



Hall 多项式

献给刘绍学教授 90 华诞

邓邦明^{1*}, 王新甜²

1. 清华大学丘成桐数学科学中心, 北京 100084;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: bmdeng@math.tsinghua.edu.cn, wangxintian0916@126.com

收稿日期: 2018-02-12; 接受日期: 2018-06-08; 网络出版日期: 2018-10-15; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11331006 和 11671024) 资助项目

摘要 作为 Hall 代数的结构常数, Hall 数和 Hall 多项式与对称群的表示和量子群的结构有紧密联系. 本文首先引入经典 Hall 代数和 Hall 多项式的概念, 并阐述其与对称函数的联系. 其次, 定义有限域上代数的 Ringel-Hall 代数, 并简述其与量子群的关系. 最后, 本文在 Dynkin 箭图和仿射箭图情形下, 讨论 Hall 多项式的存在性.

关键词 Hall 代数 Hall 多项式 量子群

MSC (2010) 主题分类 16G20, 17B37, 20G05

1 引言

Steinitz^[1] 和 Hall^[2] 分别于 1901 年和 1959 年独立地在以有限 Abel p -群的同构类为基的自由 Abel 群上定义了一个代数结构, 即经典 Hall 代数, 其结构常数由具有某些性质的子群个数给出. 而且, 他们指出了这些结构常数可以表示为关于素数 p 的整系数多项式, 即经典 Hall 多项式. Hall 进一步确定了 Hall 多项式的次数, 并证明了它们的首项系数等于相应的 Littlewood-Richardson 系数. 因此, 经典 Hall 代数和 Hall 多项式理论与对称群和一般线性群的表示理论有深刻的联系, 详细内容参见文献 [3, 4].

受到 Steinitz 和 Hall 工作的启发, Ringel^[5, 6] 于 1990 年引入了有限环 (finitary ring) 的 Hall 代数的概念, 称为 Ringel-Hall 代数. Ringel 的一个重要发现是, 当 A 是一个箭图 Q 在有限域上的路代数时, 单 A -模在 Ringel-Hall 代数中满足一个基本关系, 它类似于量子群的定义关系—量子 Serre 关系. 通过适当调整 Ringel-Hall 代数的乘法, Ringel 证明了当 Q 是一个 Dynkin 箭图时, 其 Ringel-Hall 代数同构于相应于 Q 的量子包络代数的正部分. 通过引入余乘运算, Green^[7] 证明了对于任意不含圈的箭图 Q , 其 Ringel-Hall 代数的合成子代数都同构于相应于 Q 的量子包络代数的正部分. 因此,

英文引用格式: Deng B M, Wang X T. Hall polynomials (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1535–1550, doi: 10.1360/N012018-00032

Ringel-Hall 代数建立了有限维代数表示理论与量子群结构理论的联系, 相关内容可参见文献 [8, 第 IV 部分] 和 [9].

类似于经典情形, Ringel 证明了当 Q 是一个 Dynkin 箭图时, 其 Ringel-Hall 代数的结构常数是关于基域元素个数的多项式, 也称作 Hall 多项式. 利用这类多项式, 我们可以直接定义 Q 的 generic Ringel-Hall 代数. 进一步, Ringel 证明了将 Hall 多项式的变元特殊化到 1, Ringel-Hall 代数恰为相应于 Q 的复半单李代数的正或负部分的包络代数. 此时, Q 的所有不可分解模张成一个李子代数, 并且它给出了 Q 对应的复半单李代数正或负部分的实现. 因此, Ringel-Hall 代数的结构常数 (Hall 数和 Hall 多项式) 在李代数和量子群理论中有着重要应用.

本文主要介绍经典的 Hall 代数和 Hall 多项式, 并在 Dynkin 箭图和仿射箭图情形下, 讨论 Hall 多项式的存在性. 文中涉及有限维代数的基本概念与性质, 参见文献 [8, 10, 11].

2 经典 Hall 代数与对称函数环

设 $\mathcal{O}$ 是一个 (完备) 离散赋值环且 $\mathfrak{m}$ 和 $k := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ 分别是它的极大理想和剩余类域. 本节总假定 k 是一个有限域. 例如, 设 p 是一个素数. 有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的形式幂级数环 $\mathbb{F}_p[[T]]$ 和 p -进制整数环 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 是两类典型的离散赋值环, 其剩余类域均是 $\mathbb{F}_p$. 本节将定义 $\mathcal{O}$ 的 Hall 代数 $H(\mathcal{O})$ 和 Hall 多项式, 并且指出 $H(\mathcal{O})$ 与对称函数环的关系. 本节涉及的内容及证明细节可参见文献 [4, 第 I-III 章].

一个递减的正整数序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ 称为一个划分 (partition), 并且用 $\mathcal{P}$ 记所有划分构成的集合. 设 M 是一个 $\mathcal{O}$ -模, 用 $[M]$ 记 M 的同构类. 如果 M 是一个有限 $\mathcal{O}$ -模, 即它有一个有限的合成列, 那么用 $\ell(M)$ 记 M 的长度. 众所周知, 在同构意义下, 每一个有限 $\mathcal{O}$ -模 M 具有形式

$$M = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{\lambda_i},$$

其中 $r \geq 0$, λ_i 都是正整数. 将这些正整数按照降序排列, 不妨设

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r.$$

于是得到了一个划分 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, 称为 M 的型 (type). 于是, M 的长度 $\ell(M)$ 恰为它的型 λ 的权

$$|\lambda| := \sum_{i=1}^r \lambda_i.$$

反过来, 对于 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{P}$, 记

$$M(\lambda) = M_{\mathcal{O}}(\lambda) = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{\lambda_i}.$$

综上所述, 对应 $\lambda \mapsto [M(\lambda)]$ 诱导了从 $\mathcal{P}$ 到所有有限 $\mathcal{O}$ -模同构类的集合的一个双射. 为了叙述方便起见, 有时将划分 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ 等同于无穷序列

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0, \dots).$$

特别地, 记 $\emptyset = (0, 0, \dots)$, 称为空划分 (empty partition), 它对应于 $\mathcal{O}$ 的零模.

给定 $\lambda, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)} \in \mathcal{P}$ ($t \geq 1$), 用 $F_{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)}}^\lambda(\mathcal{O})$ 记 $M_{\mathcal{O}}(\lambda)$ 的如下子模链的个数:

$$M_{\mathcal{O}}(\lambda) = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_{t-1} \supseteq M_t = 0$$

满足对于任意 $1 \leq i \leq t$ 有 $M_{i-1}/M_i \cong M_{\mathcal{O}}(\mu^{(i)})$, 称这个非负整数为 Hall 数 (Hall number). 根据定义, $F_{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)}}^\lambda(\mathcal{O}) \neq 0$ 的一个必要条件是

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^t |\mu^{(i)}|.$$

特别地, 当 $t = 2$ 时, 即对于 $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}$, 有

$$F_{\mu, \nu}^\lambda(\mathcal{O}) = |\{X \subseteq M_{\mathcal{O}}(\lambda) \mid X \cong M_{\mathcal{O}}(\nu), M(\lambda)/X \cong M_{\mathcal{O}}(\mu)\}|,$$

并且 $F_{\mu, \nu}^\lambda(\mathcal{O}) \neq 0$ 当且仅当存在短正合列

$$0 \longrightarrow M_{\mathcal{O}}(\nu) \longrightarrow M_{\mathcal{O}}(\lambda) \longrightarrow M_{\mathcal{O}}(\mu) \longrightarrow 0.$$

进一步, 对于每个 $1 \leq i \leq t$, 有

$$F_{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)}}^\lambda(\mathcal{O}) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}} F_{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(i-1)}, \nu}^\lambda(\mathcal{O}) F_{\mu^{(i)}, \dots, \mu^{(t)}}^\nu(\mathcal{O}), \quad (2.1)$$

其中等式右边对于所有满足条件 $|\nu| = |\mu^{(i)}| + \dots + |\mu^{(t)}|$ 的划分 ν 求和.

定义 2.1 设 $H(\mathcal{O})$ 是以集合 $\{u_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ 为基的自由 Abel 群 (等价地, 自由 $\mathbb{Z}$ -模), 即

$$H(\mathcal{O}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{Z} u_\lambda.$$

在 $H(\mathcal{O})$ 上定义乘法

$$u_\mu u_\nu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} F_{\mu, \nu}^\lambda(\mathcal{O}) u_\lambda, \quad \forall \mu, \nu \in \mathcal{P}.$$

根据 (2.1) 可知, $H(\mathcal{O})$ 是一个结合代数, 其单位元为 $1 = u_\emptyset$, 称它为 $\mathcal{O}$ 的 Hall 代数¹⁾.

注 2.1 设 E 是 $\mathcal{O}$ -模 $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ 的内射包. 根据文献 [4, 第 2 章第 1 节], E 定义了有限 $\mathcal{O}$ -模范畴的一个对偶 $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(-, E)$, 并且对于有限 $\mathcal{O}$ -模 M , 有

$$M \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}}(M, E).$$

由此导出, 对于 $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}$, 有 $F_{\mu, \nu}^\lambda(\mathcal{O}) = F_{\nu, \mu}^\lambda(\mathcal{O})$. 因此, $H(\mathcal{O})$ 是一个交换代数.

设 M 是一个有限 $\mathcal{O}$ -模. 若 $\mathfrak{m}M = 0$, 则称 M 是初等的 (elementary), 等价地, M 的型为

$$(1^r) := (\underbrace{1, \dots, 1}_r),$$

其中 $r \geq 0$. 此时, M 可看作 k 上的 r 维向量空间.

命题 2.1^[2] 作为 $\mathbb{Z}$ -代数, $H(\mathcal{O})$ 由元素 $u_{(1^r)}$ ($r \geq 1$) 生成. 而且, $u_{(1^r)}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上是代数无关的. 特别地, $H(\mathcal{O})$ 同构于 $\mathbb{Z}$ 上无限个不定元的多项式环.

1) Hall 代数与下面即将定义的 Hall 多项式的名词最早由 Green^[12] 给出.

给定 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) \in \mathcal{P}$, 记 $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_s)$ 是 λ 的共轭 (conjugate), 即

$$\lambda'_i = |\{j \geq 1 \mid \lambda_j = i\}|, \quad \forall i \geq 1.$$

同时定义

$$n(\lambda) = \sum_{i=1}^t (i-1)\lambda_i = \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda'_i(\lambda'_i - 1)}{2}.$$

定理 2.1 ^[2] 给定 $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}$, 存在整系数多项式 $\varphi_{\mu, \nu}^\lambda(\mathbf{q}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ 满足

$$\varphi_{\mu, \nu}^\lambda(|k|) = F_{\mu, \nu}^\lambda(\mathcal{O}),$$

其中 $\mathcal{O}$ 是任意一个离散赋值环且它的剩余类域 $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ 是有限的. 进一步,

$$\varphi_{\mu, \nu}^\lambda(\mathbf{q}) = c_{\mu, \nu}^\lambda \mathbf{q}^{n(\lambda) - n(\mu) - n(\nu)} + \text{低次项},$$

其中 $c_{\mu, \nu}^\lambda$ 是 Littlewood–Richardson 系数.

上述定理中的多项式 $\varphi_{\mu, \nu}^\lambda(\mathbf{q})$ 称为对应于划分 λ, μ 和 ν 的 Hall 多项式. 递归地, 可以证明对于给定的 $\lambda, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)} \in \mathcal{P}$, 存在整系数多项式 $\varphi_{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)}}^\lambda(\mathbf{q}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ 满足

$$\varphi_{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)}}^\lambda(|k|) = F_{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)}}^\lambda(\mathcal{O}),$$

其中 $\mathcal{O}$ 是任意一个离散赋值环且它的剩余类域 $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ 是有限的.

例 2.1 下面给出两类 Hall 多项式的例子. 为此, 先引入一些记号. 对于正整数 n , 定义

$$[n] = \frac{\mathbf{q}^n - 1}{\mathbf{q} - 1} = \mathbf{q}^{n-1} + \dots + \mathbf{q} + 1 \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}].$$

进一步, 令 $[n]! = [1][2] \cdots [n]$, 并且规定 $[0]! = 1$. 对于 $n \geq 1$ 和 $0 \leq m \leq n$, 定义

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \frac{[n]!}{[m]![n-m]!} = \frac{\prod_{i=0}^{m-1} (\mathbf{q}^{n-i} - 1)}{\prod_{i=1}^m (\mathbf{q}^i - 1)} \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}].$$

(1) 设 $n \geq 1$ 且 $0 \leq m \leq n$. 通过计算可得

$$\varphi_{(1^m), (1^{n-m})}^{(1^n)}(\mathbf{q}) = \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right].$$

(2) 设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots) \in \mathcal{P}$, $m \geq 1$, 满足 $|\lambda| = |\mu| + m$. 于是,

$$\varphi_{\mu, (1^m)}^\lambda(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^{n(\lambda) - n(\mu) - \frac{m(m-1)}{2}} \prod_{i \geq 1} \left[\begin{matrix} \lambda'_i - \lambda'_{i+1} \\ \lambda'_i - \mu'_i \end{matrix} \right]_{\mathbf{q}^{-1}},$$

其中 $\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_{\mathbf{q}^{-1}}$ 记在多项式 $[n]$ 中用 $\mathbf{q}^{-1}$ 代替 $\mathbf{q}$ 得到的关于 $\mathbf{q}^{-1}$ 的多项式.

根据定理 2.1, 我们可以利用 Hall 多项式的存在性在整环 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ 上定义 Hall 代数 $H_{\mathbf{q}}$. 根据定义可知, $H_{\mathbf{q}}$ 是以 $\{u_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ 为基的自由 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ -模, 其基元素的乘法为

$$u_\mu u_\nu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \varphi_{\mu, \nu}^\lambda(\mathbf{q}) u_\lambda, \quad \forall \mu, \nu \in \mathcal{P}.$$

设 $\Gamma_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ 是关于不定元 $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 1$) 的整系数多项式环. 于是对称群 $\mathfrak{S}_n$ 通过交换变元作用在 Γ_n 上. 设

$$\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

是由对称多项式构成的 Γ_n 的子环. 众所周知, Λ_n 是关于初等对称多项式 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ 的多项式环, 其中

$$\sigma_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_r}, \quad \forall 1 \leq r \leq n.$$

设 $m \geq n$. 考虑环同态

$$\rho_{m,n} : \Gamma_m = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] \longrightarrow \Gamma_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

满足

$$\rho_{m,n}(x_i) = \begin{cases} x_i, & \text{若 } 1 \leq i \leq n, \\ 0, & \text{若 } n+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

于是, $\rho_{m,n}$ 的限制诱导一个环同态

$$\rho_{m,n} : \Lambda_m \rightarrow \Lambda_n.$$

易见, $(\Lambda_n, \rho_{m,n})$ 构成一个逆向系统, 记 Λ 是相应的逆向极限, 即

$$\Lambda = \varprojlim_n \Lambda_n.$$

称 Λ 为对称函数环 (ring of symmetric functions).

定理 2.2 ^[2] 设 $\mathcal{O}$ 是一个 (完备) 离散赋值环且它的剩余类域 $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{F}_q$, 则存在一个 $\mathbb{Q}$ -代数的同构

$$H(\mathcal{O}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad u_{(1^r)} \longmapsto q^{-r(r-1)/2} e_r,$$

其中

$$e_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}.$$

在上述同构中, $H(\mathcal{O})$ 的基元素 u_λ 与 Hall-Littlewood 多项式相对应.

注 2.2 (1) Hall ^[2] 只给出了 Hall 理论的一个概述, 但并没有给出详尽的证明 (相关的证明在他的一个未发表的工作中). 在文献 [4, 第 II 章] 中, Macdonald 利用 Littlewood-Richardson 法则给出了定理 2.1 的证明, 其方法依赖于由 Green ^[12] 和他的学生 Klein ^[13, 14] 建立的有限 $\mathcal{O}$ -子模与 Littlewood-Richardson 序列的对应关系. 定理 2.1 的一个较为简洁的证明由 Zelevinsky 给出, 参见文献 [4, 第 II 章附录]. 关于 Hall 多项式的计算, 可参见文献 [12–19].

(2) 实际上, Steinitz ^[1] 早于 1901 年已经给出了 Hall 代数和 Hall 多项式的定义, 指出了其与 Schur 函数的联系, 并猜测定理 2.1 是成立的. 然而, 他既没有给出证明也没指出证明的方法. Steinitz 的工作一直未引起人们的注意, 直到 1982 年, Johnsen ^[20] 将他的工作重新带入人们的视线.

(3) Zelevinsky ^[21] 在 Hall 代数 $H(\mathcal{O})$ 上定义了余乘运算, 由此得到了其上的一个 Hopf 代数结构.

3 Hall 数和 Ringel-Hall 代数

本节将定义有限域上代数的有限维模的 Hall 数和 Ringel-Hall 代数, 并且简述其与量子群的关系.

设 $k = \mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的有限域, A 是一个 $\mathbb{F}_q$ -代数. 用 $A\text{-mod}$ 记所有有限维 A -模构成的范畴. 对于 $M \in A\text{-mod}$, 用 $[M]$ 记 M 的同构类.

为了简单起见, 假设 A 是一个有限生成 $\mathbb{F}_q$ -代数. 类似于上一节中经典 Hall 代数情形, 对 $A\text{-mod}$ 中的对象 $M, N_1, \dots, N_t$, 令 $F_{N_1, \dots, N_t}^M$ 为 M 的满足条件 $M_{i-1}/M_i \cong N_i$ ($\forall 1 \leq i \leq t$) 的子模链

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_{t-1} \supseteq M_t = 0$$

的个数. 由于 M 是一个有限集, 所以, $F_{N_1, \dots, N_t}^M$ 是一个非负整数, 称为相应于 $M, N_1, \dots, N_t$ 的 Hall 数. 特别地, 如果 $t = 2$, 那么 F_{N_1, N_2}^M 是 M 的满足 $X \cong N_2$ 且 $M/X \cong N_1$ 的子模 X 的个数. 类似于 (2.1), 对于 $1 \leq i \leq t$, 有

$$F_{N_1, \dots, N_t}^M = \sum_{[X]} F_{N_1, \dots, N_{i-1}, X}^M F_{N_i, \dots, N_t}^X, \quad (3.1)$$

其中等式右边对所有 A -模 X 的同构类 $[X]$ 求和. 注意到, 因为 A 是有限生成的, 所以, 这个求和项实质上是一个有限和.

引理 3.1 ^[22, 23] 设 Z, X 和 Y 是 $A\text{-mod}$ 中的对象, 则

$$F_{X,Y}^Z = \frac{|\text{Ext}_A^1(X, Y)_Z| \cdot |\text{Aut}(Z)|}{|\text{Aut}(X)| \cdot |\text{Aut}(Y)| \cdot |\text{Hom}_A(X, Y)|},$$

其中 $\text{Ext}_A^1(X, Y)_Z$ 表示 $\text{Ext}_A^1(X, Y)$ 中形如 $0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$ 的短正合列的等价类构成的集合, 且对于 M 取 X, Y 或 Z , $\text{Aut}(M)$ 记 M 的自同构群.

给定有限生成 $\mathbb{F}_q$ -代数 A , 设 $H^\circ(A)$ 是以有限维 A -模同构类 $\{u_{[M]} \mid M \in A\text{-mod}\}$ 为基的自由 Abel 群. 在 $H^\circ(A)$ 上定义乘法运算 $\diamond$ 如下:

$$u_{[M]} \diamond u_{[N]} = \sum_{[L]} F_{M,N}^L u_{[L]}, \quad \forall M, N \in A\text{-mod}. \quad (3.2)$$

由于 A 是有限生成的, 上式右边的求和是有限的, 从而定义是合理的. 而且, 对 $A\text{-mod}$ 中的对象 X, Y 和 Z , 由 (3.1) 和 (3.2) 得到

$$(u_{[X]} \diamond u_{[Y]}) \diamond u_{[Z]} = \sum_{[L]} F_{X,Y,Z}^L u_{[L]} = u_{[X]} \diamond (u_{[Y]} \diamond u_{[Z]}),$$

即乘法 $\diamond$ 是结合的. 另外, 易见 $u_{[0]}$ 是 $H^\circ(A)$ 的单位元, 这里 0 表示零模. 综上得到, $H^\circ(A)$ 是一个含有单位元的结合 $\mathbb{Z}$ -代数, 称为 A 的整 Hall 代数 (integral Hall algebra) 或 Ringel-Hall 代数.

注 3.1 事实上, Ringel ^[24] 对于更一般的有限环 (finitary ring) 定义了它们的 Hall 代数.

现在考虑 A 是箭图的路代数情形. 设 $Q = (I = Q_0, Q_1)$ 是一个有限箭图, 其中 $I = Q_0$ 和 Q_1 分别是点集和箭向集, 且它们都是有限集合. 对于每个箭向 $\rho \in Q_1$, 分别用 $t\rho$ 和 $h\rho$ 记 ρ 的起点 (tail) 和终点 (head), 即

$$\rho : t\rho \longrightarrow h\rho.$$

设 $A = \mathbb{F}_q Q$ 是 Q 在有限域 $k = \mathbb{F}_q$ 上的路代数. 于是, A 是一个有限生成 $\mathbb{F}_q$ -代数, 并且 A 是有限维的当且仅当 Q 不含有向循环.

众所周知, 有限维 A -模范畴 $A\text{-mod}$ 等同于 Q 在 k 上的有限维表示 $V = (V_i, V_\rho)$ 构成的范畴 $\text{Rep}_k Q$. 对于 Q 的每个表示 $V = (V_i, V_\rho)$, 向量

$$\dim V := (\dim V_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}I$$

称为 V 的维数向量, 并且求和 $\sum_{i \in Q_0} \dim V_i$ 称为 V 的维数. 表示 $V = (V_i, V_\rho)$ 称为幂零的, 如果存在一个正整数 n (依赖于 V) 使得, 对于 Q 中每个长度为 $r \geq n$ 的道路 $\rho_r \cdots \rho_1$, 有 $V_{\rho_r} \cdots V_{\rho_1}: V_{t\rho_1} \rightarrow V_{h\rho_r}$ 是零映射. 另外, 对每个 $i \in I$, 我们可自然地定义一个一维表示 $S_i = (V_j, V_\rho)$ 使得 $V_i = k$, $V_j = 0$ ($\forall j \neq i \in I$) 和 $V_\rho = 0$ ($\forall \rho \in Q_1$). 显然, S_i 是一个单表示 (不可约表示), 并且 S_i 是幂零的.

例 3.1 (1) 设 Q 是由一个顶点 a 和一个圈 (loop) ρ 构成的箭图, 即 Q 如下:



于是 Q 的路代数 $A = \mathbb{F}_q Q$ 可看作以 ρ 作为变元的一元多项式环. 可以证明, $H^\circ(A)$ 是一个交换代数, 并且 Q 的所有幂零表示的同构类构成 $H^\circ(A)$ 的一个子代数, 记作 $H_0^\circ(A)$. 进一步, 若 $\mathcal{O}$ 是一个 (完备) 离散赋值环且其剩余类域 $k \cong \mathbb{F}_q$, 则有 $\mathbb{Z}$ -代数同构

$$H(\mathcal{O}) \cong H_0^\circ(A).$$

(2) 设 A 是箭图



的路代数 $\mathbb{F}_q Q$, 则 A 同构于 $\mathbb{F}_q$ 上 2×2 的下三角矩阵代数. 设 S_1 和 S_2 是分别对应于顶点 1 和 2 的单 A -模, 则 S_2 是投射模. 设 P 是 S_1 的投射盖. 由定义知,

$$\begin{aligned} u_{[S_1]} \diamond u_{[S_2]} &= u_{[S_1 \oplus S_2]} + u_{[P]}, \\ u_{[S_2]} \diamond u_{[S_1]} &= u_{[S_1 \oplus S_2]}. \end{aligned}$$

因此,

$$u_{[S_1]} \diamond u_{[S_2]} \neq u_{[S_2]} \diamond u_{[S_1]},$$

即 $H^\circ(A)$ 是不交换的. 因此, 不同于经典 Hall 代数情形, Ringel-Hall 代数 $H^\circ(A)$ 通常是不交换的.

下面通过适当调整乘法, 定义箭图路代数的扭 Ringel-Hall 代数. 设 $Q = (I, Q_1)$ 是一个有限箭图, 其 Euler 型指的是双线性型 $\langle -, - \rangle: \mathbb{Z}I \times \mathbb{Z}I \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i \in I} x_i y_i - \sum_{\rho \in Q_1} x_{t\rho} y_{h\rho}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_i), \quad \mathbf{y} = (y_i) \in \mathbb{Z}I.$$

于是, 对于 Q 的任意两个表示 V 和 W , 有

$$\langle \dim V, \dim W \rangle = \dim \text{Hom}_A(V, W) - \dim \text{Ext}_A^1(V, W). \quad (3.3)$$

箭图 Q 的 Euler 型的对称化

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

称为 Q 的对称 Euler 型. 易证

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T C_Q \mathbf{y},$$

其中 $\mathbb{Z}I$ 中的元素看成列向量, $\mathbf{x}^T$ 表示 $\mathbf{x}$ 的转置, $C_Q = (c_{i,j})_{i,j \in I}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个对称 $|I| \times |I|$ 阶矩阵, 其中

$$c_{i,j} = \begin{cases} 2 - 2|\{i \text{ 点处的圈}\}|, & \text{如果 } i = j, \\ -|\{i \text{ 和 } j \text{ 之间的箭向}\}|, & \text{如果 } i \neq j. \end{cases}$$

根据定义可知, C_Q 与 Q 的箭向的定向无关. 如果 Q 不包含圈, 那么 C_Q 是一个对称广义 Cartan 矩阵. 反之, 任何对称广义 Cartan 矩阵都可以以这种方式实现.

下面总假定 $k = \mathbb{F}_q$ 是一个含有 q 个元素的有限域且令 $v_q = \sqrt{q}$.

定义 3.1 ^[5] 路代数 $A = kQ$ 的 (扭) Ringel-Hall 代数 $\mathcal{H}(A)$ 是以

$$\{u_{[M]} \mid M \in A\text{-mod} = \text{Rep}_k Q\}$$

为基的复向量空间, 并且乘法定义为

$$\begin{aligned} u_{[M]} u_{[N]} &:= v_q^{\langle \dim M, \dim N \rangle} u_{[M]} \diamond u_{[N]} \\ &= v_q^{\langle \dim M, \dim N \rangle} \sum_{[L]} F_{M,N}^L u_{[L]}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $M, N \in A\text{-mod}$. 记 $\mathcal{C}(A)$ 是 $\mathcal{H}(A)$ 的由 $u_i = u_{[S_i]}$ ($i \in I$) 生成的子代数, 称为 A 的合成子代数.

设 $\mathbb{Z}[\mathbf{v}, \mathbf{v}^{-1}]$ 是关于不定元 $\mathbf{v}$ 的整系数 Laurent 多项式环. 对于 $0 \leq t \leq n$, 令

$$\begin{aligned} [n] &= \frac{\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{-n}}{\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}} = \mathbf{v}^{n-1} + \mathbf{v}^{n-3} + \cdots + \mathbf{v}^{-n+1}, \\ [n]! &= \prod_{r=1}^n [r], \quad \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[t]![n-t]!}. \end{aligned}$$

给定 $c \in \mathbb{C}$ 和 $f(\mathbf{v}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{v}, \mathbf{v}^{-1}]$, 记 $f(\mathbf{v})_c = f(c) \in \mathbb{C}$.

定理 3.1 ^[5] 设 $i \neq j \in I$. 如果 $c_{i,i} = 2$, 即 Q 在点 i 处没有圈, 那么,

$$\sum_{s+t=1-c_{i,j}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-c_{i,j} \\ s \end{bmatrix}_{v_q} u_i^s u_j u_i^t = 0 \quad (3.5)$$

在 $\mathcal{H}(kQ)$ 中成立.

现在设 Q 不含圈. 因此, $C_Q = (c_{i,j})_{i,j \in I}$ 是一个对称广义 Cartan 矩阵. 设 $\mathbf{U}_{v_q}(C_Q)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上相应于 C_Q 的量子包络代数 (quantum enveloping algebra). 设 $\mathbf{U}^+$ 是 $\mathbf{U}_{v_q}(C_Q)$ 的正部分, 即由 E_i ($i \in I$) 生成的子代数. 于是, 量子 Serre 关系为 $\mathbf{U}^+$ 的生成关系. 根据 Ringel^[5] 和 Green^[7] 的工作, 我们下面的定理.

定理 3.2 保持上面的记号. 存在一个 $\mathbb{C}$ -代数同构

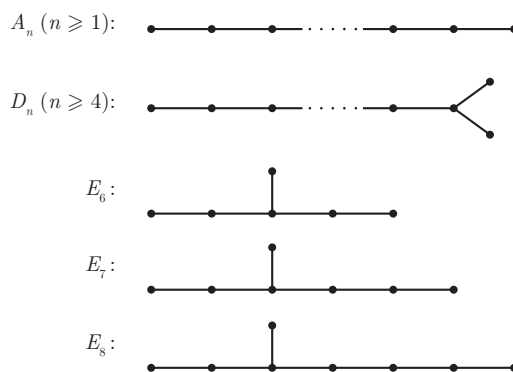
$$\Psi: \mathbf{U}^+ \longrightarrow \mathcal{C}(kQ), \quad E_i \longmapsto u_i, \quad \forall i \in I.$$

注 3.2 (1) 上述的定理表明, 箭图 Q 的表示范畴蕴含着量子包络代数正部分 U^+ 的结构. 因此, 箭图表示范畴的同调、组合以及表示簇的几何性质等可以用来研究量子群的结构与表示.

(2) 受 Ringel 工作的启发, Lusztig^[25,26] 利用箭图表示模空间的反常层 (perverse sheaf) 理论得到了量子群的一个几何构造. 特别地, Lusztig 几何方法给出了量子群的典范基, 其在表示论中有着重要且广泛的应用.

4 Dynkin 箭图的 Hall 多项式

本节假定 Q 是一个 Dynkin 箭图, 即 Q 的底图具有如下形式:



设 $\mathfrak{g}_Q$ 是相应于箭图 Q 的复半单李代数且 $\Delta(Q)$ 是 $\mathfrak{g}_Q$ 的根系, 参见文献 [27,28]. 于是,

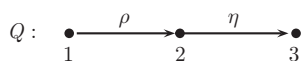
$$\Delta(Q) = \Delta^+(Q) \cup \Delta^-(Q),$$

其中 $\Delta^+(Q)$ 是正根集且

$$\Delta^-(Q) = -\Delta^+(Q).$$

注意到, $\mathfrak{g}_Q$ 和 $\Delta^+(Q)$ 只依赖于 Q 的底图, 而不依赖于 Q 的箭向的定向.

例如, 设 Q 是如下 A_3 型箭图:



于是, $\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ 且

$$\Delta^+(Q) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\},$$

其中 α_1, α_2 和 α_3 是单根.

对于 Dynkin 箭图, 我们有下面著名的 Gabriel 定理, 参见文献 [29].

定理 4.1 设 Q 是一个连通的箭图且 k 是任意一个域, 则 Q 在 k 上的不可分解表示的同构类个数有限当且仅当 Q 是一个 Dynkin 箭图. 而且, 在此情形下, 对应 $V \mapsto \dim V$ 诱导了从 Q 的不可分解表示同构类的集合到 $\mathfrak{g}_Q$ 的正根集 $\Delta^+(Q)$ 的一个双射.

由 Gabriel 定理, 我们得到 Q 的不可分解表示的同构类的集合不依赖于基域 k . 对于每个 $\alpha \in \Delta^+(Q)$, 用 $M_k(\alpha)$ 记对应的 Q 在 k 上的不可分解表示. 根据 Krull-Schmidt 定理, 在同构意义下, 每

一个表示 $M \in \text{Rep}_k Q$ 具有如下形式:

$$M = M_k(\lambda) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+(Q)} \lambda(\alpha) M_k(\alpha),$$

其中 $\lambda: \Delta^+(Q) \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个函数. 因此, Q 在 k 上有限维表示的同构类由指标集

$$\mathcal{P}(Q) = \{\lambda \mid \lambda: \Delta^+(Q) \rightarrow \mathbb{N}\}$$

给出. 下面关于 Dynkin 箭图的 Hall 多项式存在性定理由 Ringel 在文献 [24] 中给出.

定理 4.2 对任意 $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}(Q)$, 存在一个整系数多项式 $\varphi_{\mu, \nu}^\lambda(\mathbf{q}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ 使得对于任意的有限域 k , 有

$$\varphi_{\mu, \nu}^\lambda(|k|) = F_{M_k(\mu), M_k(\nu)}^{M_k(\lambda)}.$$

注 4.1 事实上, Ringel 证明了下面更为一般的结果, 即任意直向 (directed) 代数 A 都有 Hall 多项式. Ringel 的证明的主要思想是利用 A 的 Auslander-Reiten 箭图的直向性. 换句话说, A 的所有不可分解模可以排序 $X_1, X_2, \dots, X_N$ 使得

$$\text{Hom}_A(X_s, X_t) \neq 0 \implies s \leq t.$$

详细证明参见文献 [24] 或者 [8, 第 10.4 节]. 另外, 对于有限表示型遗传代数, Ringel 具体计算出了相应于所有不可分解表示的 Hall 多项式, 参见文献 [30].

现在利用 Hall 多项式作为结构常数来定义 Q 的 generic Ringel-Hall 代数. 设 $H_{\mathbf{q}}(Q)$ 是以 $\{u_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}(Q)\}$ 为基的自由 $\mathbb{Q}[\mathbf{q}]$ -模. 定义基元素的乘法如下:

$$u_\mu u_\nu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(Q)} \varphi_{\mu, \nu}^\lambda(\mathbf{q}) u_\lambda.$$

于是, $H_{\mathbf{q}}(Q)$ 是一个含有单位元结合的 $\mathbb{Q}[\mathbf{q}]$ -代数. 将变元 $\mathbf{q}$ 特殊化到 1, $H_{\mathbf{q}}(Q)$ 退化为一个 $\mathbb{Q}$ -代数 $H_1(Q)$, 即

$$H_1(Q) = H_{\mathbf{q}}(Q) \otimes_{\mathbb{Q}[\mathbf{q}]} \mathbb{Q},$$

其中 $\mathbb{Q}$ 被看作一个 $\mathbb{Q}[\mathbf{q}]$ -模, $\mathbf{q}$ 在其上的作用为恒等. 设 $\mathfrak{h}(Q)$ 是 $H_1(Q)$ 的由

$$\{u_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+(Q)\}$$

张成的子空间. 由文献 [24] 知, $\mathfrak{h}(Q)$ 关于换位运算 $[u_\alpha, u_\beta] = u_\alpha u_\beta - u_\beta u_\alpha$ 成为一个李代数.

设 $\mathfrak{g}_Q^+$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}_Q$ 的正部分, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_Q^+)$ 是其泛包络代数. 下面结果摘自文献 [24].

推论 4.1 存在代数同构 $H_1(Q) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_Q^+)$ 和李代数同构 $\mathfrak{h}(Q) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{g}_Q^+$.

注 4.2 上述结论表明, Ringel-Hall 代数方法不仅给出了量子群的正、负部分的实现, 而且能够给出 Kac-Moody 李代数的正、负部分的实现. 关于量子群和 Kac-Moody 李代数的整体实现, 参见文献 [31–33], 亦可参见文献 [34, 35].

下面给出任意 $\mathbb{F}_q$ -代数的 Hall 多项式的定义. 设 $k = \mathbb{F}_q$ 是一个有限域, A 是一个 k -代数且 X 是一个有限维 A -模. 于是, 对于任意有限域扩张 $k \subseteq E$, $X_E := X \otimes_k E$ 自然地成为 E -代数 $A_E := A \otimes_k E$ 上的一个模. 域 k 的一个有限扩张 E 称为相对于 X 是保守的 (conservative), 如果对于 X 的每个不可分解直和项 Y , Y_E 是不可分解 A_E -模. 更一般地, 给定有限个 A -模的集合

$$\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\},$$

若域 k 的一个有限扩张 E 相对于每个 X_i ($1 \leq i \leq m$) 都是保守的, 则称 E 相对于 $\mathcal{X}$ 是保守的.

定义 4.1 设 A 是一个 k -代数, 其中 k 是一个有限域. 取定 A -模 M 、 N 和 Z . 若存在一个整系数多项式 $\varphi_{M,N}^Z(\mathbf{q}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ 使得对于 k 的任意相对于 $\{M, N, Z\}$ 的保守扩域 E , 有

$$\varphi_{M,N}^Z(|E|) = F_{M_E, N_E}^{Z_E},$$

则称 Hall 多项式对于模 M 、 N 和 Z 是存在的. 如果对于任意 A -模 M 、 N 和 Z , 相应的 Hall 多项式 $\varphi_{M,N}^Z(\mathbf{q})$ 都存在, 那么称代数 A 有 Hall 多项式.

注 4.3 (1) Ringel^[36] 猜测, 任意一个有限表示型代数都有 Hall 多项式. 文献 [37,38] 讨论了有限表示型平凡扩张代数和不含短圈 (short cycle) 的有限表示型代数的 Hall 多项式. 一般情形下的 Ringel 猜测至今尚未解决. 关于这方面的一些进展以及 Dynkin 箭图的 Hall 多项式计算, 参见文献 [39–42].

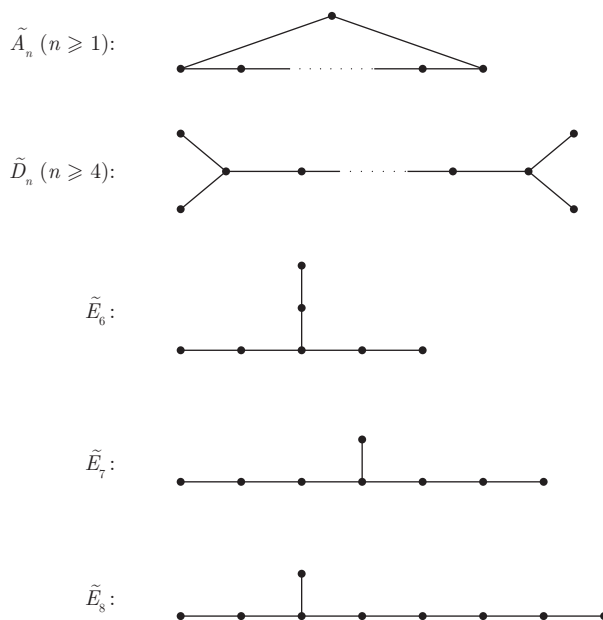
(2) Hall 多项式也出现在其他类型的范畴中. 例如, 文献 [32] 研究了有限表示型遗传代数的导出范畴的 Hall 多项式; 文献 [43] 研究了偏序集表示范畴中的 Hall 多项式; 文献 [44,45] 研究了有限表示型遗传代数模范畴的循环复形范畴的 Hall 多项式.

(3) 对于含有 n 个顶点的循环箭图, 其幂零表示的同构类由 n -重划分给出. 此时, Hall 多项式的存在性由文献 [46,47] 给出. 进一步的讨论参见文献 [48,49]. 另外, 文献 [50,51] 给出了其 Hall 代数中的一些乘法公式.

(4) 在 Dynkin 箭图和循环箭图情形下, 其等变反常层恰好由幂零表示的同构类诱导的相交上同调层给出. 此时, 应用 Grothendieck 迹公式可以给出 Hall 多项式存在性的一个简短的几何证明, 参见文献 [52] 和 [53, 引理 14.25]. 另外, Hubery^[54] 利用 Green 公式得到了这两种情形下 Hall 多项式存在性的一个简洁证明.

5 仿射箭图的 Hall 多项式

本节总假定 Q 是一个不含有向循环的仿射箭图, 即 Q 的底图具有如下形式:



设 kQ 是 Q 的路代数, $\text{ind } kQ$ 记不可分解 kQ -模同构类中的代表元的集合. 根据文献 [55], $\text{ind } kQ$ 有分解

$$\text{ind } kQ = \mathcal{P}_k \cup \mathcal{R}_k \cup \mathcal{I}_k,$$

其中 $\mathcal{P}_k$ 、 $\mathcal{R}_k$ 和 $\mathcal{I}_k$ 分别记不可分解预投射模、正则模和预内射模构成的 $\text{ind } kQ$ 的子集合. 进一步, $\mathcal{R}_k$ 包含有限个例外管状分支 $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_t$ ($t \geq 2$) 以及无限多个齐次管状分支 $\mathcal{T}_z$ ($z \in \mathbb{H}_k$), 其中 $\mathbb{H}_k$ 是射影直线 $\mathbb{P}_k^1$ 的一个余有限集合, 即

$$\mathcal{R}_k = \prod_{i=1}^t \mathcal{T}_i \times \prod_{z \in \mathbb{H}_k} \mathcal{T}_z.$$

注意到, 当 Q 是 $\tilde{A}_n$ 型时, $t = 2$; 在其他情形下, $t = 3$. 对于每个 $z \in \mathbb{H}_k$, 加法闭包 $\text{add } \mathcal{T}_z$ 中包含唯一的一个单对象 S_z , 并且在同构意义下, 它的每个对象具有形式

$$M_k(\pi, z) = \bigoplus_{r=1}^s S_z[\pi_r], \quad (5.1)$$

其中

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$$

是一个划分, $S_z[\pi_r]$ 是 $\mathcal{T}_z$ 中长度为 π_r 的唯一不可分解对象.

用 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_k(Q)$ 记所有有限维 kQ -模的同构类的集合. 根据上面的讨论, 齐次管状分支 $\mathcal{T}_z$ 依赖于基域 k . 因此, $\mathcal{M}$ 也依赖于基域 k . 进一步, 设 $\mathcal{M}_0$ 表示不可分解直和项属于分支 $\mathcal{P}_k, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_t, \mathcal{I}_k$ 的所有 kQ -模的同构类的集合, 它不依赖于基域 k . 对于每个 $\alpha \in \mathcal{M}_0$, 我们取定同构类 α 中的一个代表元 $M_k(\alpha)$.

定义 5.1 一个 Segre 序列 (Segre sequence) 指的是序列

$$\lambda = ((\lambda^{(1)}, d_1), \dots, (\lambda^{(r)}, d_r)),$$

其中 $\lambda^{(i)}$ 是划分, d_i 是正整数且满足 $d_1 \leq \dots \leq d_r$. 此时, 称该序列的型为 $\underline{d} = (d_1, \dots, d_r)$. 如果所有 $\lambda^{(i)}$ 都是空划分, 那么简单记 $\lambda = \emptyset$. 若 $\alpha \in \mathcal{M}_0$ 且 λ 是一个型为 $\underline{d}$ 的 Segre 序列, 则称二元组 $\alpha = (\alpha, \lambda)$ 是一个型为 $\underline{d}$ 的分解序列 (decomposition sequence).

注 5.1 设 $\lambda = ((\lambda^{(1)}, d_1), (\lambda^{(2)}, d_2), \dots, (\lambda^{(r)}, d_r))$ 是一个 Segre 序列. 给定一个划分 π 和一个正整数 d , 将 (π, d) 添加到 λ 指的是新的 Segre 序列

$$\mu := ((\lambda^{(1)}, d_1), \dots, (\lambda^{(i)}, d_i), (\pi, d), (\lambda^{(i+1)}, d_{i+1}), \dots, (\lambda^{(r)}, d_r)),$$

其中 $1 \leq i \leq r$ 且 $d_i \leq d < d_{i+1}$. 此时, 亦称 λ 是由 μ 删去 (π, d) 得到的. 特别地, 任意有限个 Segre 序列总可以通过添加或删去 $(\emptyset, d)$ 化为具有相同型的 Segre 序列.

设 $\underline{d} = (d_1, \dots, d_r)$. 对于有限域 k , 令

$$\mathcal{X}_k(\underline{d}) = \{\underline{z} = (z_1, \dots, z_r) \mid z_i \in \mathbb{H}_k, \deg(z_i) = d_i, \forall 1 \leq i \leq r\}.$$

注意到 $\mathcal{X}_k(\underline{d})$ 的元素个数依赖于基域 k , 且 $\mathcal{X}_k(\underline{d})$ 可能是空集. 因为 $\mathbb{H}_k$ 中次数为 d_i 的点的个数随着基域的阶数 $|k|$ 的增大而增大, 所以, 当有限域 k 的元素足够多时, $\mathcal{X}_k(\underline{d}) \neq \emptyset$.

对于每个型为 $\underline{d}$ 的 Segre 序列 λ 和 $\underline{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathcal{X}_k(\underline{d})$, 定义

$$M_k(\lambda, \underline{z}) := \bigoplus_{i=1}^r M_k(\lambda^{(i)}, z_i) \in kQ\text{-mod},$$

其中 $M_k(\lambda^{(i)}, z_i)$ 是由 $\lambda^{(i)}$ 决定的 $\text{add } \mathcal{T}_{z_i}$ 中的对象 (见 (5.1)). 进一步, 对于每个型为 $\underline{d}$ 的分解序列 $\alpha = (\alpha, \lambda)$, 定义

$$M_k(\alpha, \underline{z}) := M_k(\alpha) \oplus M_k(\lambda, \underline{z}) \in kQ\text{-mod}, \quad \forall \underline{z} \in \mathcal{X}_k(\underline{d}).$$

注意到, 在同构意义下, 每一个 kQ -模都具有形式 $M_k(\alpha, \underline{z})$.

下面的结论取自文献 [56, 定理 6.6].

定理 5.1 给定三个型为 $\underline{d}$ 的分解序列 α 、 β 和 γ , 存在一个整系数多项式 $\varphi_{\alpha, \beta}^{\gamma}(\mathbf{q}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ 使得对于任意有限域 $k = \mathbb{F}_q$ 和所有的 $\underline{z} \in \mathcal{X}_k(\underline{d})$, 有

$$\varphi_{\alpha, \beta}^{\gamma}(\mathbf{q}) = F_{M_k(\alpha, \underline{z}), M_k(\beta, \underline{z})}^{M_k(\gamma, \underline{z})}.$$

作为上述定理的直接推论, 我们首先得到下面的结果, 参见文献 [57, 定理 9.1.1].

推论 5.1 假设 k 是一个给定的有限域, 则代数 kQ 有 Hall 多项式, 即对于任意给定 kQ -模 M 、 N 和 Z , 存在一个整系数多项式 $\varphi_{M, N}^Z(\mathbf{q}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ 使得对于 k 的每一个相对于 $\{M, N, Z\}$ 的保守扩域 E , 有

$$\varphi_{M, N}^Z(|E|) = F_{M_E, N_E}^{Z_E}.$$

设 $\alpha = (\alpha, \lambda)$ 是一个型为 $\underline{d}$ 的分解序列. 用 $\mathfrak{J}_k(\alpha)$ 记如下形式的 kQ -模的同构类集合:

$$M_k(\alpha, \underline{z}) = M_k(\alpha) \oplus M_k(\lambda, \underline{z}),$$

其中

$$\underline{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathcal{X}_k(\underline{d}).$$

作为定理 5.1 的第二个推论, 我们得到下面结果, 参见文献 [54, 定理 10].

推论 5.2 设 $\alpha = (\alpha, \lambda)$ 、 $\beta = (\beta, \mu)$ 和 $\gamma = (\gamma, \nu)$ 是型分别为 $\underline{d}'$ 、 $\underline{d}''$ 和 $\underline{d}$ 的分解序列, 则存在一个有理系数多项式 $\psi_{\alpha, \beta}^{\gamma}(\mathbf{q}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{q}]$ 使得对于任意有限域 k , 有

$$\psi_{\alpha, \beta}^{\gamma}(|k|) = \sum_{\substack{X \in \mathfrak{J}_k(\alpha) \\ Y \in \mathfrak{J}_k(\beta)}} F_{X, Y}^Z, \quad \forall Z \in \mathfrak{J}_k(\gamma).$$

设 I 和 P 分别是预内射和预投射 kQ -模. 设 $d \geq 1$, λ 是型为 (d) 的一个 Segre 序列, 即 λ 是一个划分. 令 $\gamma = (0, \lambda)$, 则 $\chi_k(d)$ 恰为 $\mathbb{H}_k$ 中次数是 d 的点集, 并且对于每个 $z \in \chi_k(d)$,

$$R_{\lambda}(z) := M_k(\gamma, z)$$

是一个正则 kQ -模, 其不可分解直和项属于 $\mathcal{T}_z$. 我们利用文献 [58, 第 2.5 小节] 中的记号, 对于 kQ -模 A 、 B 和 C , 令

$$F_C^{A, B} = \frac{|\text{Ext}_{kQ}^1(B, A)_C|}{|\text{Hom}_{kQ}(B, A)|}.$$

作为定理 5.1 的第三个推论, 我们得到下面结果 (参见文献 [58, 猜想 3.4]).

推论 5.3 对于任意有限域 k 和 $z, z' \in \chi_k(d)$, 有等式

$$F_{R_\lambda(z)}^{P,I} = F_{R_\lambda(z')}^{P,I}.$$

注 5.2 (1) 定理 5.1 的证明主要思路如下: 首先, 利用 Hubery^[54] (即应用 Green 公式) 的方法证明对于相应的加权射影线凝聚层范畴, Hall 多项式是存在的; 其次, 利用这些多项式构造 generic Ringel-Hall 代数; 最后, 应用 Cramer^[59] 的一个定理, 将 Hall 多项式存在性定理由加权射影线的凝聚层范畴转化到 Q 的表示范畴.

(2) 文献 [60–63] 给出了仿射箭图表示范畴中的一些特殊类的 Hall 多项式的存在性. 文献 [64] 利用几何方法研究了一般箭图的 Hall 多项式.

(3) 事实上, Hall 多项式的存在性在箭图 Grassmann 流形及丛代数理论中有重要的应用, 参见文献 [65, 66].

参考文献

- Steinitz E. Zur theorie der Abel'schen gruppen. Jahrsber Deutsch Math-Verein, 1901, 9: 80–85
- Hall P. The algebra of partitions. In: Proceedings of the 4th Canad Math Congress Banff 1957. Toronto: University of Toronto Press, 1959, 147–159
- Macdonald I G. The algebra of partitions. In: Group Theory. London: Academic Press, 1984, 315–333
- Macdonald I G. Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1995
- Ringel C M. Hall algebras and quantum groups. Invent Math, 1990, 101: 583–591
- Ringel C M. Hall algebras revisited. In: Quantum Deformations of Algebras and Their Representations. Israel Mathematical Conference Proceedings. Bar-Ilan: Bar-Ilan University, 1993, 171–176
- Green J A. Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups. Invent Math, 1995, 120: 361–377
- Deng B, Du J, Parshall B, et al. Finite Dimensional Algebras and Quantum Groups. Mathematical Surveys and Monographs Volume 150. Providence: Amer Math Soc, 2008
- Schiffmann O. Lectures on Hall algebras. In: Geometric Methods in Representation Theory, II. Sémin Congr, 24-II. Paris: Soc Math France, 2012, 1–141
- Ringel C M. Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1099. Berlin: Springer-Verlag, 1984
- Gabriel P, Roiter A V. Representations of Finite-Dimensional Algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1992
- Green J A. Symmetric Functions and p -Modules. Lecture Notes. Warwick: University of Warwick, 1961
- Klein T. The multiplication of Schur-functions and extensions of p -modules. J Lond Math Soc (2), 1968, 43: 280–284
- Klein T. The Hall polynomial. J Algebra, 1969, 12: 61–78
- Davies I J. Enumeration of certain subgroups of Abelian p -groups. Proc Edinb Math Soc (2), 1962, 13: 1–4
- Morris A O. The multiplication of Hall functions. Proc Lond Math Soc (3), 1963, 13: 733–742
- Butler L M, Hales A W. Nonnegative Hall polynomials. J Algebraic Combin, 1993, 2: 125–135
- Maley F M. The Hall polynomial revisited. J Algebra, 1996, 184: 363–371
- Schmidmeier M. Hall polynomials via automorphisms of short exact sequences. Algebr Represent Theory, 2012, 15: 449–481
- Johnsen K. On a forgotten note by Ernst Steinitz on the theory of Abelian groups. Bull Lond Math Soc, 1982, 14: 353–355
- Zelevinsky A V. Representations of Finite Classical Groups. Lecture Notes in Mathematics, vol. 869. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1981
- Riedtmann C. Lie Algebras generated by indecomposables. J Algebra, 1994, 170: 526–546
- Peng L. Some Hall polynomials for representation-finite trivial extension algebras. J Algebra, 1997, 197: 1–13
- Ringel C M. Hall algebras. Banach Center Publ, 1988, 26: 433–447
- Lusztig G. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. J Amer Math Soc, 1990, 3: 447–498

- 26 Lusztig G. Quivers, perverse sheaves, and the quantized enveloping algebras. *J Amer Math Soc*, 1991, 4: 366–421
- 27 Humphreys J E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 9. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1972
- 28 Kac V. Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 29 Gabriel P. Unzerlegbare darstellungen, I. *Manuscripta Math*, 1972, 6: 71–103
- 30 Ringel C M. Hall polynomials for the representation-finite hereditary algebras. *Adv Math*, 1990, 84: 137–178
- 31 Xiao J. Drinfeld double and Ringel-Green theory of Hall algebras. *J Algebra*, 1997, 190: 100–144
- 32 Peng L, Xiao J. Root categories and simple Lie algebras. *J Algebra*, 1997, 198: 19–56
- 33 Peng L, Xiao J. Triangulated categories and Kac-Moody algebras. *Invent Math*, 2000, 140: 563–603
- 34 Frenkel I, Malkin A, Vybornov M. Affine Lie algebras and tame quivers. *Selecta Math (NS)*, 2001, 7: 1–56
- 35 Bridgeland T. Quantum groups via Hall algebras of complexes. *Ann of Math (2)*, 2013, 177: 739–759
- 36 Ringel C M. Lie algebras arising in representation theory. In: London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 168. Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 284–291
- 37 Peng L. Some Hall polynomials for representation-finite trivial extension algebras. *J Algebra*, 1997, 197: 1–13
- 38 Guo J Y, Peng L. Universal PBW-basis of Hall-Ringel algebras and Hall polynomials. *J Algebra*, 1997, 198: 339–351
- 39 Tan Y. Polynomials related to Hall numbers. *Comm Algebra*, 2001, 29: 3099–3115
- 40 Nasr-Isfahani A R. Hall polynomials for Nakayama algebras. *Algebr Represent Theory*, 2012, 15: 483–490
- 41 Nöenberg R. From elementary calculations to Hall polynomials. *Linear Algebra Appl*, 2003, 365: 301–309
- 42 Fu C. Hall polynomials for representation-finite repetitive cluster-tilted algebras. *Algebr Represent Theory*, 2014, 17: 1137–1143
- 43 Kosakowska J. The existence of Hall polynomials for posets of finite prinjective type. *J Algebra*, 2007, 308: 654–665
- 44 Chen Q, Deng B. Cyclic complexes, Hall polynomials and simple Lie algebras. *J Algebra*, 2015, 440: 1–32
- 45 Ruan S, Shen J, Zhang H. Lie algebras arising from 1-cyclic perfect complexes. *ArXiv:1705.07307*, 2017
- 46 Ringel C M. The composition algebra of a cyclic quiver, Towards an explicit description of the quantum groups of type $\tilde{A}_n$. *Proc Lond Math Soc (3)*, 1993, 66: 507–537
- 47 Guo J Y. The Hall polynomials of a cyclic serial algebra. *Comm Algebra*, 1995, 23: 743–751
- 48 Peng L, Zhang S. Calculation for Ringel-Hall numbers of cyclic serial algebras. *Comm Algebra*, 2001, 29: 493–501
- 49 Ánh P N. Hall polynomials for $\tilde{A}_n$. *Arch Math*, 2002, 78: 263–267
- 50 Du J, Fu Q. Quantum affine $\mathfrak{gl}_n$ via Hecke algebras. *Adv Math*, 2015, 282: 23–46
- 51 Du J, Zhao Z. Multiplication formulas and canonical bases for quantum affine $\mathfrak{gl}_n$. *Canad J Math*, 2018, 70: 773–803
- 52 Malkin A. A generalization of Hall polynomials to ADE case. *Int Math Res Not IMRN*, 2001, 22: 1195–1202
- 53 Ariki S. Representations of Quantum Algebras and Combinatorics of Young Tableaux. University Lecture Series, vol. 26. Providence: Amer Math Soc, 2002
- 54 Hubery A. Hall polynomials for affine quivers. *Represent Theory*, 2010, 14: 355–378
- 55 Dlab V, Ringel C M. Indecomposable Representations of Graphs and Algebras. *Memoirs of the American Mathematical Society*, no. 173. Providence: Amer Math Soc, 1976
- 56 Deng B, Ruan S. Hall polynomials for tame type. *J Algebra*, 2017, 475: 171–206
- 57 Zhang G. Canonical bases for the quantum extended Kac-Moody algebras and Hall polynomials. *ArXiv:0901.1720*, 2015
- 58 Berenstein A, Greenstein J. Primitively generated Hall algebras. *Pacific J Math*, 2016, 281: 287–331
- 59 Cramer T. Double Hall algebras and derived equivalences. *Adv Math*, 2010, 224: 1097–1120
- 60 Zhang P. Composition algebras of affine type. *J Algebra*, 1998, 206: 505–540
- 61 Zhang P. PBW-basis for the composition algebra of the Kronecker algebra. *J Reine Angew Math*, 2000, 527: 97–116
- 62 Szántó C. Hall numbers and the composition algebra of the Kronecker algebra. *Algebr Represent Theory*, 2006, 9: 465–495
- 63 Szántó C. On some Ringel-Hall products in tame cases. *J Pure Appl Algebra*, 2012, 216: 2069–2078
- 64 Xiao J, Xu F, Zhao M. On purity theorem of Lusztig’s perverse sheaves. *ArXiv:1712.04167*, 2017
- 65 Caldero P, Reineke M. On the quiver Grassmannian in the acyclic case. *J Pure Appl Algebra*, 2008, 212: 2369–2380
- 66 Reineke M. Counting rational points of quiver moduli. *Int Math Res Not IMRN*, 2006, 2006: 1–19

Hall polynomials

Bangming Deng & Xintian Wang

Abstract As structure constants of Hall algebras, Hall numbers and Hall polynomials have deep connections with theories of representations of symmetric groups and quantum groups. In this survey, we first introduce notions of classical Hall algebras and Hall polynomials, and present their relationship with the ring of symmetric functions. We then define Ringel-Hall algebras of algebras over finite fields and state their connections with quantum groups. We also discuss the existence of Hall polynomials in the Dynkin and affine quiver cases.

Keywords Hall algebra, Hall polynomial, quantum group

MSC(2010) 16G20, 17B37, 20G05

doi: 10.1360/N012018-00032