中国科学 : 数学　2016 年　第 46 卷　第 3 期 : 285 ∼ 300
SCIENTIA SINICA　Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

加权 Bergman 空间 A^p_α 上复合算子本质范数的定量估计

段永江[①*], 李宇飞[②]

① 东北师范大学数学与统计学院, 长春 130024;
② 大连理工大学数学科学学院, 大连 116024
E-mail: duanyj086@nenu.edu.cn, liyf495@mail.dlut.edu.cn

收稿日期: 2014-07-16; 接受日期: 2015-02-22; 网络出版日期: 2015-12-02; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11271075)、吉林省科技发展计划 (批准号: 201215008) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20120043120003) 资助项目

摘要　本文主要利用一般形式的 Nevanlinna 计数函数给出了加权 Bergman 空间上的复合算子本质范数的定量估计. 特别地, 得到了 Hardy 空间上复合算子本质范数的最佳下估计:

$$\|C_\varphi\|^p_{e,H^p} \geqslant \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|}.$$

另外, 如果 φ 是内函数的话, 则有

$$\|C_\varphi\|^p_{e,H^p} = \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|}, \quad 1 < p < \infty.$$

关键词　加权 Bergman 空间　Hardy 空间　复合算子　Nevanlinna 计数函数　本质范数
MSC (2010) 主题分类　47B33, 47A30, 47B38

1　引言

设 φ 是复平面上单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的解析函数, 且 X 是由 $\mathbb{D}$ 上的解析函数构成的 Banach 空间, 则 φ 诱导的复合算子按如下方式定义: $C_\varphi(f) = f\circ\varphi$. 当 X 是 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{D})$ $(1\leqslant p<\infty)$ 或是加权 Bergman 空间 $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ $(\alpha>-1, 1\leqslant p<\infty)$ 时, 利用 Littlewood 从属定理, C_φ 是 X 上的有界算子. 下面给出 Hardy 空间和加权 Bergman 空间的具体定义:

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|^p_p = \sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty \right\},$$
$$A^p_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{ f\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{p,\alpha} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p(\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} < \infty \right\}.$$

英文引用格式: Duan Y J, Li Y F. Quantitative estimate of essential norm of the composition operator on A^p_α (in Chinese). Sci Sin Math, 2016, 46: 285–300, doi: 10.1360/012015-45

© 2016《中国科学》杂志社　

Banach 空间 X 上 C_φ 的本质范数就是 C_φ 到 X 上所有紧算子距离的下确界, 记作 $\|C_\varphi\|_{e,X}$. φ 的计数函数定义如下:

$$N_\varphi(w)=\sum_{z\in\varphi^{-1}(w)}\log\frac{1}{|z|},\quad w\in\mathbb{D}\setminus\{\varphi(0)\}.$$

Shapiro [1] 得到了 H^2 上 C_φ 的本质范数的优美等式:

$$\|C_\varphi\|^2_{e,H^2}=\limsup_{|a|\to1}\frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|}. \tag{1.1}$$

同时, Shapiro 还考虑了加权 Bergman 空间 $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ ($\alpha>-1$), 并利用一般形式的 Nevanlinna 计数函数给出了其上复合算子本质范数的一个粗略估计. 令 $\gamma\geqslant1$, 一般形式的 Nevanlinna 计数函数定义如下 (参见文献 [1]):

$$N_{\varphi,\gamma}(w)=\sum_{z\in\varphi^{-1}(w)}\left(\log\frac{1}{|z|}\right)^\gamma,\quad w\in\mathbb{D}\setminus\{\varphi(0)\}.$$

特别地, Shapiro 证明了存在常数 $m,M>0$ 使得

$$m\limsup_{|a|\to1}\frac{N_{\varphi,\alpha+2}(a)}{(-\log|a|)^{\alpha+2}}\leqslant\|C_\varphi\|^2_{e,A^2_\alpha}\leqslant M\limsup_{|a|\to1}\frac{N_{\varphi,\alpha+2}(a)}{(-\log|a|)^{\alpha+2}}. \tag{1.2}$$

人们自然想知道 (1.1) 在更一般的情形下是否成立. 在这方面, 利用零除子理论 [2], Corradini [3] 证明了当 $\alpha=-1,0,1$ 时, 有

$$\|C_\varphi\|^2_{e,A^2_\alpha}=\limsup_{|a|\to1}\frac{N_{\varphi,\alpha+2}(a)}{(-\log|a|)^{\alpha+2}}. \tag{1.3}$$

事实上, 如文献 [4] 指出, 利用 Shimorin [5–7] 的零除子理论的结果, Corradini 的方法适用于 $-1<\alpha\leqslant1$. 在非 Hilbert 空间, 也有许多关于复合算子本质范数的结果, 参见文献 [8–10]. 我们想利用一般形式的 Nevanlinna 计数函数得到一般情形下的加权 Bergman 空间上复合算子本质范数的精确公式. 本文利用文献 [11] 构造一组算子的方法, 得到了部分结果. 希望我们的方法能对问题的最终解决提供帮助. 特别地, 我们得到如下定量估计.

定理 1.1 φ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的解析函数, C_φ 是 $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ ($\alpha>-1$, $1\leqslant p<\infty$) 上的复合算子, 则对任意的 r, $0<r<1$, 有

$$\|C_\varphi\|^p_{e,A^p_\alpha}\leqslant2^p(\alpha+2)\limsup_{|a|\to1}\frac{N_{\varphi,\alpha+2}(a)}{(-\log|a|)^{\alpha+2}}$$

和

$$\|C_\varphi\|^p_{e,A^p_\alpha}\geqslant\frac{(\alpha+2)r^2(1-r)^{2(\alpha+1)}}{2^p}\limsup_{|a|\to1}\frac{N_{\varphi,\alpha+2}(a)}{(-\log|a|)^{\alpha+2}}.$$

Hardy 空间可以看作是加权 Bergman 空间的极限情形, 所以利用一些已有的结果我们可以得到如下结论.

定理 1.2 假设 $1<p<\infty$, 则

$$\|C_\varphi\|^p_{e,H^p}\geqslant\limsup_{|a|\to1}\frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|}.$$

当 $p=1$ 时,

$$\|C_\varphi\|_{e,H^1}\geqslant\frac{1}{2}\limsup_{|a|\to1}\frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|}.$$

定理 1.3 φ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的解析函数, $1 \leqslant p < \infty$, 则

(1) 对 $1 < p < \infty$, φ 是内函数当且仅当

$$\|C_\varphi\|_{e,H^p}^p = \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|} = \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|};$$

(2) 当 $p = 1$, φ 是内函数时, 则有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \leqslant \|C_\varphi\|_{e,H^1} \leqslant \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}.$$

本文结构如下: 第 2 节主要是本文中用到的工具和结果; 第 3 和 4 节分别给出定理 1.1 的上估计和下估计的证明; 最后一节给出定理 1.3 的证明.

2 预备引理

首先, 按照文献 [11] 的方式定义两类算子. 令 $\alpha > -1$, $1 \leqslant p < \infty$, 定义

$$S_n = C_{\psi_n},$$

其中对任意的 $z \in \mathbb{D}$, $n \geqslant 2$, $\psi_n(z) = \frac{n-1}{n}z$. 给定 $f \in A_\alpha^p$, 则 $|f|^p$ 次调和, 因此,

$$\begin{aligned}
\|S_n f\|_{A_\alpha^p}^p &= \int_{\mathbb{D}} \left|f\left(\frac{n-1}{n}z\right)\right|^p (1-|z|^2)^\alpha(\alpha+1)\frac{dA(z)}{\pi} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(\frac{n-1}{n}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^p d\theta\right)(\alpha+1)2r(1-r^2)^\alpha dr \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p d\theta\right)(\alpha+1)2r(1-r^2)^\alpha dr \\
&= \|f\|_{A_\alpha^p}^p.
\end{aligned}$$

故 $\|S_n\| \leqslant 1$. 且因为

$$\lim_{|z|\to 1}\frac{1-|z|}{1-|\psi_n(z)|} = 0,$$

故利用文献 [12, 定理 3.5] 和 [13, 定理 2.44] 可以得到 S_n 是 A_α^p 上的紧算子. 令 $F_n = I - S_n$, 则对任意的 $n \geqslant 2$, $\|F_n\| \leqslant \|I\| + \|S_n\| \leqslant 2$.

下面利用算子 S_n 和 F_n 来计算 A_α^p 上复合算子的本质范数.

一方面, 对任意的 $n \geqslant 2$,

$$\|C_\varphi\|_e = \|C_\varphi S_n + C_\varphi F_n\|_e \leqslant \|C_\varphi F_n\|. \tag{2.1}$$

另一方面, 对 A_α^p 上任意一个紧算子和任意 $n \geqslant 2$, 有

$$\|C_\varphi - K\| \geqslant \frac{\|F_n\|}{2}\|C_\varphi - K\| \geqslant \frac{1}{2}\|F_nC_\varphi - F_nK\| \geqslant \frac{1}{2}\|F_nC_\varphi\| - \frac{1}{2}\|F_nK\|. \tag{2.2}$$

下面要证明如下结论:

$$\limsup_{n\to\infty}\|F_nK\| = 0. \tag{2.3}$$

事实上, 因为 $A(\mathbb{D})$ 在 A^p_α 上稠密, 利用 Lebesgue 控制收敛定理, 很容易可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\|F_nf\|^p_{A^p_\alpha}=0,\quad \forall\, f\in A^p_\alpha. \tag{2.4}$$

令

$$B^1_{A^p_\alpha}=\{f\in A^p_\alpha:\|f\|\leqslant 1\}$$

为 A^p_α 的闭单位球, 因为 K 是紧的, 故 $KB^1_{A^p_\alpha}$ 是预紧集, 因此对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $KB^1_{A^p_\alpha}$ 的有限 ε-网 $(Kf_1,\ldots,Kf_m)$, 其中 $f_i\in B^1_{A^p_\alpha}$. 利用 (2.4), 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任意的 $n>N$, $1\leqslant i\leqslant m$, 有 $\|F_nKf_i\|_{A^p_\alpha}<\varepsilon$, 对任意的 $f\in B^1_{A^p_\alpha}$, 存在 $j\in\{1,\ldots,m\}$ 使得 $\|Kf-Kf_j\|_{A^p_\alpha}<\varepsilon$. 因此对任意的 $n>N$, 有

$$\|F_nKf\|_{A^p_\alpha}\leqslant\|F_n(Kf-Kf_j)\|_{A^p_\alpha}+\|F_nKf_j\|_{A^p_\alpha}<2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

这意味着对任意的 $n\geqslant N$, $\|F_nK\|\leqslant\varepsilon$, 这样就完成了 (2.3) 的证明. □

利用 (2.1)–(2.3) 可以得到

$$\frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty}\|F_nC_\varphi\|\leqslant\|C_\varphi\|_{e,A^p_\alpha}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\|C_\varphi F_n\|. \tag{2.5}$$

给定 $a\in\mathbb{D}$, 令

$$f_a(z)=\left[\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\right]^{\frac{\alpha+2}{p}}, \tag{2.6}$$

则 $\|f_a\|_{A^p_\alpha}=1$. 对任意的 $n\geqslant 2$,

$$\|F_nC_\varphi\|\geqslant\|F_nC_\varphi f_a\|_{A^p_\alpha}\geqslant\|C_\varphi f_a\|_{A^p_\alpha}-\|S_nC_\varphi f_a\|_{A^p_\alpha}.$$

对任意给定的 $n\geqslant 2$, $\varphi(\frac{n-1}{n}\mathbb{D})$ 包含在 $\mathbb{D}$ 的一个紧子集中, 因此对任意的 $z\in\mathbb{D}$, 有

$$|S_nC_\varphi f_a(z)|=\left|\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}\varphi(\frac{n-1}{n}z))^2}\right|^{\frac{\alpha+2}{p}}\leqslant C_n(1-|a|^2)^{\frac{\alpha+2}{p}},$$

其中每一个 C_n 是与 z 的选择无关的常数. 因此对任意的 $n\geqslant 2$, 如果 $|a|\to 1$, 则 $\|S_nC_\varphi f_a\|_{A^p_\alpha}\to 0$. 因此,

$$\|F_nC_\varphi\|\geqslant\limsup_{|a|\to 1}\|C_\varphi f_a\|_{A^p_\alpha},\quad\forall\, n\geqslant 2.$$

故利用 (2.5) 和上式, 我们有

$$\frac{1}{2}\limsup_{|a|\to 1}\|C_\varphi f_a\|_{A^p_\alpha}\leqslant\|C_\varphi\|_{e,A^p_\alpha}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\|C_\varphi F_n\|. \tag{2.7}$$

幸运的是, 如果 $1<p<\infty$, (2.7) 可以得到更精确的下界估计. 为了给出证明, 我们需要如下引理.

引理 2.1 假设 $\alpha>-1$, $1<p<\infty$. f_a 的定义见 (2.6), 则下面的三条等价:

(1) 当 $|a|\to 1$, $\{f_a\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上逐点收敛到 0;

(2) 当 $|a|\to 1$, $\{f_a\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 0;

(3) 当 $|a|\to 1$, A^p_α 中的网 $\{f_a\}$ 弱收敛到 0.

证明 证明类似于文献 [14, 引理 2.5], 故予以省略. □

(2.7) 可以作如下改进:

$$\|C_\varphi\|_{e,A^p_\alpha} \geqslant \limsup_{|a|\to 1} \|C_\varphi f_a\|_{A^p_\alpha}. \tag{2.8}$$

事实上, 对 A^p_α 上的任意紧算子 K, 有

$$\|C_\varphi - K\| \geqslant \|(C_\varphi - K)f_a\|_{A^p_\alpha} \geqslant \|C_\varphi f_a\|_{A^p_\alpha} - \|Kf_a\|_{A^p_\alpha}.$$

则由引理 2.1, 就可以得到 (2.8). □

下面的事实说明 (2.8) 对 $p = 1$ 不适用.

引理 2.2 当 $|a| \to 1$, 则 A^1 中的网 $\{f_a\}$ 并不弱收敛到 0.

要证明引理 2.2, 首先需要一些定义和事实. $\mathbb{D}$ 上定义的 Bloch 空间就是满足 $\sup\{(1-|z|^2)|f'(z)| : z \in \mathbb{D}\} < \infty$ 的所有 $\mathbb{D}$ 上的解析函数构成的空间. 小 Bloch 空间中就是 Bloch 空间中满足

$$\lim_{|z|\to 1} (1-|z|^2)|f'(z)| = 0$$

的元素构成的子空间.

引理 2.3 [15, 定理 15] 定义如下积分对:

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\alpha(\alpha+1)\frac{dA(z)}{\pi},$$

则在等价范数意义下, 我们有如下对偶关系:

$$(\mathcal{B}_0)^* \cong A^1_\alpha, \quad (A^1_\alpha)^* \cong \mathcal{B}.$$

引理 2.2 的证明 令

$$g(z) = \log\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}.$$

易证 $g \in \mathcal{B}$. 令 $0 < a < 1$, 则利用

$$\frac{1}{(1-z)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}z^n, \quad |z| < 1, \quad \beta > 0,$$

我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 1}\langle f_a, g\rangle_0 &= \lim_{a\to 1}\int_{\mathbb{D}} f_a(z)\overline{g(z)}\frac{dA(z)}{\pi} \\
&= \lim_{a\to 1}\lim_{t\to 1}\int_{t\mathbb{D}} f_a(z)\overline{g(z)}\frac{dA(z)}{\pi} \\
&= \lim_{a\to 1}\lim_{t\to 1}(1-a^2)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+4)}{\Gamma(n+1)\Gamma(4)}\frac{a^n}{n}\int_{t\mathbb{D}} z^n\bar{z}^n\frac{dA(z)}{\pi} \\
&= \lim_{a\to 1}\lim_{t\to 1}(1-a^2)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{3!n}a^n t^{2(n+1)} \\
&\geqslant \lim_{a\to 1}\lim_{t\to 1}(1-a^2)^2\frac{t^2}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^{2n}a^n
\end{aligned}$$

$$= \lim_{a\to 1}\lim_{t\to 1}(1-a^2)^2\frac{t^2}{6}\left(\frac{1}{(1-at^2)^2}-1\right) = \frac{2}{3}.$$

利用引理 2.3, 完成了引理 2.2 的证明. □

下面给出一些本文中接下来要用到的记号. 假设 φ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 上的解析函数, 令 $\mathbb{D}' = \mathbb{D}\setminus\{z\in\mathbb{D}: \varphi'(z)=0\}$, 存在一组互不相交的半开半闭集 $\{R_j\}$, 其并集为 $\mathbb{D}'$, 使得 φ 在每个 R_j 上是单射. 令 z_j 为 φ 限制在 R_j 上的逆映射, 使得 z_j 是 $\varphi(R_j)$ 到 R_j 的一一映射. 令 χ_j 为集合 $\varphi(R_j)$ 上的特征函数.

下面是著名的变量替换公式.

引理 2.4 [13, 定理 2.32] φ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 上的解析函数, g 和 h 是 $\mathbb{D}$ 上的非负可测函数, 则

$$\int_{\mathbb{D}} g(\varphi(z))|\varphi'(z)|^2 h(z)\frac{dA(z)}{\pi} = \int_{\varphi(\mathbb{D})} g(\omega)\sum_j \chi_j(\omega)h(z_j(\omega))\frac{dA(\omega)}{\pi},$$

其中 $\omega=\varphi(z)$, $\{z_j(\omega)\}$ 记为 $\varphi(z)-\omega$ 的零点集, 重根按重数计.

我们需要如下公式 (参见文献 [16, (2.1)]):

$$\|f\circ\varphi\|^p_{H^p} = |f(\varphi(0))|^p + \frac{p^2}{2}\int_{\mathbb{D}}|f(\omega)|^{p-2}|f'(\omega)|^2 N_{\varphi,1}(\omega)\frac{dA(\omega)}{\pi}. \tag{2.9}$$

将 $\varphi(z)=rz$ 代入 (2.9), 得到如下引理.

引理 2.5 假设 $p>0$ 且 $f\in H(\mathbb{D})$, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p d\theta = \frac{p^2}{2}\int_{r\mathbb{D}}|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2\log\frac{r}{|z|}\frac{dA(z)}{\pi} + |f(0)|^p.$$

引理 2.6 如果 $0<p<\infty$ 且 $f\in A^p_\alpha$, 则

$$\|f\|^p_{A^p_\alpha} = p^2\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2\left(\int_{|z|}^1 r(1-r^2)^\alpha(\alpha+1)\log\frac{r}{|z|}dr\right)\frac{dA(z)}{\pi} + |f(0)|^p.$$

证明 利用引理 2.5 和 Fubini 定理, 按如下方式计算即可完成证明,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha(\alpha+1)\frac{dA(z)}{\pi}\\
&= \int_0^1\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p d\theta\right)(\alpha+1)2r(1-r^2)^\alpha dr\\
&= \int_0^1\left(\frac{p^2}{2}\int_{r\mathbb{D}}|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2\log\frac{r}{|z|}\frac{dA(z)}{\pi}\right)2r(1-r^2)^\alpha(\alpha+1)dr + |f(0)|^p\\
&= \frac{p^2}{2}\int_0^1\left(\int_{\mathbb{D}}\chi_{r\mathbb{D}}(z)|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2\log\frac{r}{|z|}\frac{dA(z)}{\pi}\right)2r(1-r^2)^\alpha(\alpha+1)dr + |f(0)|^p\\
&= p^2\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2\left(\int_{|z|}^1 r(1-r^2)^\alpha(\alpha+1)\log\frac{r}{|z|}dr\right)\frac{dA(z)}{\pi} + |f(0)|^p.
\end{aligned}$$

证毕. □

引理 2.7 设 $0<|z|<1$, 则

$$\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}{4(\alpha+2)} \leqslant \int_{|z|}^1 r(1-r^2)^\alpha(\alpha+1)\log\frac{r}{|z|}dr \leqslant \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{2}\log\frac{1}{|z|}.$$

证明 易证从略. □

为了方便, 引入如下定义:

$$T(z)=\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{2}\log\frac{1}{|z|},\quad \forall\, z\in\mathbb{D}. \tag{2.10}$$

引理 2.8 [17, 命题 4.23] 令 $\alpha>-1$, $f\in A^1_\alpha$, 则对任意的 $\omega\in\mathbb{D}$,

$$f(\omega)=\int_{\mathbb{D}} f(z)(1-\omega\overline{z})^{-(\alpha+2)}(1-|z|^2)^\alpha(\alpha+1)\frac{dA(z)}{\pi}.$$

3 定理 1.1 的上估计

对任意的 $n\geqslant 2$, $f\in B^1_{A^p_\alpha}$, $\|f\|_{A^p_\alpha}=1$, 令

$$I^1_n(f)=|(F_nf)(\varphi(0))|^p,$$

则由引理 2.6、2.7、变量替换公式 ($\omega=\varphi(z)$) 和 (2.10), 有

$$\begin{aligned}\|C_\varphi(F_nf)\|^p_{A^p_\alpha}-I^1_n(f)&\leqslant p^2\int_{\mathbb{D}}|(F_nf)(\varphi(z))|^{p-2}|(F_nf)'(\varphi(z))|^2|\varphi'(z)|^2T(z)\frac{dA(z)}{\pi}\\&=p^2\int_{\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\sum_j\chi_j(\omega)T(z_j(\omega))\frac{dA(\omega)}{\pi}\\&=I^2_{r,n}(f)+I^3_{r,n}(f),\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中

$$\begin{aligned}I^2_{r,n}(f)&=p^2\int_{r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\sum_j\chi_j(\omega)T(z_j(\omega))\frac{dA(\omega)}{\pi},\\I^3_{r,n}(f)&=p^2\int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\sum_j\chi_j(\omega)T(z_j(\omega))\frac{dA(\omega)}{\pi}.\end{aligned}$$

易见

$$I^2_{r,n}(f)\leqslant p^2\int_{r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\sum_j\chi_j(\omega)\log\frac{1}{|z_j(\omega)|}\frac{dA(\omega)}{\pi}.$$

引理 3.1 G 是 $\mathbb{D}$ 中的任一紧集, 则当 $n\to\infty$, $\sup_{\|f\|_{A^p_\alpha}=1}|F_nf(z)|$ 在 G 上一致收敛到 0.

证明 因为 G 是紧集, 故对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 对任意的 $z\in G$ 和 $\omega\in\mathbb{D}$,

$$\left|\frac{1}{(1-\overline{\omega}z)^{\alpha+2}}-\frac{1}{(1-\overline{\omega}\frac{n-1}{n}z)^{\alpha+2}}\right|<\varepsilon.$$

令 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 利用引理 2.8 和 Hölder 不等式, 则对任意的 $f\in B^1_{A^p_\alpha}$ 有

$$\begin{aligned}|(F_nf)(z)|&=\left|f(z)-f\left(\frac{n-1}{n}z\right)\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{D}}f(\omega)(1-|\omega|^2)^\alpha(\alpha+1)\left(\frac{1}{(1-\overline{\omega}z)^{\alpha+2}}-\frac{1}{(1-\overline{\omega}\frac{n-1}{n}z)^{\alpha+2}}\right)\frac{dA(\omega)}{\pi}\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \varepsilon \int_{\mathbb{D}} |f(\omega)|(1-|\omega|^2)^\alpha(\alpha+1)\frac{dA(\omega)}{\pi} \\
&\leqslant \varepsilon \bigg(\int_{\mathbb{D}} |f(\omega)|^p(1-|\omega|^2)^\alpha(\alpha+1)\frac{dA(\omega)}{\pi} \bigg)^{\frac{1}{p}} \cdot \bigg(\int_{\mathbb{D}} (1-|\omega|^2)^\alpha(\alpha+1)\frac{dA(\omega)}{\pi} \bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

证毕. □

利用引理 3.1, 我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\|f\|_{A^p_\alpha}=1} I^1_n(f) = 0. \tag{3.2}$$

命题 3.1 假设 $\alpha > -1$, $0 < r < 1$, $1 \leqslant p < \infty$, 则

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\|f\|_{A^p_\alpha}=1} p^2 \int_{r\mathbb{D}} |(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2 \sum_j \chi_j(\omega) \log \frac{1}{|z_j(\omega)|} \frac{dA(\omega)}{\pi} = 0.$$

证明 对任意的 $n \geqslant 2$, $\|f\|_{A^p_\alpha} = 1$, 令 $s = \sqrt{r} > r$. $\chi_{[0,r]}$ 和 $\chi_{(r,1]}$ 分别记作集合 $[0,r]$ 和 $(r,1]$ 上的特征函数, 则

$$
\begin{aligned}
&p^2 \int_{r\mathbb{D}} |(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2 \sum_j \chi_j(\omega) \log \frac{1}{|z_j(\omega)|} \frac{dA(\omega)}{\pi} \\
&\quad = II^1_{r,n}(f) + II^2_{r,n}(f) + II^3_{r,n}(f),
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
II^1_{r,n}(f) &= p^2 \int_{r\mathbb{D}} |(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2 \sum_j \chi_j(\omega)\chi_{[0,r]}(|z_j(\omega)|) \log \frac{s}{|z_j(\omega)|} \frac{dA(\omega)}{\pi}, \\
II^2_{r,n}(f) &= p^2 \int_{r\mathbb{D}} |(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2 \sum_j \chi_j(\omega)\chi_{[0,r]}(|z_j(\omega)|) \log \frac{1}{s} \frac{dA(\omega)}{\pi}, \\
II^3_{r,n}(f) &= p^2 \int_{r\mathbb{D}} |(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2 \sum_j \chi_j(\omega)\chi_{(r,1]}(|z_j(\omega)|) \log \frac{1}{|z_j(\omega)|} \frac{dA(\omega)}{\pi}.
\end{aligned}
$$

下面把证明分成三步.

第 1 步 令 $\varphi(z) = \omega$, 利用变量替换公式和引理 2.5, 我们有

$$
\begin{aligned}
II^1_{r,n}(f) &= p^2 \sum_j \int_{\varphi(R_j)\cap r\mathbb{D}} |(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2 \chi_{[0,r]}(|z_j(\omega)|) \log \frac{s}{|z_j(\omega)|} \frac{dA(\omega)}{\pi} \\
&= p^2 \sum_j \int_{\{z\in R_j:|\varphi(z)|\leqslant r\}\cap\{z\in R_j:|z|\leqslant r\}} |(F_nf)(\varphi(z))|^{p-2}|((F_nf)\circ\varphi)'(z)|^2 \log \frac{s}{|z|} \frac{dA(z)}{\pi} \\
&\leqslant p^2 \int_{s\mathbb{D}} |(F_nf)(\varphi(z))|^{p-2}|((F_nf)\circ\varphi)'(z)|^2 \log \frac{s}{|z|} \frac{dA(z)}{\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} |(F_nf)(\varphi(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))|^p \frac{d\theta}{\pi} - 2|F_nf(\varphi(0))|^p.
\end{aligned}
$$

因此令 $G = \varphi(\overline{s\mathbb{D}})$, 由引理 3.1, 可以得到

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\|f\|_{A^p_\alpha}=1} \bigg(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |(F_nf)(\varphi(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))|^p d\theta - 2|(F_nf)(\varphi(0))|^p \bigg) = 0. \tag{3.4}$$

故

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_{A^p_\alpha}=1} II^1_{r,n}(f)=0. \tag{3.5}$$

第 2 步 因为 $s=\sqrt{r}$, 所以, $\log\frac{1}{s}=\log\frac{s}{r}$. 故

$$\begin{aligned} II^2_{r,n}(f) &= p^2\int_{r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\sum_j\chi_j(\omega)\chi_{[0,r]}(|z_j(\omega)|)\log\frac{s}{r}\frac{dA(\omega)}{\pi}\\ &\leqslant p^2\int_{r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\sum_j\chi_j(\omega)\chi_{[0,r]}(|z_j(\omega)|)\log\frac{s}{|z_j(\omega)|}\frac{dA(\omega)}{\pi}\\ &= II^1_{r,n}(f). \end{aligned}$$

因此,

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_{A^p_\alpha}=1} II^2_{r,n}(f)=0. \tag{3.6}$$

第 3 步 下面将证明

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_{A^p_\alpha}=1} II^3_{r,n}(f)=0. \tag{3.7}$$

首先我们需要一些引理.

引理 3.2 [18, 第 288–290 页] 假设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中 0 点的一个邻域, $f\in\mathrm{Hol}(\Omega)$, $f(0',z_n)$ 在 $z_n=0$ 点有 m 重零点 ($z=(z',z_n)\in\mathbb{C}^n$, 其中 $z'\in\mathbb{C}^{n-1}$, $z_n\in\mathbb{C}$), 则存在 n 维开邻域 $\Delta=\Delta'\times\Delta_n\in\Omega$ (Δ' 是 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中以 $0'$ 为心的 $n-1$ 维圆盘, Δ_n 是 $\mathbb{C}$ 中以 0 为心的 1 维圆盘), 使得对每个 $z'\in\Delta'$, $f(z',\cdot)$ 在 Δ_n 上正好有 m 个零点, 重根按重数计算, 且

$$f(z)=W(z)h(z),\quad z\in\Delta,$$

其中 $h\in\mathrm{Hol}(\Delta)$, h 在 Δ 上无零点, 而且

$$W(z)=z_n^m+b_1(z')z_n^{m-1}+\cdots+b_m(z'),$$

这里 $b_j\in\mathrm{Hol}(\Delta')$, $b_j(0')=0$.

引理 3.3 [19, 命题 4.1] (Jensen 公式) 函数 f 在 $\mathbb{D}$ 上解析, $f(0)\neq0$. $0<t<1$, 令 $z_1,\ldots,z_l$ 是 f 在圆盘 $|z|<t$ 上的零点集, 重根按重数计, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(te^{i\theta})|d\theta=\log|f(0)|+\sum_{k=1}^{l}\log\frac{t}{|z_k|}.$$

引理 3.4 令 $\omega_0=\varphi(0)$, 则存在 $\delta_1\in(0,r)$ 使得 $\sum_j\chi_{[\delta_1,1]}(|z_j(\omega)|)\log\frac{1}{|z_j(\omega)|}$ 在 ω_0 是上半连续的.

证明 假设 $\varphi(z)-\omega_0$ 在 $z=0$ 点有 $m\geqslant1$ 重零点. 利用引理 3.2, 存在双圆盘 $\Delta=B(\omega_0,\delta)\times B(0,\delta_1)$ 使得对每个 $\omega\in B(\omega_0,\delta)$, $\varphi(z)-\omega$ 在 $B(0,\delta_1)$ 上正好有 m 个零点 $z_1(\omega),\ldots,z_m(\omega)$ (重根按重数计). 按如下方式在 $B(\omega_0,\delta)\times\mathbb{D}$ 上定义函数 $g(\omega,z)$:

$$g(\omega,z)=\frac{\varphi(z)-\omega}{(z-z_1(\omega))\cdots(z-z_m(\omega))},\quad w\in B(\omega_0,\delta),\quad z\in\mathbb{D}, \tag{3.8}$$

其中

$$(z-z_1(\omega))\cdots(z-z_m(\omega))=z^m+b_1(\omega)z^{m-1}+\cdots+b_m(\omega).$$

由引理 3.2 可知, $g(\omega,z)\in \mathrm{Hol}(\Delta)$ 且在 Δ 上没有零点, 另外, 对任意的 $j\in\{1,\ldots,m\}$, $b_j(\omega)\in \mathrm{Hol}(B(\omega_0,\delta))$, $b_j(\omega_0)=0$. 对函数 $g(\omega,z)$ 运用引理 3.3, 当 $w\in B(w_0,\delta)$ 时,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(\omega,t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|d\theta=\log|g(\omega,0)|+\sum_{k=m+1}^{l}\log\frac{t}{|z_j(\omega)|},\tag{3.9}$$

其中 $0<t<1$, $z_{m+1}(\omega),\ldots,z_l(\omega)$ 为 $\varphi-\omega$ 在 $\delta_1\leqslant|z|<t$ 上的零点.

由 $g(\omega,z)\in\mathrm{Hol}(\Delta)$ 且在 Δ 上无零点, 我们有 $\log|g(\omega,0)|$ 在 $B(\omega_0,\delta)$ 上连续. 下面先考虑 (3.9) 的左半部分:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(\omega,t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|d\theta=P_1(\omega)+P_2(\omega),$$

其中

$$P_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-\omega|d\theta,$$
$$P_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{1}{(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z_1(\omega))\cdots(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z_m(\omega))}\right|d\theta.$$

因为对任意的 $\theta\in[0,2\pi]$, $\omega\in B(\omega_0,\delta)$, $\log|\varphi(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-\omega|\leqslant\log 2$. 由 Fatou 引理, 我们有

$$\limsup_{\omega\to\omega_0}P_1(\omega)\leqslant P_1(\omega_0).$$

另外, 因为 $b_j(\omega)\in\mathrm{Hol}(B(\omega_0,\delta))$, $t>\delta_1$, 所以, $P_2(\omega)$ 在 ω_0 点连续. 因此, 由 (3.9) 知, $\sum_{k=m+1}^{l}\log\frac{t}{|z_j(\omega)|}$ 在 ω_0 点上半连续. 当 $t\to1$, 则函数 $\sum_{k=m+1}^{l}\log\frac{t}{|z_j(\omega)|}$ 逐点递增到 $\sum_{k=m+1}^{\infty}\log\frac{1}{|z_j(\omega)|}$. 故

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\log\frac{1}{|z_j(\omega)|}$$

在 ω_0 点上半连续. □

引理 3.5 [20, 推论 2.4.7] 假设 $f\in H^2$ 且 $f\neq0$, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 f 不为零的零点集, 则 $\prod_{k=1}^{\infty}|z_k|$ 收敛.

引理 3.6 [20, 定理 2.4.8] 如果对任意的 k, $0<r_k<1$, 则 $\prod_{k=1}^{\infty}r_k$ 收敛当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty}(1-r_k)$ 收敛.

(3.7) 的证明 利用引理 3.5 和 3.6, 则存在 $M_{\omega_0}>0$ 使得

$$\sum_j\chi_{(\delta_1,1]}(|z_j(\omega_0)|)\log\frac{1}{|z_j(\omega_0)|}<M_{\omega_0}.$$

再由引理 3.4, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_0>0$ 使得

$$\sum_j\chi_{(\delta_1,1]}(|z_j(\omega)|)\log\frac{1}{|z_j(\omega)|}<M_{\omega_0}+\varepsilon,\quad \omega\in B(\omega_0,\delta_0).$$

由 $N_\varphi(\omega)$ 在 $\mathbb{D}\backslash\{\omega_0\}$ 上连续 (参见文献 [1, 注 4.6]), 则存在 $M_1>0$ 使得在 $\mathbb{D}\backslash B(\omega_0,\delta_0)$ 上 $N_\varphi(\omega)<M_1$. 因此令 $M_r=\max\{M_1,M_{\omega_0}+\varepsilon\}>0$ 使得

$$\sup_{\omega\in r\mathbb{D}}\sum_j\chi_j(\omega)\chi_{(r,1]}(|z_j(\omega)|)\log\frac{1}{|z_j(\omega)|}<M_r.$$

由前文知 $s=\sqrt{r}$, 令 $M_r'>0$ 使得

$$M_r'\log\frac{s}{r}=M_r'\log\frac{1}{\sqrt{r}}\geqslant 1,$$

则利用引理 2.5, 我们有

$$\begin{aligned}II_{r,n}^3(f)&\leqslant M_rp^2\int_{r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\frac{dA(\omega)}{\pi}\\&\leqslant M_r'M_rp^2\int_{r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\log\frac{s}{r}\frac{dA(\omega)}{\pi}\\&\leqslant M_r'M_rp^2\int_{r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\log\frac{s}{|\omega|}\frac{dA(\omega)}{\pi}\\&\leqslant M_r'M_r\bigg(\int_0^{2\pi}|(F_nf)(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p\frac{d\theta}{\pi}-2|(F_nf)(0)|^p\bigg)\\&=M_r'M_r\int_0^{2\pi}|(F_nf)(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p\frac{d\theta}{\pi}.\end{aligned}$$

由引理 3.1, 我们有 (3.7), 这样就证明了第 3 步.

联合 (3.3) 和 (3.5)–(3.7), 就可以证明命题 3.1. □

定理 1.1 上估计的证明 注意到对任意的 $0<|z|<1$, $(1-|z|^2)\leqslant 2\log\frac{1}{|z|}$. 另外, 由 (3.1)、(3.2) 和引理 3.1, 我们有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_{A_\alpha^p}=1}\|C_\varphi(F_nf)\|_{A_\alpha^p}^p&\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_{A_\alpha^p}=1}I_{r,n}^3(f)\\&\leqslant 2^\alpha\limsup_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_{A_\alpha^p}=1}p^2\int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2N_{\varphi,\alpha+2}(\omega)\frac{dA(\omega)}{\pi}\\&\leqslant 2^\alpha\sup_{r\leqslant|\omega|<1}\tau(\omega)\limsup_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_{A_\alpha^p}=1}p^2\int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}|(F_nf)(\omega)|^{p-2}|(F_nf)'(\omega)|^2\\&\quad\times\frac{(1-|\omega|^2)^{\alpha+2}}{4(\alpha+2)}\frac{dA(\omega)}{\pi},\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中

$$\tau(\omega)=\frac{N_{\varphi,\alpha+2}(\omega)}{\frac{(1-|\omega|^2)^{\alpha+2}}{4(\alpha+2)}}.$$

由引理 2.6 和 2.7, 我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_{A_\alpha^p}=1}\|C_\varphi(F_nf)\|_{A_\alpha^p}^p\leqslant 2^\alpha\sup_{r\leqslant|\omega|<1}\tau(\omega)\limsup_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_{A_\alpha^p}=1}\|F_nf\|_{A_\alpha^p}^p.$$

由 (2.7) 和 $\lim_{|\omega|\to1}\frac{\log(1/|\omega|)}{\frac{(1-|\omega|^2)}{2}}=1$, 当 $r\to1$ 时, 则有

$$\|C_\varphi\|_{e,A_\alpha^p}^p\leqslant 2^p(\alpha+2)\limsup_{|\omega|\to1}\frac{N_{\varphi,\alpha+2}(\omega)}{(-\log|\omega|)^{\alpha+2}},$$

这样我们就完成了定理 1.1 上估计的证明. □

4 定理 1.1 下估计的证明

为了计算下估计, 我们需要下面引理.

引理 4.1 φ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 上的解析函数, 对任意给定的 $a\in\mathbb{D}$, 令 $Z_a=\{z\in\mathbb{D}:\varphi(z)=a\}$ (至多可数), 则对任意的 $t_0\in(0,1)$, 存在 $r_0\in(0,1)$ 使得当 $|a|\geqslant r_0$ 时, 对任意的 $z\in Z_a$, $|z|\geqslant t_0$.

证明 令 $r_0=\max\{|\varphi(\omega)|:|\omega|\leqslant t_0\}$, 假设存在 $a\in\mathbb{D}$ 使得 $|a|\geqslant r_0$ 且存在 $z_0\in Z_a$ 使得 $|z_0|<t_0$. 则由最大模原理知, $r_0>|\varphi(z_0)|=|a|$, 这与 r_0 的定义相矛盾. □

引理 4.2 令 $0<|z|<1$, 我们有 $2|z|^2\log\frac{1}{|z|}\leqslant 1-|z|^2$.

证明 因为 $0<|z|<1$, 故

$$\begin{aligned}2\log\frac{1}{|z|}&=\log\frac{1}{1-(1-|z|^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-|z|^2)^n}{n}=(1-|z|^2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-|z|^2)^k}{k+1}\\&\leqslant(1-|z|^2)\bigg(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-|z|^2)^k}{k}\bigg)=(1-|z|^2)\bigg(1+2\log\frac{1}{|z|}\bigg).\end{aligned}$$

因此, $2|z|^2\log\frac{1}{|z|}\leqslant 1-|z|^2$. 引理得证. □

假设 $a\in\mathbb{D}$, 令 $\psi_a(z)=\frac{a-z}{1-\overline{a}z}$, $z\in\mathbb{D}$, 则有下面的引理.

引理 4.3 [1, 推论 6.7] 假设 $\alpha>-1$. 如果 $0<r<|\psi_a(\varphi(0))|$, 则

$$N_{\varphi,\alpha+2}(\psi_a(0))\leqslant\frac{1}{r^2}\int_{r\mathbb{D}}N_{\varphi,\alpha+2}(\psi_a(\omega))\frac{dA(\omega)}{\pi}.$$

引理 4.4 [21, 命题 8] 假设 $0<p<\infty$ 且 $f\in H^p$, 则对任意的 $\alpha\in(-1,\infty)$, $f\in A^p_\alpha$ 且

$$\lim_{\alpha\to-1^+}\|f\|_{A^p_\alpha}=\|f\|_{H^p}.$$

定理 1.1 下估计的证明 联合引理 2.6、2.7、(2.6) 和变量替换公式 ($\omega=\varphi(z)$), 我们有

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f_a\|^p_{A^p_\alpha}&\geqslant p^2\int_{\mathbb{D}}|f_a(\varphi(z))|^{p-2}|f_a'(\varphi(z))|^2|\varphi'(z)|^2\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}{4(\alpha+2)}\frac{dA(z)}{\pi}+|f_a(\varphi(0))|^p\\&=\frac{p^2}{4(\alpha+2)}\int_{\mathbb{D}}|f_a(\omega)|^{p-2}|f_a'(\omega)|^2\sum_j\chi_j(\omega)(1-|z_j(\omega)|^2)^{\alpha+2}\frac{dA(\omega)}{\pi}+|f_a(\varphi(0))|^p\\&=(\alpha+2)|a|^2\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|a|^2)^{\alpha+2}}{|1-\overline{a}\omega|^{2(\alpha+3)}}\sum_j\chi_j(\omega)(1-|z_j(\omega)|^2)^{\alpha+2}\frac{dA(\omega)}{\pi}+|f_a(\varphi(0))|^p.\end{aligned}\tag{4.1}$$

如果 $|a|\to1$, 则 $|f_a(\varphi(0))|^p$ 趋近于 0. 显然,

$$|\psi_a'(\omega)|=\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\omega|^2}.$$

下面开始计算 (4.1) 右边第一项. 令 $\eta=\psi_a(\omega)$, 由变量替换公式可以得到

$$\begin{aligned}&(\alpha+2)|a|^2\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|a|^2)^{\alpha+2}}{|1-\overline{a}\omega|^{2(\alpha+3)}}\sum_j\chi_j(\omega)(1-|z_j(\omega)|^2)^{\alpha+2}\frac{dA(\omega)}{\pi}\\&=(\alpha+2)|a|^2\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|a|^2)^{\alpha}}{|1-\overline{a}\omega|^{2(\alpha+1)}}|\psi_a'(\omega)|^2\sum_j\chi_j(\omega)(1-|z_j(\omega)|^2)^{\alpha+2}\frac{dA(\omega)}{\pi}\end{aligned}$$

$$= \frac{(\alpha+2)|a|^2}{(1-|a|^2)^{\alpha+2}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^{2(\alpha+1)}}{|1-\overline{a}\psi_a(\eta)|^{2(\alpha+1)}} \sum_j \chi_j(\psi_a(\eta))(1-|z_j(\psi_a(\eta))|^2)^{\alpha+2} \frac{dA(\eta)}{\pi}$$
$$= \frac{(\alpha+2)|a|^2}{(1-|a|^2)^{\alpha+2}} \int_{\mathbb{D}} |1-\overline{a}\eta|^{2(\alpha+1)} \sum_j \chi_j(\psi_a(\eta))(1-|z_j(\psi_a(\eta))|^2)^{\alpha+2} \frac{dA(\eta)}{\pi}. \tag{4.2}$$

固定 $0<r<1$, 将上式的积分区域固定在圆盘 $r\mathbb{D}$ 上. 利用 (4.1)、(4.2) 和引理 4.2, 我们有

$$\begin{aligned}
\limsup_{|a|\to 1} \|C_\varphi f_a\|^p_{A^p_\alpha} &\geqslant \limsup_{|a|\to 1} \frac{(\alpha+2)|a|^2(1-r)^{2(\alpha+1)}}{(1-|a|^2)^{\alpha+2}} \int_{r\mathbb{D}} \sum_j \chi_j(\psi_a(\eta))(1-|z_j(\psi_a(\eta))|^2)^{\alpha+2} \frac{dA(\eta)}{\pi} \\
&\geqslant \limsup_{|a|\to 1} \frac{(\alpha+2)|a|^2(1-r)^{2(\alpha+1)}}{(1-|a|^2)^{\alpha+2}} \int_{r\mathbb{D}} \sum_j \chi_j(\psi_a(\eta))(2|z_j(\psi_a(\eta))|^2) \\
&\quad \times \log \frac{1}{|z_j(\psi_a(\eta))|})^{\alpha+2} \frac{dA(\eta)}{\pi} \\
&\geqslant \limsup_{|a|\to 1} \frac{(\alpha+2)|a|^2(1-r)^{2(\alpha+1)}}{(1-|a|^2)^{\alpha+2}} \inf_{\eta\in r\mathbb{D}, j\in\mathbb{N}} 2^{\alpha+2}|z_j(\psi_a(\eta))|^{2(\alpha+2)} \\
&\quad \times \int_{r\mathbb{D}} \sum_j \chi_j(\psi_a(\eta)) \log \frac{1}{|z_j(\psi_a(\eta))|})^{\alpha+2} \frac{dA(\eta)}{\pi}.
\end{aligned}$$

因为当 $|a|\to 1$ 时, $\psi_a(\varphi(0))$ 趋近于 $\partial\mathbb{D}$. 则由上式和引理 4.3 可以得到

$$\begin{aligned}
\limsup_{|a|\to 1} \|C_\varphi f_a\|^p_{A^p_\alpha} &\geqslant \limsup_{|a|\to 1} \frac{(\alpha+2)|a|^2(1-r)^{2(\alpha+1)}}{(1-|a|^2)^{\alpha+2}} \inf_{\eta\in r\mathbb{D}, j\in\mathbb{N}} 2^{\alpha+2}|z_j(\psi_a(\eta))|^{2(\alpha+2)} \\
&\quad \times \int_{r\mathbb{D}} N_{\varphi,\alpha+2}(\psi_a(\eta)) \frac{dA(\eta)}{\pi} \\
&\geqslant \limsup_{|a|\to 1} \frac{(\alpha+2)|a|^2 r^2(1-r)^{2(\alpha+1)}}{(1-|a|^2)^{\alpha+2}} \inf_{\eta\in r\mathbb{D}, j\in\mathbb{N}} 2^{\alpha+2}|z_j(\psi_a(\eta))|^{2(\alpha+2)} N_{\varphi,\alpha+2}(a).
\end{aligned}$$

由引理 4.1, 对任意的 $t_0\in(0,1)$, 存在 $r_0\in(0,1)$, 当 $\inf_{\eta\in r\mathbb{D}}|\psi_a(\eta)|\geqslant r_0$ 时, 有

$$\inf_{\eta\in r\mathbb{D}} |z_j(\psi_a(\eta))| \geqslant t_0.$$

注意到当 $|a|\to 1$ 时, $|\psi_a|$ 在 $r\mathbb{D}$ 上一致趋近于 1, 因此对于 r_0, 存在 $s_0\in(0,1)$, 当 $|a|\geqslant s_0$ 时,

$$\inf_{\eta\in r\mathbb{D}} |\psi_a(\eta)| \geqslant r_0.$$

故对任意的 $t_0\in(0,1)$, 存在 $s_0\in(0,1)$, 当 $|a|\geqslant s_0$ 时, $\inf_{\eta\in r\mathbb{D}, j\in\mathbb{N}}|z_j(\psi_a(\eta))|\geqslant t_0$. 因此, 我们有

$$\limsup_{|a|\to 1} \inf_{\eta\in r\mathbb{D}, j\in\mathbb{N}} |z_j(\psi_a(\eta))| = 1.$$

由 (2.7) 和 $\lim_{|a|\to 1} \frac{\log\frac{1}{|a|}}{\frac{1-|a|^2}{2}} = 1$, 我们得到

$$\|C_\varphi\|^p_{e,A^p_\alpha} \geqslant \frac{(\alpha+2)r^2(1-r)^{2(\alpha+1)}}{2^p} \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_{\varphi,\alpha+2}(a)}{(-\log|a|)^{\alpha+2}}.$$

证毕. □

注 4.1 显然,

$$\sup_{0<r<1} r^2(1-r)^{2(\alpha+1)} = \frac{(\alpha+1)^{2(\alpha+1)}}{(\alpha+2)^{2(\alpha+2)}}.$$

令 $m_{\alpha,p} = \frac{(\alpha+1)^{2(\alpha+1)}}{2^p(\alpha+2)^{2\alpha+3}}$, 则

$$\|C_\varphi\|^p_{e,A^p_\alpha} \geqslant m_{\alpha,p} \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_{\varphi,\alpha+2}(a)}{(-\log|a|)^{\alpha+2}}.$$

当 $1<p<\infty$, 我们可以利用改进的下估计公式 (2.8) 替换 (2.7) 的下估计, 因此,

$$m_{\alpha,p} = \frac{(\alpha+1)^{2(\alpha+1)}}{(\alpha+2)^{2\alpha+3}}.$$

特别地, $\alpha\to -1$, $m_{\alpha,p}\to 1$. 由引理 4.4 知, 在 Hardy 空间 $H^p, 1<p<\infty$ 上, $m_{\alpha,p}=1$, 也即

$$\|C_\varphi\|^p_{e,H^p} \geqslant \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|}. \tag{4.3}$$

当 $p=1$ 时,

$$\|C_\varphi\|_{e,H^1} \geqslant \frac{1}{2} \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|}. \tag{4.4}$$

5 特殊情形

定理 5.1 令 φ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 上的解析函数, $1\leqslant p<\infty$, 则

(1) 当 $1<p<\infty$ 时, φ 是内函数当且仅当

$$\|C_\varphi\|^p_{e,H^p} = \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|} = \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}; \tag{5.1}$$

(2) 当 $p=1$, 且 φ 是内函数时,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \leqslant \|C_\varphi\|_{e,H^1} \leqslant \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}. \tag{5.2}$$

引理 5.1 [22, 第 59 页] φ 是内函数当且仅当

$$\|C_\varphi : H^2\to H^2\|^2 = \|C_\varphi\|^2_{e,H^2} = \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|} = \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}. \tag{5.3}$$

引理 5.2 [14, 命题 2.15] 假设 $1\leqslant p<\infty$, φ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 上的解析函数, 则有

$$\|C_\varphi : H^p\to H^p\|^p = \|C_\varphi : H^2\to H^2\|^2. \tag{5.4}$$

定理 5.1 的证明 如果 $1\leqslant p<\infty$ 且 φ 是内函数, 则联合 (5.3) 和 (5.4), 有

$$\begin{aligned}\|C_\varphi\|^p_{e,H^p} &\leqslant \|C_\varphi : H^p\to H^p\|^p = \|C_\varphi : H^2\to H^2\|^2\\ &= \|C_\varphi\|^2_{e,H^2} = \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|} = \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

联合 (5.5)、(4.3) 和 (4.4), 定理得证. □

推论 5.1 假设 $1<p<\infty$. 当 φ 是内函数时, 则 $\|C_\varphi: H^p\to H^p\|=\|C_\varphi\|_{e,H^p}$.

证明 联合 (5.1)、(5.3) 和 (5.4) 易得. □

但是推论 5.1 的逆命题不正确. 由下可知.

推论 5.2 假设 $1<p<\infty$, $\varphi(z)=sz+t$, $|s|+|t|\leqslant 1$, $|t|<1$, 则 $\|C_\varphi: H^p\to H^p\|=\|C_\varphi\|_{e,H^p}$ 当且仅当 $|s|+|t|=1$.

引理 5.3 [23, 定理 3] 令 $\varphi(z)=sz+t$, 其中 $|s|+|t|\leqslant 1$, 则

$$\|C_\varphi: H^2\to H^2\|^2=\frac{2}{1+|s|^2-|t|^2+\sqrt{(1-|s|^2+|t|^2)^2-4|t|^2}}. \tag{5.6}$$

推论 5.2 的证明 因为 φ 是单射, 由文献 [24, 公式 (3)] 知,

$$\|C_\varphi\|_{e,H^p}^p=\Big[\min_{\xi\in\partial\mathbb{D}}|\varphi'(\xi)|\Big]^{-1}=\frac{1}{|s|}. \tag{5.7}$$

则由 (5.6) 和 (5.7), 我们就可以得到证明. □

致谢 作者对审稿人为本文提供的宝贵意见表示感谢.

参考文献

1 Shapiro J. The essential norm of a composition operator. Ann of Math, 1987, 125: 375–404
2 Hedenmalm H. A factorization theorem for square area-integrable analytic functions. J Reine Angew Math, 1991, 422: 45–68
3 Corradini P. The essential norm of composition operators revisited. Contemp Math, 1998, 213: 167–173
4 Carswell B, Hammond C. Composition operators with maximal norm on weighted Bergman spaces. Proc Amer Math Soc, 2006, 134: 2599–2605
5 Shimorin S. Factorization of analytic functions in weighted Bergman spaces. St Petersburg Math J, 1994, 5: 1005–1022
6 Shimorin S. On a family of conformally invariant operators. St Petersburg Math J, 1996, 7: 287–306
7 Shimorin S. The green function for the weighted biharmonic operator $\Delta(1-|z|^2)^{-\alpha}\Delta$, and factorization of analytic functions. J Math Sci, 1997, 87: 3912–3924
8 Gonzalez F, Rattya J, Vukotic D. On composition operators acting between Hardy and weighted Bergman spaces. Expo Math, 2007, 25: 309–323
9 Galindo P, Laitila J, Lindstrom M. Essential norm estimates for composition operators on BMOA. J Funct Anal, 2013, 265: 629–643
10 Rattya J. The essential norm of a compsition operator into the Q_s-space. J Math Anal Appl, 2007, 333: 787–797
11 Charpentier S. Essential norm of composition operators on the Hardy space H^1 and the weighted Bergman spaces A^p_α on the ball. Arch Math, 2012, 98: 327–340
12 MacCluer B, Shapiro J. Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces. Canad J Math, 1986, 4: 878–906
13 Cowen C, MacCluer B. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Boca Raton: CRC Press, 1995
14 Hammond C. On the norm of a composition operator. PhD Thesis. Charlattesville: University of Virginia, 2003
15 Zhu K. Duality of Bloch space and norm convergence of taylor series. Michigan Math J, 1991, 38: 89–101
16 Smith W. Composition operators between Bergman and Hardy spaces. Trans Amer Math Soc, 1996, 348: 2331–2348
17 Zhu K. Operator Theory in Function Spaces. 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 2007
18 Rudin W. Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. New York: Springer, 1980
19 Hedenmalm H, Korenblum B, Zhu K. Theory of Bergman Spaces. New York: Springer, 2000
20 Martinez-Avendano R, Rosenthal P. An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space. New York: Springer, 2007
21 Zhu K. Translating inequalities between Hardy and Bergman spaces. Amer Math Monthly, 2004, 111: 520–525
22 Shapiro J. What do composition operators know about inner functions? Monatsh Math, 2000, 130: 57–70
23 Cowen C. Linear fractional composition operators on H^2. Integral Equations Operator Theory, 1988, 11: 151–160

24 Bourdon P, Shapiro J. Riesz composition operators. Pacific J Math, 1997, 181: 231–246

Quantitative estimate of essential norm of the composition operator on A^p_α

DUAN YongJiang & LI YuFei

Abstract In this paper, we get quantitative estimate of the essential norm of the composition operator C_φ on the weighted Bergman space $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ ($\alpha > -1$, $1 \leqslant p < \infty$) in terms of the generalized Nevanlinna counting function. In particular, when $\alpha \to -1$, we find that on the Hardy space H^p ($1 < p < \infty$), it holds that

$$\|C_\varphi\|^p_{e,H^p} \geqslant \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|}.$$

Moreover, if φ is an inner function, we have

$$\|C_\varphi\|^p_{e,H^p} = \limsup_{|a|\to 1} \frac{N_\varphi(a)}{-\log|a|}, \quad 1 < p < \infty.$$

Keywords **weighted Bergman space, Hardy space, composition operator, Nevanlinna counting function, essential norm**

MSC(2010) **47B33, 47A30, 47B38**

doi: 10.1360/012015-45