递归可枚举 fuzzy 集合的投影定理

蔡 茂 华

(中国科学院计算技术研究所，北京)

$\boldsymbol{B} = \langle B, \vee, \wedge, \neg \rangle$ 叫做上完备的递归布尔代数，若它的域 B 是自然数集 N 的一个递归子集，它的运算 $\vee$(并)，$\wedge$(交)，$\neg$(补)为部分递归函数，且在 B 的元素的自然偏序之下，$\boldsymbol{B}$ 的任一子集合 X 在 $\boldsymbol{B}$ 中有上确界，记为 $\vee X$.

$\boldsymbol{B}$ 的元素用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}$ 表示.

我们的 fuzzy 集合(关系)，均是隶属度函数为从 N 到 $\boldsymbol{B}$(从 $N \times \cdots \times N$ 到 $\boldsymbol{B}$) 的函数的集合(关系). 用大写字母 $A, B, C, \cdots (R_n)$ 表示 fuzzy 集合(关系)，$\mu_A(\mu_{R_n})$ 表示它们的隶属度函数，S_A、(S_{R_n}) 表示它们的支集，P_A、(P_{R_n}) 表示它们的主部，即 $\mu_A \upharpoonright S_A (\mu_{R_n} \upharpoonright S_{R_n})$.

定义 1 n 元 fuzzy 关系 R_n 叫做 $n+1$ 元 fuzzy 关系 R_{n+1} 沿第 j 轴的投影(记为$(\exists x_j) R_{n+1}$. 若对于自然数的任意 n 元有序组 $\langle x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n \rangle$，有

$$\mu_{R_n}(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n) = \bigvee_{x_j \in N} \mu_{R_{n+1}}(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n).$$

定义 2 n 元 fuzzy 关系 R_n 叫做沿第 j 轴为常值的，若对于任意 $n-1$ 元有序组

$$\langle x_1^0, \cdots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \cdots, x_n^0 \rangle, \ \boldsymbol{R}_n(x_1^0, \cdots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \cdots, x_n^0)$$

为关于 x_j 的常值 fuzzy 集合，即对任意 $x_j \in S_{R_n(x_1^0, \cdots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \cdots, x_n^0)}$，$\mu_{R_n}$ 恒为某不等于 $\boldsymbol{0}$ 的元素 $\boldsymbol{a} \in \mathscr{B}$. 这时，第 j 轴叫做 R_n 的常值轴，当不需明确指出 R_n 沿第 j 轴为常值时，又笼统地称 R_n 为弱常值关系.

定理 1 设 n 元 fuzzy 关系 R_n 递归可枚举，那么，存在一个 $n+1$ 元的递归弱常值关系 R_{n+1}，使得 R_n 为 R_{n+1} 沿着它的常值轴的一个投影. 特别是可使 R_{n+1} 的第 $n+1$ 轴为常值轴，从而 $R_n = (\exists x_{n+1}) R_{n+1}$.

定理 1 的证明需要下述引理.

引理 以递归关系为支集的递归可枚举 fuzzy 关系必定递归.

证 设 R_n 为递归可枚举的 fuzzy 关系，递归函数 e 枚举了 $\mu_{R_n} \upharpoonright S_{R_n}$，其中 S_{R_n} 为 R_n 的支集且递归，于是当 $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \notin S_{R_n}$ 时，$\mu_{R_n}(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{0}$，当 $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in S_{R_n}$ 时，必有自然数 t_0 使得 $e(t_0) = \langle x_1, \cdots, x_n, \mu_{R_n}(x_1, \cdots, x_n) \rangle$，从而 $\mu_{R_n}(x_1, \cdots, x_n) = \pi_2(e(t_0))$. 故 R_n 递归.

定理 1 的证明. 设 R_n 递归可枚举，则 S_{R_n} 亦递归可枚举，由通常递归论中的投影定理，有递归的 $n+1$ 元关系 H 使得

$$S_{R_n} = \{\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \mid (\exists x_{n+1}) H(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})\}.$$

本文 1982 年 4 月 2 日收到.

以H为支集定义 $n+1$ 元 fuzzy 关系如下:

对任意 $\langle x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}\rangle\in H$, $\mu_{K_{n+1}}(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})=\mu_{R_n}(x_1,\cdots,x_n)$, 否则,

$$\mu_{K_{n+1}}(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})=0.$$

显然, K_{n+1} 沿第 $n+1$ 轴常值且 $R_n=(\exists x_{n+1})K_{n+1}$. 故只需证明 K_{n+1} 递归.

设 $h(x)$、$f_1(x)$ 分别为 H、R_n 的枚举函数, π_1、π_2 为能行的配对左、右函数,定义函数 f 为:

$$f(x)=\langle h(x),\pi_2(f_1(\min_y(\pi_1(f(y))=(h(x))'))))\rangle,$$

其中 $(h(x))'$ 为从 $n+1$ 元有序组 $h(x)$ 中去掉第 $n+1$ 个元素所得的 n 元有序组,它显然是一个递归的运算.

显然 $f(x)$ 为递归函数, 枚举了 K_{n+1} 的主部. K_{n+1} 递归可枚举, 其支集H递归, 由引理, K_{n+1} 递归.

定理 2 若 R_n 是递归可枚举的弱常值关系,那么,沿着 R_n 的任一常值轴的投影是递归可枚举的 fuzzy 关系. 特别, 若 R_{n+1} 沿第 $n+1$ 轴为常值, 则 $(\exists x_{n+1})R_{n+1}$ 为递归可枚举的 fuzzy 关系.

证 不妨设 R_{n+1} 沿第 $n+1$ 轴(常值轴)作投影,并记投影所得之关系为 R_n,这时

$$\langle x_1,\cdots,x_n,b\rangle\in P_{R_n}\Longleftrightarrow(\exists x_{n+1})(\langle x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},b\rangle\in P_{R_{n+1}}).$$

因 $P_{R_{n+1}}$ 是递归可枚举的 $n+2$ 元关系,故由通常递归论中的投影定理,存在 $n+3$ 元的递归关系Q使得:

$$\langle x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},b\rangle\in P_{R_{n+1}}\Longleftrightarrow(\exists y)(\langle x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},y,b\rangle\in Q)$$

故

$$\begin{aligned}\langle x_1,\cdots,x_n,b\rangle\in P_{R_n}&\Longleftrightarrow(\exists x_{n+1})(\exists y)(\langle x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},y,b\rangle\in Q)\\&\Longleftrightarrow(\exists z)(Q(x_1,\cdots,x_n,\pi_1(z),\pi_2(z),b))\\&\Longleftrightarrow(\exists z)Q_1(x_1,\cdots,x_n,z,b).\end{aligned}$$

其中 Q_1 为 $n+2$ 元递归关系,故 P_{R_n} 从而 R_n 递归可枚举.

推论 fuzzy 关系 R_n 递归可枚举 $\Longleftrightarrow R_n$ 是某弱常值递归关系沿着它的常值轴的一个投影.

注: 定理 1、定理 2 和它们的推论显然对任意递归布尔代数 $\boldsymbol{B}$ 成立, 只需相应地定义投影概念(即只对弱常值关系沿常值轴定义其投影)即可.