

经验性思维中的泛逻辑

何华灿 刘永怀 何大庆

(西北工业大学计算机系, 西安 710072)

摘要 阐述了提出泛逻辑的思想基础和数学基础, 给出了泛逻辑的主要定义和基本性质, 讨论了泛逻辑与其他逻辑的关系及泛逻辑家族. 尽管泛逻辑尚处在研究的初期, 但它有可能发展成一切逻辑的逻辑.

关键词 经验性思维 泛逻辑 范数

1 泛逻辑的思想基础

人工智能的主要研究对象是经验性思维和学习过程. 经验性思维不同于理性思维, 它有多种不确定性. 其推理过程只能用非确定性推理描述, 所以非确定性推理一直是人工智能的核心问题之一. 目前比较著名的非确定性推理模型有十多种, 它们一般都是凭直观经验指定一些逻辑运算公式和规则, 缺乏理论根据和使用的有效性分析, 带有很强的盲目性和随意性, 迫切需要站在理论高度系统地研究人类的经验性思维问题, 建立统一的非确定性推理理论. 故我们引入了一个全新的连续可控的逻辑体系——泛逻辑 (Generalized Logic).

人类经验性思维中的不确定性主要表现在概念、知识和逻辑运算 3 个方面. 前两种不确定性在已有的非确定性推理模型中已得到较好的解决, 当前的主要问题是人们对非确定性推理中应该遵循的连续可控逻辑运算研究甚少, 一般都是主观给定一组固定的公式使用. 使用较多的是概率论中的 3 个相关准则, 其中以最大相关准则使用最广, 其次是独立相关准则. 盲目使用相关准则是有害的, 因为 3 个相关准则有它们的适用范围和使用条件: 最小相关准则只能在事件之间存在最大相斥性时使用, 独立相关准则只能在事件之间完全独立时使用, 最大相关准则只能在事件之间存在最大相吸性时使用. 所以在经验性思维中仅有这 3 个相关准则是远远不够的.

事实上经验性思维中的“与”、“或”并不是一个完全确定的概念, 它有时很“严厉”, 有时很“宽松”. 因此在实现泛逻辑运算时, 不应该用某一个固定的运算公式来计算, 而应该用一组满足某些特性的公式簇, 供推理过程中随时根据事实之间的相关性大小进行选择. 这就是泛逻辑的思想基础和要研究解决的主要问题. 进一步研究表明, 泛逻辑现象是广泛存在于经验性思维、概率问题和各种多值逻辑系统中的具有普遍意义的逻辑现象.

建立泛逻辑的核心任务是在论域 $T=[0, 1]$ 上定义一种受相关系数 h ($0 \leq h \leq 1$) 控制的泛与

运算 $A(x, y, h)$ 和泛或运算 $O(x, y, h)$, 使它们满足以下条件:

(1) $h=1$ 时等于最大相关准则: $A(x, y, 1)=T_3(x, y)=\min(x, y)$, $O(x, y, 1)=S_3(x, y)=\max(x, y)$.

(2) $h=0.5$ 时等于独立相关准则: $A(x, y, 0.5)=T_2(x, y)=xy$, $O(x, y, 0.5)=S_2(x, y)=x+y-xy$.

(3) $h=0$ 时等于最小相关准则: $A(x, y, 0)=T_1(x, y)=\max(0, x+y-1)$, $O(x, y, 0)=S_1(x, y)=\min(1, x+y)$.

(4) 当 h 由 $1 \rightarrow 0$ 时, $A(x, y, h)$ 和 $O(x, y, h)$ 应能在 3 个相关准则之间平滑地过渡.

由上述条件 (1)~(3), 可以求出 $T^2=[0, 1] \times [0, 1]$ 空间中 $A(x, y, h)$ 和 $O(x, y, h)$ 的中值曲线 T_{0d}^2 和 T_{0r}^2 与 T^2 的主对角线的交点 (d, d) 和 (r, r) 如图 1 所示.

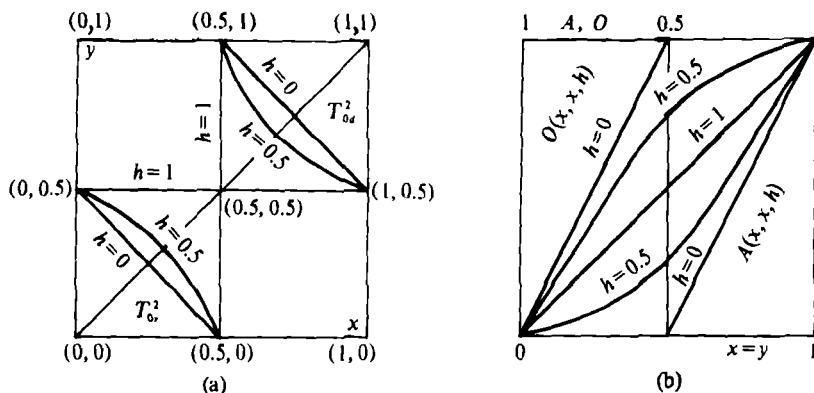


图 1 3 个相关准则在 T^2 空间中的分布

(a) T^2 空间中的中值曲线分布; (b) A, O 在 T^2 主对角线上的分布

$h=0$ 时, $d=0.75$, $r=0.25$; $h=0.5$ 时, $d=\sqrt{2}/2$, $r=1-\sqrt{2}/2$; $h=1$ 时, $d=r=0.5$. 这是我们定义泛与运算和泛或运算的根据之一. 另一个根据是它的泛与特性 (即若 $A(x, y, h) > 0.5$, 则 $x > 0.5$, 且 $y > 0.5$) 和泛或特性 (即若 $O(x, y, h) < 0.5$, 则 $x < 0.5$ 且 $y < 0.5$).

2 泛逻辑的数学基础

范数 (Norm) 研究告诉我们, 泛逻辑中与/或运算的连续可控性在数学上是完全可以实现的, 例如利用范数定义和待定系数法可以求出一类具有有理多项式分式形式的范数 (PD 范式) 如下:

$$\begin{cases} A(x, y, h) = \frac{xy}{(3-4h)-(2-4h)(x+y-xy)}, \\ O(x, y, h) = \frac{x+y+(1-4h)xy}{1+(2-4h)xy} \quad (h \leq 0.75). \end{cases} \quad (1)$$

当 $h=0.5$ 时, (1) 式退化为独立相关准则 $T_1(x, y)$ 和 $S_1(x, y)$. 当 $h=0$ 时, $A_1(x, y, 0) \approx T_1(x, y)$, $O_1(x, y, 0) \approx S_1(x, y)$, 是对最小相关准则的一个比较理想的逼近. 当 $h=0.75$ 时, $A_1(x, y, 0.75)$ 和 $O_1(x, y, 0.75)$ 介于最大相关准则和独立相关准则之间, 是一个中间受控状态. 当 $h>0.75$ 时, (1) 式失去了单调性, 但对 PD 范式中的 $O_1(x, y, 0.75)$ 进行指数型的非线性变换和非线性反变换, 可得 PDP 范式如下:

$$\begin{cases} A_n(x, y, h) = 1 - O_n(1-x, 1-y, h), \\ O_n(x, y, h) = \left(\frac{x^n + y^n - 2x^n y^n}{1 - x^n y^n} \right)^{\frac{1}{n}}. \end{cases} \quad (2)$$

$n=1$ 时, (2) 式退化为 $O_1(x, y, 0.75)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, PDP 范式趋近于最大相关准则, 所以令 $n=1/(4-h)$ 时, 可用 PDP 范式实现在 $h \in [0.75, 1]$ 范围的控制.

因此我们可以用组合范式实现泛与/泛或运算的连续控制: 在 $h \in (0, 0.75]$ 时, 用 PD 范式 (1), 在 $h \in (0.75, 1)$ 时用 PDP 范式 (2), 而在 $h=0, 1$ 两点, 可直接用相应两个相关准则. 这是一个不太理想的控制方案, 但至少证明了泛逻辑的思想在数学上是可以实现的, 这是我们提出泛逻辑的数学根据. 当然这不会妨碍我们继续寻找更为理想的控制范式.

3 泛逻辑的主要定义和性质

3.1 真值空间 T

在泛逻辑中, 泛命题 X 是一个具有真假意义的断言, 其真值 $t(X) \in [0, 1]$. 真值空间 $T=[0, 1]$ 被中值 0.5 划分为 3 部分: 假空间 (阴性空间、负空间) $T_-=[0, 0.5]$ 代表 X 为假, 其中 0 表示 X 完全为假, 越接近 0.5, X 为假的程度越低; U 空间 (中性空间、零空间、中值空间) $T_0=\{0.5\}$ 代表 X 既不为真, 也不为假, 或者说不知道 X 的真假; 真空间 (阳性空间、正空间) $T_+=[0.5, 1]$ 代表 X 为真, 其中 1 表示 X 完全为真, 越接近 0.5, X 为真的程度越低.

3.2 等价 ($\Leftrightarrow$)

定义 1 设 P, Q 是两个泛命题, 当且仅当 $t(P)=t(Q)$ 时, 称 P 等价于 Q , 记作 $P \Leftrightarrow Q$.

3.3 非运算 ($\sim$)

定义 2 非运算是 T 中的一元函数 $N(x)$, 它满足 $N(x)=1-x$.

定理 1 $N(x) \in [0, 1]$ (T 域封闭性) (证略).

定理 2 $N(N(x))=x$ (证略).

泛逻辑公式 双重否定律 $\sim \sim P \Leftrightarrow P$.

定理 3 $N(x) \geq 0.5$, 当且仅当 $x \leq 0.5$ (证略).

即 $N(x) \in T_+$, 当且仅当 $x \in T_-$; $N(x) \in T_0$, 当且仅当 $x \in T_0$.

3.4 泛与运算 ($\bigwedge$)

定义 3 泛与运算是 T 中的二元含参函数 $A(x, y, h)$, 它满足以下条件:

(1) 初始条件 $A(0, 0, h)=0$, $A(x, 1, h)=A(1, x, h)=x$,

$A(0.75, 0.75, 0)=A(0.5, 0.5, 1)=0.5$;

(2) 广义单调性 若 $x \leq z$, $y \leq w$, 则 $A(x, y, h) \leq A(z, w, h)$;

(3) 广义交换律 $A(x, y, h) = A(y, x, h)$;

(4) 广义结合律 $A(A(x, y, h), z, h) = A(x, A(y, z, h), h)$.

即 $t(X \overset{h}{\wedge} Y) = A(t(X), t(Y), h)$. 例如 $T_1(x, y)$, $T_2(x, y)$ 和 $T_3(x, y)$ 都是泛与运算.

定理 4 $A(x, y, h) \in [0, 1]$ (T 域封闭性) (证略).

定理 5 $A(x, y, h) \leq \min(x, y)$ (最小上界性).

证 $\because A(x, y, h) \leq A(x, 1, h) = x$, $A(x, y, h) \leq A(1, y, h) = y$,

$\therefore A(x, y, h) \leq \min(x, y)$.

推论 1 $A(x, 0, h) = A(0, y, h) = 0$ (泛与运算有零元 0).

推论 2 $A(x, x, h) \leq x$ (幂等律不成立, $P \overset{h}{\wedge} P \not\Rightarrow P$).

推论 3 $A(x, 1-x, h) \leq 0.5$, 即 $A(x, N(x), h) \leq 0.5$.

推论 4 若 $A(x, y, h) > 0.5$, 则 $x > 0.5$ 且 $y > 0.5$.

泛逻辑公式 零律 $P \overset{h}{\wedge} 0 \Leftrightarrow 0$.

同一律 $P \overset{h}{\wedge} 1 \Leftrightarrow P$ (泛与运算存在单位元 1).

交换律 $P \overset{h}{\wedge} Q \Leftrightarrow Q \overset{h}{\wedge} P$.

结合律 $(P \overset{h}{\wedge} Q) \overset{h}{\wedge} R \Leftrightarrow P \overset{h}{\wedge} (Q \overset{h}{\wedge} R)$.

3.5 泛或运算 ($\overset{h}{\vee}$)

定义 4 泛或运算是 T 中的二元含参函数 $O(x, y, h)$, 它满足以下条件:

(1) 初始条件 $O(1, 1, h) = 1$, $O(x, 0, h) = O(0, x, h) = x$,

$O(0.25, 0.25, 0) = O(0.5, 0.5, 1) = 0.5$;

(2) 广义单调性 若 $x \leq z$, $y \leq w$, 则 $O(x, y, h) \leq O(z, w, h)$;

(3) 广义交换律 $O(x, y, h) = O(y, x, h)$;

(4) 广义结合律 $O(O(x, y, h), z, h) = O(x, O(y, z, h), h)$.

即 $t(P \overset{h}{\vee} Q) = O(t(P), t(Q), h)$. 例如 $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$ 和 $S_3(x, y)$ 都是泛或运算.

定理 6 $O(x, y, h) \in [0, 1]$ (T 域封闭性), (证略).

定理 7 $O(x, y, h) \geq \max(x, y)$ (最大下界性),

证 $\because O(x, y, h) \geq O(x, 0, h) = x$, $O(x, y, h) \geq O(0, y, h) = y$,

$\therefore O(x, y, h) \geq \max(x, y)$.

推论 5 $O(x, 1, h) = O(1, y, h) = 1$ (泛或运算存在零元 1).

推论 6 $O(x, x, h) \geq x$ (幂等律不成立, $P \overset{h}{\vee} P \not\Rightarrow P$).

推论 7 $O(x, 1-x, h) \geq 0.5$ 即 $O(x, N(x), h) \geq 0.5$.

推论 8 若 $O(x, y, h) < 0.5$, 则 $x < 0.5$ 且 $y < 0.5$.

泛逻辑公式 零律 $P \overset{h}{\vee} 1 \Leftrightarrow 1$.

同一律 $P \overset{h}{\vee} 0 \Leftrightarrow P$ (泛或运算存在单位元 0).

交换律 $P \overset{h}{\vee} Q \Leftrightarrow Q \overset{h}{\vee} P$.

结合律 $(P \overset{h}{\vee} Q) \overset{h}{\vee} R \Leftrightarrow P \overset{h}{\vee} (Q \overset{h}{\vee} R)$.

定理 8 对偶原理

$A(1-x, 1-y, h) = 1 - O(x, y, h)$ 即 $A(N(x), N(y), h) = N(O(x, y, h))$.

$O(1-x, 1-y, h) = 1 - A(x, y, h)$ 即 $O(N(x), N(y), h) = N(A(x, y, h))$.

证 设 $O(x, y, h)$ 是泛或运算, 它满足泛或运算定义的 4 个条件, 则可证 $1 - O(x, y, h) = A(1-x, 1-y, h)$ 也满足泛与运算定义的 4 个条件.

(1) 满足初始条件 $1 - O(1, 1, h) = 1 - 1 = 0 = A(0, 0, h)$; $1 - O(x, 0, h) = 1 - x = A(1-x, 1, h)$; $1 - O(0.25, 0.25, 0) = 1 - 0.5 = 0.5 = A(0.75, 0.75, 0)$; ……

(2) 满足广义单调性(显然);

(3) 满足广义交换律(显然);

(4) 满足广义结合律

$\therefore O(O(x, y, h), z, h) = O(x, O(y, z, h), h)$,

$1 - O(O(x, y, h), z, h) = 1 - O(x, O(y, z, h), h)$,

$A(1 - O(x, y, h), 1 - z, h) = A(1 - x, 1 - O(y, z, h), h)$,

$\therefore A(A(1-x, 1-y, h), 1-z, h) = A(1-x, A(1-y, 1-z, h), h)$.

同理可证 $O(1-x, 1-y, h) = 1 - A(x, y, h)$.

利用对偶原理我们可以由 $A(x, y, h)$ 的范式求 $O(x, y, h)$ 的范式, 或由 $O(x, y, h)$ 的范式求 $A(x, y, h)$ 的范式.

泛逻辑公式 (der Morgan 定律) $P \overset{h}{\wedge} Q \Leftrightarrow \sim (\sim P \overset{h}{\vee} \sim Q)$;

$P \overset{h}{\vee} Q \Leftrightarrow \sim (\sim P \overset{h}{\wedge} \sim Q)$.

利用泛与、泛或、非, 再加上泛组合运算及一些辅助概念, 就可以推演出一个完整的泛逻辑体系, 将有专文详细讨论这个体系.

4 泛逻辑与其他逻辑的关系

现有的逻辑已在标准逻辑(经典命题逻辑和经典一阶谓词逻辑)的基础上, 演变出众多的非标准逻辑^[9]; 一类是扩充逻辑的论域 T (由二值扩充为多值甚至连续值), 但继承标准逻辑中的逻辑联接词及其运算公式, 例如三值逻辑、模糊逻辑、直觉主义逻辑等. 另一类是扩充标准逻辑的逻辑联接词以满足一些特殊的需要, 如模态逻辑、时态逻辑等. 第三类是突破标准逻辑的单调性限制, 发展成专门研究知识不完备情况下的非单调性逻辑, 它是一种开放的非自足的逻辑体系. 泛逻辑刚刚提出, 许多问题有待于深入研究. 但它论域连续性和逻辑运算的连续可控性告诉我们, 泛逻辑有可能发展成为可包容一切逻辑的逻辑, 因此我们称之为泛逻辑. 站在泛逻辑的高度来分析其他逻辑系统, 其成功与不足之处就显而易见了. 例如: 概率论实际上是一种连续值逻辑系统, 它引入了变量的连续可变性、与运算和或运算, 并成功地揭示了与/或运算在 3 个特殊状态下的可变性, 给出了它们的运算公式; 最小相关准则、独

立相关准则和最大相关准则. 但是概率论到此止步了, 它未能发现和研究与/或运算在一般状态下的连续可变性, 因而未能发现泛逻辑. 现在概率论将作为泛逻辑的特例存在.

模糊逻辑依据 Zadeh 的模糊子集概念把概率 $x=P(X)$ 引伸到隶属度 $x=\mu(X)$, 完成了变量 x 由概率空间向命题空间(概念空间)的语义转移, 这是它的伟大和成功之处. 它理应更进一步发现与/或运算的连续可变性, 至少是承认 3 个相关准则. 因为模糊逻辑的成功, 已暗示出模糊性思维和概率论可能遵循着某个共同的逻辑规律. 但是模糊逻辑反而退步了, 它在创立初期只承认概率论中的最大相关准则, 因而也就失去了发现泛逻辑的机遇, 这时的模糊逻辑仅是泛逻辑的 $h=1$ 时的特例. 后来人们引入了三角范数概念, 利用范数研究了与/或运算的可变性, 并找出了一些不同于 3 个相关准则的与/或运算公式, 但至今无人把它与一个连续可控的逻辑体系联系起来思考, 因而也就失去了发现泛逻辑的可能^[6, 7].

各种多值逻辑是连续值逻辑的特例. 它们大多只接受最大相关准则, 因而与泛逻辑的思想相左. 三值逻辑发展比较完善, 已形成了许多推理模型^[8~11], 概括起来有 6 种. 但从泛逻辑的观点看, 无非是两大类: 一类是最小相关类($h=0$), 另一类是最大相关类($h=1$), 独立相关类($h=0.5$)不存在. 在每一类中有一个基本模型, 它对应 $u=0.5$ 的情况. u 还有两种不同的语义($u<0, u>1$), 由基本模型通过 $u, 0$ 换位或 $u, 1$ 换位, 就可以得到对应这两种语义的派生模型(见图 2). 可见各种三值逻辑都是泛逻辑的特例.

$h=0$	$\wedge$	u	0	1
	u	u	u	u
	0	u	u	0
	1	u	0	1
$h=1$	$\vee$	u	0	1
	u	u	0	1
	0	0	1	1
	1	1	1	1
$u<0$	$\wedge$	0	u	1
	0	0	0	0
	u	0	0	u
	1	0	u	1
$u=0.5$	$\vee$	0	u	1
	0	0	u	1
	u	u	1	1
	1	1	1	1
$u>1$	$\wedge$	0	1	u
	0	0	0	0
	1	0	0	1
	u	0	1	u
$u>1$	$\vee$	0	1	u
	0	0	1	u
	1	1	u	u
	u	u	u	u

图 2 三值逻辑的各种模型分析

当逻辑的论域退化到 $\{0, 1\}$ 时, 情况十分特殊. 二值逻辑不考虑中值 0.5 的存在, 非 0 即 1, 非 1 即 0, 这时概率中的 3 个相关准则合并为一个准则:

$$\begin{cases} T(x, y) = \max(0, x + y - 1) = xy = \min(x, y), \\ S(x, y) = \min(1, x + y - 1) = x + y - xy = \max(x, y). \end{cases} \quad (3)$$

(3) 式是人们十分熟悉的二值逻辑中的与/或运算的 3 个等价定义, 它在人们头脑中的印象太深刻了, 以至于这一假象长期蒙住了人们的眼睛, 限制了人们的思维, 使人们难以发现普遍存在于经验性思维、概率论和各种多值系统中的泛逻辑现象.

5 泛逻辑家族

如果我们把由上述 3 个相关准则引伸出来的泛逻辑称之为基本泛逻辑, 还会有许多情况引

伸出各种泛逻辑来,例如:

(1) 当 $h < 0$ 时,泛逻辑仍然有意义,它是相克性泛逻辑.

(2) 范数研究告诉我们,泛非运算 $N(x, h)$ 也是存在的(记作 $\sim_h$),例如 $\frac{1-x}{1-hx}$ ($h \leq 1$), 当 $h=0$ 时, $N(x, 0)=1-x$, 它对应于 X 和 $\sim X$ 之间具有最大相斥性的情况.

(3) 在前面的讨论中,一直假设 x, y 在逻辑运算中满足交换律,但是这只是泛逻辑中的一种特例. 一般来讲, x, y 在逻辑运算中可以不满交换律,所以更一般的泛逻辑应该是不可交换的泛逻辑.

(4) 泛命题 X 的不确定性用 $x \in [0, 1]$ 表示,只表达了 X 的零阶不确定性,如 $x=0.85$ 已是一个确定的值,它表示 X 为真的程度是 0.85, 为假的程度是 0.15. X 还有高阶不确定性,其表示更加复杂. 例如 $x=(a, b)$ ($a, b \in [0, 1], a+b \leq 1$) 可表示 X 的一阶不确定性,其中 a 表示 X 为真的程度, b 表示 X 的假的程度, $u=1-a-b$ 表示 X 不确定的程度,由此可引出区间泛逻辑.

(5) 还可以类似于非标准逻辑那样提出各种非标准泛逻辑. 例如时态泛逻辑、模态泛逻辑、非单调泛逻辑等等.

6 结束语

本文揭示了广泛存在于经验性思维、概率论和各种多值逻辑系统中的泛逻辑现象,从而为建立统一的非精确性推理模型奠定了思想理论基础. 范数为我们研究泛逻辑提供了比较理想的数学工具,研究表明泛逻辑不仅在逻辑上是需要的,而且在数学运算上是可以实现的. 泛逻辑是一个大的家族,它最终将发展成人工智能的基本理论之一,同时泛逻辑运算还可用专门的软件包或 IC 芯片实现,广泛应用于各个领域.

我们将在以后的论文中陆续发表有关研究成果.

参 考 文 献

- 1 何华灿. 人工智能导论. 西安: 西北工业大学出版社, 1988
- 2 田盛丰. 人工智能原理与应用. 北京: 北京理工大学出版社, 1993
- 3 王元元. 计算机中的逻辑学. 北京: 科学出版社, 1991
- 4 王雨田. 现代逻辑科学导引. 北京: 中国人民大学出版社, 1987
- 5 雷蒙德 T 著. 人工智能中的逻辑. 赵沁平译. 北京: 北京大学出版社, 1990
- 6 Kanal L N. Uncertainty in artificial intelligence. Amsterdam, 1986
- 7 Klement E P. Operations of fuzzy sets and fuzzy numbers related to triangular norms. In: 1981 IEEE International Conference on Multiple-Valued Logic. USA: IEEE Service Center, 1981. 218 ~ 225
- 8 Lukasiewicz J. Philosophische bemerkungen zu mehrwertigen systemen des aussagenkalkuls. Comptes rendus des seances de la societie des sciences et des lettres de varsovie. Classe III, 1930, 23: 51 ~ 77
- 9 Bochvar D A. On a 3-valued logical calculus and its applications to the analysis of contradictions. Mathematics Shornik, 1939, 4: 287 ~ 300
- 10 Kleene S C. Introduction to meta mathematics. New Jersey: D Van Nostrand Company, 1952. 332 ~ 340
- 11 何大庆, 赵沁平. 三值逻辑方程和组合逻辑电路函数险象的检测. 北京航空航天大学学报, 1995, 21(3): 38 ~ 44
- 12 甘以炎. 概率论. 北京: 高等教育出版社, 1993