中国科学（A 辑）
第 30 卷 第 3 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2000 年 3 月

虚二次域上不可分解的正定 Hermite 型

朱福祖
（华东师范大学数学系，上海 200062）

摘要 给出构作虚二次域$\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$的整数环 R_m 上的不可分解的正定 Hermite 型的方法．对任意自然数 $n\geqslant 2$（$n\geqslant 13$ 或奇数 $n\geqslant 3$）和不含平方因子的 $m=12k+t$，$k\geqslant 1$ 且 $t\in\{1,7\}$（$k\geqslant 1$ 且 $t=2$ 或 $k\geqslant 0$ 且 $t\in\{5,10,11\}$），存在环 R_m 上 n 秩不可分解的正定整 Hermite 型，其判别式为 2，并给出它们的明显结构．对于判别式不等于 2 的情况也做了相应的讨论．

关键词 不可分格 不可分解格 对偶格 块型

1 主要结果

本文将给出构作虚二次域上不可分解的正定整 Hermite 型的方法．对有理整数环上正定整二次型的构作问题进行研究的有 Mordell[1]，Erdös-Ko[2,3]，朱福祖[4,5]和 Pleskin[6]．

令 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$（$m>0$ 且无平方因子）为虚二次域且 R_m 为它的代数整数环．域 F 有一个非平凡的对合，即共轭 $\alpha\mapsto\bar{\alpha}$，其固定点域为$\mathbb{Q}$．设$(V,h)$为 F 上的正定 Hermite 空间，并有关于上述对合的 V 上半双线性型 ϕ 以及相伴的 Hermite 型 h，则 $h(x)=\phi(x,x)>0$ 对一切 $0\neq x\in V$，设 L 为 V 上的 R_m 格，即 L 为 V 中一个有限生成 R_m 模且 $FL=V$．本文所考虑的格都是整格，即对一切 $x,y\in L$ 有 $\phi(x,y)\in R_m$．格(L,h)称为不可分的，是指 L 不能表为两个非零子格的正交和．如果 L 不是不可分的，则称 L 为可分的．另一方面，(L,h)称为不可分解的，如果除去平凡的情形外，不存在下面的表示式：

$$h=h_1+h_2,$$

这里 h_1，h_2 都是半正定的 Hermite 型．由上述定义推出

$$(L,h)\text{ 为不可分解的}\Rightarrow(L,h)\text{ 为不可分的},$$

但逆命题未必成立．我们可建立

定理 A[5] 设(L,h)为环 R_m 上不可分的正定 Hermite 格，若它是幺模的，则(L,h)是不可分解的．

定理 A 与关于$\mathbb{Z}$上二次格的有关性质类似[5]，故略去证明．

Hermite R_m 格(L,h)称为偶的，如果对一切 $x\in L$ 有 $h(x)\in 2\mathbb{Z}$，否则称为奇格，由文献[7]和定理 A 有

1999-06-05 收稿，1999-10-10 收修改稿

定理 1.1　存在环 R_m 上 n 秩不可分解的正定幺模偶 Hermite 格的充分必要条件是

$$m \equiv 1 \pmod 4 \text{ 且 } 4 \mid n \text{ 或 } m \equiv 2 \pmod 4 \text{ 且 } 2 \mid n.$$

定理 B[8]　设$\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$的类数为 1,则对任意给定的 n 和无平方因子的m,存在不可分解的正定幺模奇的 Hermite R_m 格,但有下列 13 个例外:

m	1	2	3	7	11
n	2,3,4,5	2,3	2,3,4,5,7	2	3

在上述例外情况下,不存在具有上述性质的格.

设(L, h)为 n 秩正定 R_m 格,它关于某一个基有矩阵 A,(L,h)的判别式和 A 的左上方 $n-1$ 阶主子式分别记为 $d(h)$和 $M(h)$. 本文将建立下列定理:

定理 1.2　设 $m=12k+t$ 不含平方因子,$k\geqslant 1$ 且 $t\in\{1,7\}$,则对任一 $n\geqslant 2$, 存在一个 n 秩不可分解的正定 Hermite R_m 格(L, h),它的判别式 $d(h)=2$ 且 $M(h)=3$.

定理 1.3　设 $m=12k+t$ 不含平方因子,其中 $k\geqslant 1$ 且 $t=2$ 或 $k\geqslant 0$ 且 $t\in\{5, 10, 11\}$,则对每一整数 $n\geqslant 13$ 或奇数不小于 3,存在不可分解的 n 秩正定 Hermite R_m 格(L, h),它的 $d(h)=2$和 $M(h)=3$. 对任意偶数 $n\geqslant 4$ $(n\geqslant 6)$也存在这样的 n 秩不可分解R_m 格(L, h),它的 $d(h)=2$ 且 $M(h)$为大于 1 的奇数,如果 $m=12k+t$, 其中 $k\geqslant 1$ 且 $t=2$ 或 $k=2j\geqslant 0$ 且 $t=5$ 或 $k\geqslant 0$ 且 $t=10$($k=2j+1$ 且 $t=5$ 或 $k\geqslant 0$ 且 $t=11$).

定理 1.4　设 $m=12k+t$ 不含平方因子,则对任意 $n\geqslant 3$($n\geqslant 14$ 或偶数 $n\geqslant 4$),当 $k\geqslant 1$ 且 $t\in\{1,7\}$($k\geqslant 1$ 且 $t=2$ 或 $k\geqslant 0$ 且 $t\in\{5,10,11\}$),存在不可分解的 n 秩正定幺模 Hermite 格. 若 $m=12k+t>2$,其中 $k\geqslant 0$, $t\in\{2,10\}$或 $k=2j\geqslant 0$ 且 $t=5$ ($k=2j+1$ 且 $t=5$ 或 $k\geqslant 0$ 且 $t=11$),则对每一奇数 $n\geqslant 5$ $(n\geqslant 7)$,存在不可分解的 n 秩幺模 Hermite R_m 格.

定理 1.5　设 $m=12k+t$ 为不含平方因子的整数,其中 $k\geqslant 1$ 且 $t\in\{1,2,7\}$或 $k\geqslant 0$ 且 $t\in\{5,10,11\}$,则对每一个给定的 $g>0$ 和 $n>6g+7$,存在一个判别式 $d(h)=g$ 的 n 秩不可分解的正定 HermiteR_m 格(L,h).

本文所用术语和记号参见文献[9].

2　关于不可分解性的几个准则

命题 2.1[10]　设判别式 $d(h)=d$ $(0<d<n)$的 n 秩 Hermite R_m 格(L, h)关于某一基有矩阵

$$A=\left(\begin{array}{c:c} a & \beta \\ \hdashline \overline{\beta} & \Gamma_{n-1} \end{array}\right),$$

这里 $n\geqslant 2, a\geqslant 2$, $\beta=b_1+b_2\theta$, $b_i\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant b_i<n$ $(i=1, 2)$,当 $m\not\equiv 3 \pmod 4$, $\theta=\sqrt{-m}$; 当 $m\equiv 3 \pmod 4$, $\theta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-m})$, 且

$$\Gamma_1=2,\ \Gamma_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \left(\begin{array}{c:c} 2 & 1 \\ \hdashline 1 & \Gamma_{s-1} \end{array}\right).$$

如果下列条件成立:

当 $m \not\equiv 3 \pmod 4$

1. $a < \beta\bar{\beta}$,
2. $a - \beta\bar{\beta} + 2b_1 - n < 0$,
3. $a - \beta\bar{\beta} + m(2b_2 - n) < 0$,
4. $a - \beta\bar{\beta} + 2b_1 - n + m(2b_2 - n) < 0$,

当 $m \equiv 3 \pmod 4$

1′. $a < \beta\bar{\beta}$,
2′. $a - \beta\bar{\beta} + 2b_1 + b_2 - n < 0$,
3′. $a - \beta\bar{\beta} + b_1 + \frac{1}{2}(m+1)b_2 - \frac{1}{4}(m+1)n < 0$,
4′. $a - \beta\bar{\beta} + 3b_1 + \frac{1}{2}(m+3)b_2 - \frac{1}{4}(m+9)n < 0$,

则(L,h)是正定的不可分解格.

命题 2.2 在命题2.1中当 $m \equiv 3 \pmod 4$,将关于 b_i 的条件换为$b_1 > 0$, $b_2 < 0$,条件3′和4′换为

3) $a - \beta\bar{\beta} + b_1 - \frac{1}{2}(m+1)b_2 - \frac{1}{4}(m+1)n < 0$,

4) $a - \beta\bar{\beta} + b_1 - \frac{1}{2}(m+1)b_2 - \frac{1}{4}(m+1)n < 0$,

而其他条件不变,则(L,h)是正定的不可分解格.

本命题的证明方法与命题 2.1 类似.

设(L,h)为正定 R_m 格,称

$$L^{\#} = \{x \in FL \mid \phi(x,L) \in R_m\}$$

为 L 的对偶格. 显然 $L^{\#} \supseteq L$ 且商群 $L^{\#}/L$ 的阶 $= d(h)$. 对正定 R_m 格(L,h),如果对任意 R_m 上非零线性映射 η: $L \to R_m$, 差 $h - \eta\bar{\eta}$是不定的,则称 h 为块型. 显然一个不可分解的 Hermite 型是一个块型. 格(L, h)的极小值是指

$$\min(L,h) = \min\{|h(x)| \mid 0 \neq x \in L\}.$$

命题2.3 设(L,h)为正定 Hermite 格,则 h 为块型的充分必要条件是 $\min(L^{\#},h) > 1$.

证 令 $L \to R_m$: $x \mapsto \phi(V,x)$为 $v \in L$ 引起的线性型. 如果 $\phi(v,v) \leqslant 1$,则由 Schwarz 不等式导出:$|\phi(v,x)|^2 \leqslant \phi(x,x)$对一切 $x \in FL$,从而 $\phi(x,x) - |\phi(v,x)|^2 \leqslant 0$,所以 h 不是块型. 反之,如果 h 不是块型,则$|\phi(v,x)|^2 \leqslant \phi(x,x)$. 特别,在上面的不等式中取 $x = v$,导出 $\phi(x,x) \leqslant 1$. 证毕.

现在给出一个关于正定 Hermite R_m 格的不可分解性的判别准则,它在描述意义下是命题 2.1 的一个推广. 以下令 γ_m 表示一个仅与 m 有关的常数,使每一个秩不大于 γ_m 的 R_m 上半正定 Hermite 型可表为线性型的范之和,且至少有一个秩为 $\gamma_m + 1$ 的 R_m 上正定 Hermite 型不能这样表示. 明显地有 $\gamma_m \geqslant 1$,因为由 Lagrange 定理,每一个正整数可表为 4 个整数的平方和.

命题 2.4 设(L, h)为正定 Hermite R_m 格,若

1) $\min(L^{\#},h) > 1$,即 h 为一块型;

2) 由$\{x \in L \mid h(x) \leqslant 3\}$所生成的子格 K 是不可分的,且 $\dim(L) - \dim(K) \leqslant \gamma_m$,

则(L, h)是不可分解的.

证 假设 $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$且 $h_i(x)$为非零的、半正定的$(i = 1, 2)$. 若 $0 \neq x \in K$ 且 $h(x) \leqslant 3$,则 $h_1(x) = 0$ 或 $h_2(x) = 0$. 否则将有 $h_1(x) = 1$ 或 $h_2(x) = 1$, 于是对 $i = 1$ 或 2, (L, h_i)是可分的且以$(R_m, 1)$为其正交和因子,从而存在 L 上一个线性型 η,使得 $h(x) > h_1(x) \geqslant$

$\eta(x)\overline{\eta}(x)$,但由与命题 2.3 的证明中所用论证类似的方法可知,这结果与 1)矛盾. 设 $0\neq v\in K$ 且 $h(v)\leqslant 3$,并令 $h_1(v)=0$, 于是对一切适合 $h(x)\leqslant 3$ 的 $x\in K$ 有 $h_1(x)=0$,这可对适合 $\phi(v,x)\neq 0$的一切 x 推出. 因为

$$0\leqslant \det\begin{pmatrix} h_1(v) & \phi_1(v,x) \\ \phi_1(v,x) & h_1(x)\end{pmatrix} = -\,|\phi_1(v,x)|^2,$$

从而 $\phi_1(v,x)=0$. 若设 $h_1(x)\neq 0$,则 $h_2(x)=0$, 从而同样的论点可证明 $\phi_2(v,x)=0$, 但 $0\neq \phi(v,x)=\phi_1(v,x)+\phi_2(v,x)=0+0$ 矛盾. 因 K 为不可分的,对适合 $h(x)\leqslant 3$ 的一切 $x\in L$ 有 $h_1(x)=0$, 因此 h_1 在 K 上是 0. 但$\dim(L)-\dim(K)\leqslant \gamma_m$, 所以 h_1 是线性型的范之和. 因此存在一个线性型 ρ, 使 $h(x)=g(x)+\rho(x)\overline{\rho}(x)$, 且 $g(x)$为半正定的,但这与 h 为块型相矛盾. 证毕.

例 2.1　设 $m=12k+t$ $(k>0)$为无平方因子的整数,且(L,h)为秩 $n=2$ 的正定 Hermite R_m 格,它的判别式 $d(h)=2$ 且 $M(h)=3$, 关于基$\{e_1,e_2\}$有

$$(L,h)\cong\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{-m} \\ -\sqrt{-m} & 4k+1\end{pmatrix},\ (L^{\#},\ h)\cong\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4k+1 & -\sqrt{-m} \\ \sqrt{-m} & 3\end{pmatrix}.$$

由$\{e_1\}$生成一个子格 K 且$\dim(L)-\dim(K)=1$, $h(e_1)=3$ 且 $\phi(e_1,e_2)\neq 0$. 显然 K 是不可分的. 另一方面可以推出: $\min(L^{\#},\ h)=\dfrac{3}{2}>1$. 由命题 2.4,$(L,h)$是不可分解格.

3　定理 1.2 和 1.3 的证明

引理 3.1　设 $m=12k+t$ 不含平方因子,其中 $k\geqslant 1$ 且 $t\in\{1,2,7\}$或 $k\geqslant 0$, $t\in\{5,\ 10,\ 11\}$. 令 f 为 R_m 上不可分解的 n 秩正定 Hermite 型

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\bar{x}_j\quad (a_{ij}=\bar{a}_{ji},\ A=(a_{ij})_{n\times n}),$$

它的判别式 $d(f)=2$, 且 a_{nn}在矩阵 A 中的余子式为大于 1 的奇数 $2u+1$,则对每一个 m, 存在一个 R_m 上二秩正定 Hermite 型 $g(y_1,\ y_2)$,使得下面的$(n+2)$秩 Hermite 型:

$$h(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ y_2)=f(x_1,\ \cdots,\ x_n)+x_n\bar{y}_1+\bar{x}_ny_1+g(y_1,\ y_2)\tag{1}$$

是正定且不可分解的,它的判别式 $d(h)=2$,且 $y_2\bar{y}_2$ 的系数在型 h 的矩阵 B 中余子式之值为 3.

证　1) $m=12k+1$ $(k\geqslant 1)$. 取(1)式中的二元型 $g(y_1,\ y_2)$为

$$g(y_1,\ y_2)=(y_1,\ y_2)\begin{pmatrix} u+2 & 1+\sqrt{-m} \\ 1-\sqrt{-m} & 8k+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{y}_1\\ \bar{y}_2\end{pmatrix}.$$

今证: 这样得出的 $n+2$ 元型 $h(x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\ y_2)$满足引理 3.1 中的所有条件. 因 $\det(B)=2$,且 B 的左上角 $n+1$ 阶主子式之值为 3, 所以型 h 是正定的,假设存在一个分解

$$h(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ y_2)=h_1(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ y_2)+h_2(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ y_2),\tag{2}$$

则在型 h_1 和 h_2 之中必有一个是二元半正定型. 事实上,令(2)式中 $y_1=y_2=0$,将得出型 f 的一个分解

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_2)=h_1(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ 0,\ 0)+h_2(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ 0,\ 0).$$

由 $f(x_1, \cdots, x_n)$的不可分解性,$h_i(x_1, \cdots, x_n, 0,0)$之一,例如 $h_2(x_1, \cdots, x_n, 0, 0)$,必为0,这意味着:在 $h_2 = h_2(x_1, \cdots, x_n, y_1, y_2)$中对 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $x_i\bar{x}_j$ 的一切系数都是0. 再者,对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 和 $1 \leqslant j \leqslant 2$, $x_i\bar{y}_j$ 的一切系数都是0,否则 h_2 将取负值,而这与 h_2 的半正定性相矛盾. 因此,h_2 是 R_m 上的一个二元半正定 Hermite 型:

$$h_2 = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} c_2 & \beta_2 \\ \overline{\beta}_2 & t_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}.$$

另一方面,型 h_1 可表为

$$h_1(x_1, \cdots, x_n, y_1, y_2) = (x_1, \cdots, x_n, y_1, y_2)\left(\begin{array}{c:cc} A & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & c_1 & \beta_1 \\ 0 & \overline{\beta}_1 & t_1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix},$$

这里 c_i, $t_i \in \mathbb{Z}$, $\beta_1 = b_1 + b_2\sqrt{-m}(b_1, b_2 \in \mathbb{Z})$, A 是型 $f(x_1, \cdots, x_n)$的矩阵. 显然 $c_1 + c_2 = u + 2$, $t_1 + t_2 = 8k + 2$, 且 $\beta_1 + \beta_2 = 1 + \sqrt{-m}$,由 h_1 的矩阵的左上方 $n+1$ 阶主子式,因 h_1 为半正定的,$2c_1 - (2u+1) \geqslant 0$, 从而 $u + \frac{1}{2} \leqslant c_1 \leqslant u + 2$. 今按 $c_1 = u + 1$ 或 $u + 2$ 分别讨论.

首先,若 $c_1 = u + 1$,则 $c_2 = 1$. 由 h_1 的半正定性,h_1 的矩阵的行列式为 $t_1 - 2\beta_1\overline{\beta}_1 \geqslant 0$. 由 $m = 12k + 1$ 且 $k \geqslant 1$ 以及 $b_1^2 + mb_2^2 \leqslant \frac{1}{2}t_1 \leqslant 4k + 1$, 推出 $b_2 = 0$. 因此 h_2 的判别式

$$d(h_2) = t_2 - \beta_2\overline{\beta}_2 = (8k + 2 - t_1) - (1 - b_1)^2 + m < 0,$$

从而 h_2 是不定的 Hermite 型.

其次,若 $c_2 = u + 2$, 则 $c_2 = 0$. 设 $\beta_2 \neq 0$,则 $d(h_2) = -\beta_2\overline{\beta}_2 < 0$, 从而 h_2 是不定型. 设 $\beta_2 = 0$, 则 $\beta_1 = 1 + \sqrt{-m}$, 从而 $\beta_1\overline{\beta}_1 = 12k + 2$. 由 h_1 的半正定性,$3t_1 - 2\beta_1\overline{\beta}_1 \geqslant 0$ 或 $t_1 \geqslant \frac{2}{3}\beta\overline{\beta}_1 = 8k + \frac{4}{3}$, 因此 $t_1 = 8k + 2$, 从而 $t_2 = 0$. 这样 $h_2 = 0$,所以分解式(2)是平凡的.

引理 3.1 对情形 $m = 12k + 1$ $(k \geqslant 1)$证毕.

对 m 的其他情形可类似地证明. 以下仅给出证明的梗概而略去细节.

2) $m = 12k + 2$ $(k \geqslant 1)$. 取(1)式中的 $g(y_1, y_2)$为

$$g(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} u + 2 & \sqrt{-m} \\ -\sqrt{-m} & 8k + 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}.$$

3) $m = 12k + 7$ $(k \geqslant 1)$. 取(1)式中的 $g(y_1, y_2)$为

$$g(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} u + 2 & \theta_m \\ \overline{\theta}_m & 2k + 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} \quad \left(\theta_m = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-m})\right).$$

4) $m = 2k + 5$ $(k \geqslant 1)$. 取(1)式中的 $g(y_1, y_2)$为

$$g(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} u + 2 & \sqrt{-m} \\ -\sqrt{-m} & 8k + 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}.$$

5) $m = 12k + 10$ $(k \geqslant 1)$. 取(1)式中的 $g(y_1, y_2)$为

$$g(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} u+2 & 1+\sqrt{-m} \\ 1-\sqrt{-m} & 8k+8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}.$$

6) $m = 12k + 11$ $(k \geqslant 1)$. 取(1)式中的 $g(y_1, y_2)$为

$$g(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} u+2 & 1+\theta_m \\ 1+\bar{\theta}_m & 2k+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}.$$

在 2) ~ 6)中可以证明这样得出的 $h(x_1, \cdots, x_n, y_1, y_2)$满足引理中一切条件. 引理 3.1 证毕.

引理 3.2　设$12k + t$ 不含平方因子,其中 $k \geqslant 1$ 且 $t \in \{1,7\}$. 令 $n = 2, 3$,则存在 R_m 上不可分解的 n 秩正定 Hermite 型 h_n,其判别式 $d(h_n) = 2$, 且 h_n 的矩阵的左上角$(n-1)$阶主子式 $M(h_n) = 3$.

证　当 $m = 12k + 1$ $(k \geqslant 1)$,取 h_2, h_3 的矩阵依次为

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{-m} \\ -\sqrt{-m} & 4k+1 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{c:c} \Gamma_2 & 1+\sqrt{-m} \\ \hdashline 1-\sqrt{-m} & 8k+2 \end{array}\right);$$

当 $m = 12k + 7$ $(k \geqslant 1)$, 依次取 h_2, h_3 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 1+\theta_m \\ 1+\bar{\theta}_m & k+2 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{c:c} \Gamma_2 & 2\theta_m \\ \hdashline 2\bar{\theta}_m & 8k+6 \end{array}\right).$$

则由命题 2.1 和 2.4 可推出本引理.

引理 3.3　设 $m = 12k + t$ 不含平方因子,其中 $k \geqslant 1$,且 $t = 2$ 或 $k \geqslant 0$ 且 $t \in \{5, 10, 7\}$. 设 $n = 3, 4, 6$, 则存在 R_m 上不可分解的n 秩正定 Hermite 型 h_n,它的 $d(h_n) = 2$ 和 $M(h_n)$为大于 1 的奇数,h_n 的矩阵依次是:

当 $m = 12k + 2$

$$\left(\begin{array}{c:c} \Gamma_2 & \sqrt{-m} \\ \hdashline -\sqrt{-m} & 8k+2 \end{array}\right),$$

当 $m = 12k + 5$

$$\left(\begin{array}{c:c} \Gamma_2 & \sqrt{-m} \\ \hdashline -\sqrt{-m} & 8k+4 \end{array}\right),$$

当 $m = 12k + 10$

$$\left(\begin{array}{c:c} \Gamma_2 & 1+\sqrt{-m} \\ \hdashline 1-\sqrt{-m} & 8k+8 \end{array}\right),$$

当 $m = 12k + 11$

$$\left(\begin{array}{c:c} \Gamma_2 & 1-2\theta_m \\ \hdashline 1-2\bar{\theta}_m & 8k+8 \end{array}\right),$$

当 $m = 24k + 14$

$$\left(\begin{array}{c:c} 8j+11 & 1+\sqrt{-m} \\ \hdashline -\sqrt{-m} & \Gamma_3 \end{array}\right),$$

当 $m = 24k + 5$

$$\left(\begin{array}{c:c} 8j+5 & 1+\sqrt{-m} \\ \hdashline 1-\sqrt{-m} & \Gamma_3 \end{array}\right),$$

当 $m = 24k + 22$

$$\left(\begin{array}{c:c} 18j+17 & \sqrt{-m} \\ \hdashline -\sqrt{-m} & \Gamma_3 \end{array}\right),$$

当 $m = 12k + 11$

$$\left(\begin{array}{c:c} 10k+17 & 2(1+\theta_m) \\ \hdashline 2(1+\bar{\theta}_m) & \Gamma_5 \end{array}\right),$$

当 $m = 24k + 2$

$$\left(\begin{array}{c:c} 18j+5 & 2+\sqrt{-m} \\ \hdashline 2-\sqrt{-m} & \Gamma_3 \end{array}\right),$$

当 $m = 24k + 17$

$$\left(\begin{array}{c:c} 80j+57 & 2\sqrt{-m} \\ \hdashline -2\sqrt{-m} & \Gamma_5 \end{array}\right),$$

当 $m = 24k + 10$

$$\left(\begin{array}{c:c} 18j+11 & 2+\sqrt{-m} \\ \hdashline 2-\sqrt{-m} & \Gamma_3 \end{array}\right),$$

对任意无平方因子的 m,存在 14 元不可分解的正定 Hermite R_m 格 $(L,\ h)\cong\left(\begin{array}{c|c}15 & 4\\ \hline 4 & \Gamma_{13}\end{array}\right)$,它的 $d(h)=2$和$M(h)=3$.

以上引理的证明可由命题 2.1, 2.2 和 2.4 导出.

由引理 3.1, 如果取引理 3.2 中的 $h_n(n=2,\ 3)$作为引理 3.1 中的 $f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$,将得出 R_m 上一个不可分解的 $n+2$ 秩正定 Hermite 型,且它的 $d(h_{n+2})=2$ 和 $M(h_{n+2})=3$. 再应用引理 3.1 于 $h_{n+2}(n=2,\ 3)$,即可得出具有上述性质的 R_m 上 $n+4$ 秩正定 Hermite 型. 这样继续下去,最后可导出定理 1.2.

同理,应用引理 3.1 和 3.3 可类似地证明定理 1.3.

4 定理 1.4 的证明

引理 4.1 设$(L,\ h)$为不可分解的 n 秩正定 Hermite R_m 格$(n>1)$,它的判别式 $d(h)=2$,且其矩阵 A 的左上角$(n-1)$阶主子式 $M(h)=2u+1\ (u>0)$,则对每一个 n,存在一个$(n+1)$秩不可分解的正定 Hermite R_m 格$(L',\ h')$,且它的对应 $d(h')=1$ 和 $M(h')=2$.

证 构作一个$(n+1)$秩正定 R_m 格$(L',\ h')$,它在某一基下的矩阵为

$$\left(\begin{array}{c|c}A & 1\\ \hline 1 & u+1\end{array}\right),$$

其中 $0<u\in\mathbb{Z}$. 从而有 $d(h')=\det(B)=2(u+1)=(2u+1)+1$, $M(h')=\det A=2$.

假设存在一个分解

$$h'(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})=g_1(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})+g_2(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1}),$$

这里 g_1 和 g_2 是半正定 Hermite 型. 由于$(L,\ h)\cong A$ 是不可分解的,应用引理 3.1 的证明中的同样的论证可知 g_1 与 g_2 之一,例如 g_2 最多只能含有变量 x_{n+1}. 因此$(L',\ h')$的矩阵 B 有下面形式的分解:

$$\left(\begin{array}{c|c}A & 1\\ \hline 1 & u+1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A & 1\\ \hline 1 & a\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c|c}0 & 0\\ \hline 0 & b\end{array}\right).$$

上式右边的两个矩阵分别属于型 g_1 和 g_2,且 $a+b=u+1$, $0\leqslant a,\ b\in\mathbb{Z}$. 由型 g_1 的半正定性,$2a-(2u+1)\geqslant 0$,从而有 $u+\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant u+1$, 因此 $a=u+1$, $b=0$. 这意味着 $g_2=0$, $h'(x_1,\ \cdots,\ x_n)$是不可分解型. 证毕.

定理 1.4 可由定理 1.3 和 1.2 以及引理 4.1 推出.

5 定理 1.5 的证明

我们需要下面的引理:

引理 5.1 设 p 为有下面性质的最小正整数:对每一个奇数 $q>p$,存在一个不可分解的 q 秩正定 Hermite R_m 格$(K,\ h_q)$,其判别式为 2 且其矩阵的左上角$(q-1)$阶主子式之值为大于 1 的奇数,则对每一个 $g>2$ 和 $n>6g+5+p$,存在一个判别式 $d(h)=g$ 的不可分解的 n 秩正定 Hermite R_m 格$(L,\ h)$.

本引理可由文献[11]定理 5 的证明推出.

定理 1.5 可由引理 5.1(取 $p=2$)和定理 1.3, 1.2 导出.

参　考　文　献

1 Mordell L J. The representation of a definite quadratic form as a sum of two others. Ann of Math, 1937, 38: 754 ~ 757

2 Erdös P, Ko Chao. On definite quadratic forms, which are not the sum of two definite or semidefinite forms. Acta Arith, 1939, 3: 102 ~ 122

3 Erdös P, Ko Chao. Some results on definite quadratic forms. J London Math Soc, 1938, 13: 217 ~ 224

4 朱福祖. 不可分解的正定幺模二次型的构作. 中国科学, A 辑, 1986, (7): 690 ~ 700

5 朱福祖. 二次型的不可分解性与不可分性. 中国科学, A 辑, 1986, ((10): 1 037 ~ 1 044

6 Pleskin W. Additively indecomposable positive integral quadratic forms. J Number Theory, 1994, 47: 273 ~ 283

7 Zhu Fuzu. On the construction of positive definite indecomposable unimodular even Hermitian forms. J Number Theory, 1995, 50: 318 ~ 322

8 Zhu Fuzu. On indecomposable definite unimodular Hermitian forms. Acta Math Sinica (New Ser), 1994, 10(2): 113 ~ 120

9 O'Meara O T. Introduction to Quadratic Forms. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1973

10 Zhu Fuzu. Construction of indecomposable definite Hermitian forms. Chinese Ann of Math, Ser B, 1994, 15: 349 ~ 360

11 Zhu Fuzu. On nondecomposable Hermitian forms over Gaussian domain. Acta Math Sinica (New Ser), 1998, 14: 447 ~ 456