-5)^2\widetilde{O}\bigcap O=ka_2+k(2400a_1-a_3)+E,$$
$$E=x^3\widetilde{O}\bigcap(x-1)^3\widetilde{O}\bigcap(x-2)^3\widetilde{O}\bigcap(x-3)^3\widetilde{O}\bigcap(x-4)^2\widetilde{O}\bigcap(x-5)^2\widetilde{O}$$

是 E 在 O 中的准素分解. 1, a_1, a_2, a_3 在 O/E 中的像构成 O/E 的一组 k-向量空间的基底. 记这组基为$\overline{1}$, $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, 则我们有: $H(O)\simeq\{\varphi\in\mathrm{End}_k(O/E):\varphi(E_i/E)\subseteq E_i/E,\ 0\leqslant 1\leqslant 5\}$. 设上式右端为 S, 给定 $\varphi\in S$. 设 φ 在$\overline{1}$, $\overline{a}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ 上的作用为:

$$\begin{aligned}&\varphi(\overline{a_i})=b_{i1}\overline{a}_1+b_{i2}\overline{a}_2+b_{i3}\overline{a}_3+b_{i4}\overline{1},\quad i=1,\ 2,\ 3,\\&\varphi(\overline{1})=\delta\overline{a}_1+\lambda\overline{a}_2+\gamma\overline{a}_3+\mu\overline{1}.\end{aligned}\tag{1}$$

因 $\varphi((E_0+E_1+E_2+E_3+E_4+E_5)/E)\subseteq(E_0+E_1+E_2+E_3+E_4+E_5)/E=k\overline{a}_1+k\overline{a}_2+k\overline{a}_3$. 于是 $b_{14}=b_{24}=b_{34}=0$. 又由 $\varphi(E_0/E)\subseteq E_0/E=k\overline{a}_3$ 可推知 $b_{31}=b_{32}=0$. 这样我们容易验证下面两个事实:

i) 若 $\varphi(\overline{a}_3+\mu\overline{a}_1)\subseteq k\overline{a}_2+k(\overline{a}_3+\mu\overline{a}_1)$, 其中 $\mu\in k\backslash\{0\}$, 则 $b_{33}-b_{11}+\mu b_{13}=0$;

ii) 若 $\varphi(\overline{a}_2-\mu\overline{a}_3)\subseteq k(\overline{a}_2-\mu\overline{a}_3)$, 其中 $\mu\in k\backslash\{0\}$, 则 $\mu(b_{22}-b_{33})+b_{23}=0$ 且 $b_{21}=0$.

于是利用 i) 及 $\varphi(E_4/E)\subseteq E_4$, $\varphi(E_5/E)\subseteq E_5$ 推知 $b_{11}=b_{33}$, $b_{13}=0$; 利用 ii) 及 $\varphi(E_2/E)\subseteq E_2/E$, $\varphi(E_3/E)\subseteq E_3/E$ 推知 $b_{22}=b_{33}$, $b_{21}=b_{23}=0$.

另一方面, 若 $\varphi\in\mathrm{End}_k(O/E)$ 由(1)定义且 $b_{11}=b_{22}=b_{33}$, $b_{13}=b_{21}=b_{23}=b_{31}=b_{32}=b_{14}=b_{24}=b_{34}=0$, $b_{34}=0$, 则 $\varphi(E_i/E)\subseteq E_i/E$, $0\leqslant i\leqslant 5$, 从而 $\varphi\in S$. 因此由作者博士论文[1)]的定理 0.3.3, $H(X)=H(O)$. 证毕.

命题 1.2 存在不可约曲线 X, 使得它的微分算子环的导出 Artin 代数有无限的总体维数(从而不是拟遗传代数).

证 设 X 如命题 1.1, 我们考虑有限维 k-代数

$$R=\left\{\left.\begin{pmatrix}\alpha&0&0&\delta\\\beta&\alpha&0&\lambda\\0&0&\alpha&\gamma\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}\right|\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma,\ \lambda,\ \mu\in k\right\}$$

的总体同调维数. 令

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad e_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

则R 有本原幂等元分解 $1=e_1+e_2$. R 的 Jacobson 根为

$$J=J(R)=\left\{\left.\begin{pmatrix}0&0&0&\delta\\\beta&0&0&\lambda\\0&0&0&\gamma\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right|\ \beta,\ \delta,\ \lambda,\ \gamma\in k\right\},$$

显然有

1) 刘海霞, 仿射曲线上微分算子环及其导出 Artin 代数, 博士论文, 北京师范大学, 1993.

$$J^2=\left\{\left(\begin{array}{cccc}0&0&0&0\\0&0&0&\lambda\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\middle|\ \lambda\in k\right\},\qquad J^3=0.$$

于是容易求得 $\dim_k e_1Je_1/e_1J^2e_1=1$, $\dim_k e_1Je_2/e_1J^2e_2=2$. $\dim_k e_2Je_1/e_2J^2e_1=0$. 从而 R 的普通箭图(Gabriel quiver)为

$$e_2\bullet \underset{\sigma_2}{\overset{\sigma_1}{\leftleftarrows}} \bullet e_1 \circlearrowleft \rho$$

适合关系 $\rho^2=0$, $\sigma_1\rho=0$. 根据 Igusa[4], k-代数 R 有无限的总体同调维数,从而由命题 1.1, $H(X)$ 有无限的总体同调维数. 又因拟遗传代数的总体同调维数必有限,故结论成立.

注　据我们所知,现有文献中的微分算子环的导出 Artin 代数的例子还都是遗传代数(见文献[2]).

推论 1.3　存在不可约曲线 X, 它的微分算子环有无限的总体同调维数.

证　设 X 如命题 1.1. 由文献[1] 中命题 4.2, $D(X)$ 的唯一非零极小理想 $J(X)$ 作为左,右 $D(X)$-模都是投射模,因为 $D(X)$ 是无零因子环,所以 $J^2(X)=J(X)$. 由文献[5] 中定理 7.3.10 及推论 2. 我们有 $\mathrm{gl.dim}D(X)\geqslant \mathrm{gl.dim}H(X)>+\infty$.

这样,我们就给出了 Brown 问题的否定回答和 Stafford-Smith 问题 I 的肯定回答.

2　Stafford-Smith 问题 II

现在我们来考虑 Stafford-Smith 问题 II.

命题 2.1　设 A 是由两个生成元 x_1, x_2 和关系 $x_1^2=x_2^2=x_2x_1-\lambda x_1x_2=0$, $\lambda\neq 0, 1$ 定义的有限维 k-代数. 则不存在曲线 X, 使得 $H(X)=A$.

证　直接计算可知 A 只有平凡的幂等元 0, 1. 其中 1 为 k 中的恒等元,因此它是一个与 $M_2(k)$ 不同构的四维非交换 k-代数. 假设存在不可约曲线 X, 使得 $H(X)=A$. 设 $\pi:\widetilde{X}\to X$ 是正规化映射. 于是它有如下分解: $\widetilde{X}\xrightarrow{\theta}\overline{X}\xrightarrow{\mu}X$其中 μ 非分歧, θ 为双射. $\overline{X}$ 是相应于 $O(X)$的最大非分歧扩张 $O(\overline{X})$ 的不可约曲线. $E=Ann_{O(X)}O(X)/O(X)$ 是 $O(\overline{X})$ 在 $O(X)$中的导子,由文献[2] 知 $D(X)$ 的唯一非零极小理想, $J(X)=ED(\overline{X})$. 从而 $H(X)$ 含交换子代数$(O(X)+J(X))/J(X)\simeq O(X)/O(X)\bigcap ED(\overline{X})\simeq O(X)/E$. 因此 $H(X)$ 可看成 $\mathrm{End}_k(O(X)/E)$ 的 k-子代数,由 A 的这些特性,我们推出: $\dim_k O(X)/E=3$.

因 $x_1^2=x_2^2=0$, 于是 x_1, x_2 看作 $M_3(k)$ 中矩阵形如

$$x_1=\begin{pmatrix}\tau_1\\\lambda_1\\\sigma_1\end{pmatrix}(a_1,\ b_1,\ c_1),\qquad x_2=\begin{pmatrix}\tau_2\\\lambda_2\\\sigma_2\end{pmatrix}(a_2,\ b_2,\ c_2),$$

并且 $\tau_ia_i+\lambda_ib_i+\sigma_ic_i=0$, $i=1, 2$.

$$\text{但是 } x_1x_2=(a_1\tau_2+b_1\lambda_2+c_1\sigma_2)\begin{bmatrix}\tau_1a_2&\tau_1b_2&\tau_1c_2\\\lambda_1a_2&\lambda_1b_2&\lambda_1c_2\\\sigma_1a_2&\sigma_1b_2&\sigma_1c_2\end{bmatrix},$$

$$x_2x_1=(a_2\tau_1+b_2\lambda_1+c_2+\sigma_1)\begin{bmatrix}\tau_2a_1 & \tau_2b_1 & \tau_2c_1\\ \lambda_2a_1 & \lambda_2b_1 & \lambda_2c_1\\ \sigma_2a_1 & \sigma_2b_1 & \sigma_2c_1\end{bmatrix},$$

因 $(a_1, b_1, c_1)\neq(0, 0, 0)$, $x_2x_1=\lambda x_1x_2\neq0$. 我们有 $\mu\neq0$ 使得

$$\tau_2=\mu\tau_1,\quad \lambda_2=\mu\lambda_1,\quad \sigma_2=\mu\sigma_1.$$

这样便有 $a_1\tau_2+b_1\lambda_2+c_1\sigma_2=\mu(a_1\tau_1+b_1\lambda_1+c_1\sigma_1)=0$, 与 $x_1x_2\neq0$ 矛盾. 证毕.

这样,我们便给 Stafford-Smith 问题给出了一个否定的回答.

致谢 作者感谢刘绍学教授和黄维民博士对本文的精心指导.

参 考 文 献

[1] Smith, S. P., Stafford, J. T., *Proc. Lond Math. Soc.*, 1988, **56**: 229—259.
[2] Brown, K. A., *Math. Z.*, 1991, **206**: 423—442.
[3] Zariski, O., Samuel, P., *Commutative Algebra.*, GTM 29, Springer-Verlag, New York, 1960.
[4] Igusa, K., *J. Pure Appl. Algebra.*, 1990, **69**: 161—176.
[5] Mcconnell, J. C., Robson, J. C., *Non Commutative Noetherian Rings*, Wiley, Chichester, New York, 1987.