



# 精细积分方法研究综述

高强<sup>①②\*</sup>, 谭述君<sup>①③</sup>, 钟万勰<sup>①②</sup>

① 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024;

② 大连理工大学工程力学系, 大连 116024;

③ 大连理工大学航空航天学院, 大连 116024

\* E-mail: qgao@dlut.edu.cn

收稿日期: 2016-05-31; 接受日期: 2016-09-22; 网络出版日期: 2016-11-24

国家自然科学基金(批准号: 11272076, 11572076)、国家重点基础研究发展计划(编号: 2014CB049000)和教育部新世纪优秀人才支持计划(编号: NCET-13-0072)资助项目

**摘要** 对于线性常微分方程初值和两点边值问题, 精细积分方法可给出计算机上的精确解. 本文总结了精细积分方法的基本思想和算法的进一步发展. 在初值问题精细积分方法方面, 详细综述了精细积分方法的基本思想、对非齐次项的处理技术、大规模问题求解技术以及时变、非线性微分方程的求解. 在两点边值问题精细积分方法方面, 介绍了处理边值问题的基本思想和求解过程, 总结了两点边值问题精细积分方法在各个领域的应用. 最后, 讨论了初值和边值问题精细积分方法的联系和区别, 从而为精细积分方法的理解和应用提供了新的视角.

**关键词** 精细积分方法, 矩阵指数, 初值问题, 两点边值问题, 辛

## 1 引言

常微分方程组的数值计算方法一直是备受人们关注的领域<sup>[1~4]</sup>. 基于有限差分的基本思想, 众多学者发展了大量的数值方法, 如 Runge-Kutta 法、Newmark 法、Wilson-θ 法等<sup>[1~4]</sup>. 但有限差分方法常常很难兼顾计算精度、计算效率和稳定性这 3 个重要的算法性能. 因此, 建立一种高精度、高稳定性的数值计算方法有着重要的科学意义和实际应用价值.

针对线性定常微分方程组的初值问题, 钟万勰教授于 1991 年提出了矩阵指数的精细积分计算方法<sup>[5]</sup>, 该方法避免了由于精细划分导致的计算机截断

误差, 将矩阵指数的数值解提高到计算机的精度. 这种方法很快被应用到结构动力初值问题的求解<sup>[6~8]</sup>. 在此基础上, 结合计算结构力学与最优控制的模拟理论, 钟万勰教授又建立了两点边值问题的精细积分方法<sup>[9~11]</sup>. 对于线性定常系统, 无论是初值还是两点边值问题, 精细积分方法都可给出计算机上的精确解, 而且几乎与步长无关. 精细积分方法提出后, 已被广泛应用于结构动力响应、最优控制、随机振动、热传导、波传播、复杂动力弹塑性分析、结构优化设计、刚性问题、动态载荷识别、Maxwell 方程求解、偏微分方程求解等众多领域. 例如, 将精细积分方法与虚拟激励方法相结合, 成功解决了复杂结构随机

**引用格式:** 高强, 谭述君, 钟万勰. 精细积分方法研究综述. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 1207~1218  
Gao Q, Tan S J, Zhong W X. A survey of the precise integration method (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 1207~1218, doi: 10.1360/N092016-00205

振动问题的计算瓶颈问题<sup>[12]</sup>; 基于精细积分算法开发的 LQG/Hinf 最优控制系统设计与仿真工具箱(PIMCS ToolBox)<sup>[13,14]</sup>, 具有更高的精度和效率, 并且填补了当前主流控制系统设计软件 MATLAB 在有限长时间时变控制系统设计功能上的空白, 现已被哈尔滨工业大学、南京航空航天大学、国防科学技术大学等学者应用于航空航天领域的快速机动控制问题研究<sup>[15-17]</sup>.

本文主要从算法角度总结了精细积分方法的基本思想和进一步的发展情况, 就精细积分方法的进一步发展做出展望. 由于本文的总结侧重算法角度, 对大量应用精细积分方法的文献不一一列举.

## 2 初值问题的精细积分方法

### 2.1 初值问题的描述

工程中大量的瞬态问题都可以采用如下的线性常系数微分方程组来描述:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (1)$$

例如, 对于热传导问题, 将空间坐标离散后可得到如下方程:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0. \quad (2)$$

由于矩阵  $\mathbf{C}$  为正定矩阵, 通过简单的求逆即可得到式(1)的形式. 对于结构动力学问题, 其控制方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0. \quad (3)$$

通过引入状态变量  $\mathbf{v} = \{\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T\}^T$ , 也可以转化为式(1)的形式. 以上是比较常见的两类重要微分方程, 还有大量其他微分方程, 都可以采用状态方程式(1)的形式描述.

对于线性常微分方程, 式(1)中的系统矩阵  $\mathbf{H}$  是常数矩阵, 而非齐次项  $\mathbf{f}$  只是时间的函数. 对于这类方程, 其解可采用如下的 Duhamel 积分表示为

$$\mathbf{v}(t) = \exp(\mathbf{H}t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp[\mathbf{H}(t-\tau)]\mathbf{f}(\tau)d\tau. \quad (4)$$

如果采用等时间步长  $\eta$  将时间域划分为  $t(0) = t_0$ ,  $t(\eta) = t_1, \dots, t(k\eta) = t_k, \dots$ , 则可得到式(4)的递推形式为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \exp(\mathbf{H}\eta)\mathbf{v}_k + \int_0^\eta \exp[\mathbf{H}(\eta-\tau)]\mathbf{f}(t_k + \tau)d\tau, \quad (5)$$

其中,

$$\exp(\mathbf{H}\eta) = \mathbf{I} + \mathbf{H}\eta + (\mathbf{H}\eta)^2/2 + (\mathbf{H}\eta)^3/3! + \dots \quad (6)$$

是矩阵  $\mathbf{H}\eta$  的矩阵指数.

钟万勰教授以式(5)和(6)为基础, 提出了矩阵指数计算的精细积分方法<sup>[5-8]</sup>, 并在此基础上给出了瞬态初始问题的高精度、高稳定性的数值求解方法. 在本节的以下部分, 本文给出精细积分方法的主要思想, 并综述该算法的发展概况.

### 2.2 矩阵指数的精细积分方法

矩阵指数不仅是微分方程求解的关键问题, 也是控制理论、运输、波导等领域的关键问题, 文献[18]曾讨论了 19 种计算矩阵指数的方法及其局限性, 并于 25 年后再予回顾<sup>[19]</sup>, 指出计算矩阵指数的问题并未完全解决, 可见其重要性. 钟万勰<sup>[5-8]</sup>提出的精细积分方法, 大大提高了矩阵指数的计算精度与稳定性.

#### 2.2.1 基于 Taylor 级数近似的精细积分方法

矩阵指数的精细积分方法<sup>[5-8]</sup>有两个要点: 1) 加法定理, 即  $2^N$  类算法; 2) 将注意力放在增量上, 而不是全量上. 矩阵指数的加法定理为

$$\exp(\mathbf{H}\eta) \approx \exp(\mathbf{H}\eta/m)^m, \quad m = 2^N. \quad (7)$$

为了提高精度可以取  $N = 20$ . 对于很小的  $\tau = \eta/m$ , 可采用 Taylor 级数展开  $M$  项(这里取  $M = 4$ )近似矩阵指数, 即

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{H}\tau) &\approx \mathbf{I} + \mathbf{R}, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{H}\tau + (\mathbf{H}\tau)^2/2! + (\mathbf{H}\tau)^3/3! + (\mathbf{H}\tau)^4/4!. \end{aligned} \quad (8)$$

然后利用加法定理(7)可以得到  $\exp(\mathbf{H}\eta)$  的近似解为

$$\exp(\mathbf{H}\eta) = (\mathbf{I} + \mathbf{R})^{2^N} = (\mathbf{I} + 2\mathbf{R} + \mathbf{R}^2)^{2^{N-1}}. \quad (9)$$

这是精细积分方法的第一个要点. 值得注意的是, 在执行方程(9)的平方运算时, 切忌将单位阵  $\mathbf{I}$  与增量  $\mathbf{R}$  直接相加. 因为  $\mathbf{R}$  是小量, 当它与单位阵  $\mathbf{I}$  相加时, 就会成为其尾数, 在计算机的舍入误差操作中, 其精度丧失殆尽. 在计算过程中只能计算和存储增量, 这是精细积分方法的第二个要点. 即在  $N$  次循环计算过程中, 执行以下运算

$$\mathbf{R} \Leftarrow 2\mathbf{R} + \mathbf{R}^2. \quad (10)$$

循环完成获得  $\mathbf{R}$  之后, 再执行:

$$\exp(\mathbf{H}\eta) = \mathbf{I} + \mathbf{R}. \quad (11)$$

由于  $N$  次乘法之后,  $\mathbf{R}$  已不再是小量矩阵了, 这个加法已没有严重的舍入误差了. 以上便是矩阵指数计算的精细积分方法的主要思想<sup>[5~8]</sup>.

需要指出的是, 精细积分方法的基本思想还可应用于很多其他基本问题的求解. 文献[20]将精细积分方法的思想应用于椭圆函数的计算, 得到了比传统方法更为精确和稳定的结果. 文献[21]用精细积分方法研究矩阵导数的计算, 避免了谱分解简并的影响. 文献[22]则用精细积分方法改善了矩阵正/余弦函数的计算. 文献[23]利用精细积分方法提出了一种求解病态线性代数方程组的方法.

### 2.2.2 基于 Padé 级数近似的精细积分方法

在精细积分方法提出后, 基于相同的思想, 文献[24]提出了基于 Padé 级数近似的精细积分方法, 下面给出其基本思路. 由于 Padé 级数逼近比 Taylor 级数逼近具有更好的精度和稳定性<sup>[18]</sup>, 因此采用 Padé 级数展开来近似初始区段的矩阵指数可达到更好的精度和效率. 对于小区段  $\tau = \eta/m$ , 可采用  $M$  项 Padé 级数近似矩阵指数, 即:

$$\exp(\mathbf{H}\tau) \approx [\mathbf{D}_M(\mathbf{H}\tau)]^{-1} \mathbf{N}_M(\mathbf{H}\tau), \quad (12)$$

其中,

$$\mathbf{N}_M(\mathbf{H}\tau) = \sum_{j=0}^M \frac{(2M-j)!M!}{(2M)!j!(M-j)!} (\mathbf{H}\tau)^j, \quad (13)$$

$$\mathbf{D}_M(\mathbf{H}\tau) = \sum_{j=0}^M \frac{(2M-j)!M!}{(2M)!j!(M-j)!} (-\mathbf{H}\tau)^j.$$

同样, 为了避免舍入误差, 在使用加法定理时, 也只计算和存储增量部分. 为此将  $\mathbf{N}_M(\mathbf{H}\tau)$  和  $\mathbf{D}_M(\mathbf{H}\tau)$  表示为如下形式:

$$\mathbf{N}_M(\mathbf{H}\tau) = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{H}\tau), \quad (14)$$

$$\mathbf{D}_M(\mathbf{H}\tau) = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{H}\tau),$$

其中,

$$\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{H}\tau) = \sum_{j=1}^M \frac{(2M-j)!M!}{(2M)!j!(M-j)!} (\mathbf{H}\tau)^j, \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{H}\tau) = \sum_{j=1}^M \frac{(2M-j)!M!}{(2M)!j!(M-j)!} (-\mathbf{H}\tau)^j.$$

则可得到:

$$\exp(\mathbf{H}\tau) \approx [\mathbf{D}_M(\mathbf{H}\tau)]^{-1} \mathbf{N}_M(\mathbf{H}\tau) = \mathbf{I} + \mathbf{R}, \quad (16)$$

其中,

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{D}})^{-1} (\bar{\mathbf{N}} - \bar{\mathbf{D}}). \quad (17)$$

然后即可对增量部分使用加法定理.

由于在小区段上使用了精度更高的近似, 因此基于 Padé 近似的精细积分方法可给出较基于 Taylor 级数的精细积分方法更高的精度. 但是, 在 Padé 近似中存在矩阵求逆运算, 这会在一定程度上增加计算量.

需要特别强调的是, 如果矩阵  $\mathbf{H}$  是哈密顿矩阵, 则它对应的矩阵指数是辛矩阵. 对于这种情况, 可以证明基于 Padé 近似的精细积分方法给出的矩阵指数是辛矩阵, 因此它是保辛算法. 而基于 Taylor 级数的精细积分虽然可给出非常精确的结果, 但理论上它得到的矩阵指数不能保证一定是辛矩阵.

### 2.2.3 误差分析和精度设计

钟万勰<sup>[6,8]</sup>简单讨论了精细积分方法的精度, 指出只要矩阵  $\mathbf{H}$  的本征值  $\lambda_i$  满足:

$$\text{abs}(\lambda_i) \cdot \eta < 300. \quad (18)$$

则精细积分方法可给出计算机上的精确解(即双精度浮点数的 16 位十进制有效数字). 对于实际问题, 条件(18)即使对于高频振动的估计也是非常保守, 因此可认为精细积分法是无条件稳定的.

显然, 决定区段剖分数目的参数  $N$  和级数截断数目  $M$  直接影响到矩阵指数的计算精度和效率, 因此自适应的选择  $N, M$  是非常有必要的. 文献[25]研究了初始级数逼近的截断误差在  $N$  次循环过程中的扩散问题, 指出数值计算的相对误差不随循环过程的进行而扩散; 而且数值结果的精度仅仅取决于初始级数逼近的精度和矩阵  $\mathbf{H}\eta$  的最大特征模, 这就为精度指定的条件下选择参数  $M, N$  提供了依据. 文献[24,26~30]给出了采用 Taylor 级数逼近和 Padé 级数逼近选择参数  $M, N$  的方法, 进一步完善了精细积分方法.

## 2.3 非齐次项的积分

对于非齐次问题, 由于非齐次项  $f$  的任意性, 如何有效地处理方程(5)中的 Duhamel 积分是需要解决的问题. 对于这个问题发展了许多方案, 以下一一介绍.

### 2.3.1 解析积分方法

钟万勰<sup>[6,8]</sup>在提出精细积分方法时, 将非齐次项在每个积分区段内采用线性近似, 即:

$$\mathbf{f}(t_k + \tau) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 \cdot \tau, \quad 0 < \tau \leq \eta. \quad (19)$$

这时方程(5)中的 Duhamel 积分可解析得到, 从而可给出精确的递推格式, 即:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+1} = \exp(\mathbf{H}\eta) & \left[ \mathbf{v}_k + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{r}_1) \right] \\ & - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{r}_1 + \eta\mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (20)$$

林家浩等人<sup>[31,32]</sup>进一步表明, 如果非齐次项为多项式函数、正/余弦函数、指数函数, 或以上函数的组合时, 方程(5)中的 Duhamel 的积分也可以解析得到, 从而给出精确的递推格式. 而对于一般性的非齐次项, 可以在一个时间步长内, 采用上述函数的组合进行近似.

但是, 如方程(20)所示, 精确的递推格式中需要对系统矩阵  $\mathbf{H}$  的求逆, 因此当矩阵  $\mathbf{H}$  接近奇异或本身就是奇异时, 这种方法不能直接应用. 为避免求逆运算, 很多学者发展了大量的方法, 它们主要可归纳为以下三类, 即齐次扩容(增维)方法、直接数值积分方法和非齐次响应矩阵方法, 下面依次介绍.

### 2.3.2 齐次扩容(增维)方法

齐次扩容方法的基本思想是通过引入扩展的向量, 将非齐次方程扩容为齐次方程, 然后应用精细积分方法求解, 从而避免了矩阵的求逆运算. 顾元宪等人<sup>[33]</sup>首先提出了增维(齐次扩容)技术, 他将非齐次项  $\mathbf{f}$  也用一个微分方程描述, 即:

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{D}\mathbf{f}. \quad (21)$$

然后构造扩展状态向量, 即:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \{\mathbf{v}^T, \mathbf{f}^T\}^T. \quad (22)$$

则非齐次方程(1)可以表示为如下的增维齐次方程:

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

方程(23)可直接应用精细积分方法求解. 该方法将原问题的维数增加了 1 倍, 但由于扩容阵  $\tilde{\mathbf{H}}$  是上三角型, 结合结构动力学的特性, 计算上可作进一步的简化.

文献[34]提出了基于 Taylor 级数的齐次扩容方法. 首先将非齐次项  $\mathbf{f}$  进行 Taylor 级数展开, 即:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_m \cdot t^m + \mathbf{f}_{m-1} \cdot t^{m-1} + \cdots + \mathbf{f}_1 \cdot t + \mathbf{f}_0. \quad (24)$$

然后引入扩展状态向量:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \{\mathbf{v}^T, t^m, t^{m-1}, \dots, t, 1\}^T. \quad (25)$$

则非齐次方程(1)可表示为齐次方程, 其对应的扩容阵  $\tilde{\mathbf{H}}$  为

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{f}_m & \mathbf{f}_{m-1} & \cdots & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_0 \\ 0 & 0 & m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

该方法得到的扩容阵  $\tilde{\mathbf{H}}$  也是上三角型, 增加的维数  $m+1$  由 Taylor 级数展开项数决定. 如果积分区间很大, 必须采用很多 Taylor 级数项才能较好地模拟非齐次项, 这会大大增加扩容阵  $\tilde{\mathbf{H}}$  的规模, 同时也会面临 Taylor 级数的收敛性问题. 文献[35]采用分段低次 Taylor 级数来近似非齐次项, 这虽然能减小  $\tilde{\mathbf{H}}$  的规模, 但由于多项式系数随区段变化, 每个区段都要做一次矩阵指数的精细积分计算, 也会增加计算量. 文献[36]分析了  $\tilde{\mathbf{H}}$  矩阵的结构, 提出了一种减少计算矩阵指数次数的方法, 可在一定程度上提高计算效率.

利用类似的思想, 可以基于 Fourier 级数<sup>[37]</sup>, Legendre, Chebyshev, Hermite, Laguerre 等正交多项式函数系<sup>[38,39]</sup>来构造齐次扩容矩阵. 文献[39]指出基于 Legendre 函数系构造齐次方程具有更高的精度和收敛性.

齐次扩容方法的提出很大程度上是为了避免解析格式中的矩阵求逆运算, 虽然这种方法可以得到很高的精度, 但这是以增加矩阵指数的计算规模为代价的.

### 2.3.3 直接数值积分方法

为了避免解析积分方法中矩阵求逆导致的数值困难, 直接数值积分方法采用数值积分手段直接计算方程(5)中的 Duhamel 积分. 即:

$$\int_0^\eta \exp[\mathbf{H}(\eta-\tau)] \mathbf{f}(t_k + \tau) d\tau = \int_0^\eta \mathbf{g}(\tau) d\tau. \quad (27)$$

方程(27)右端就是普通的函数积分, 可以采用常用的 Simpson, Romberg, Cotes, Gauss 等数值积分技术进行

计算<sup>[40~46]</sup>. 以 Gauss 数值积分为例<sup>[41]</sup>, 方程(27)可近似为

$$\int_0^\eta \mathbf{g}(\tau) d\tau \approx \frac{\eta}{2} \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{g}\left[(1+\tau_i)\eta/2\right] + O(\eta^{2n}), \quad (28)$$

式中,  $n$  为积分点的个数,  $\tau_i$  为 Gauss 积分点的坐标,  $w_i$  是加权系数. 显然, 方程(28)的精度取决于 Gauss 积分点的数目和时间步长  $\eta$  的大小.

文献[44]比较了多种直接数值积分的精度, 指出 Cotes 和 Gauss 积分是保持精细积分算法高精度的较好方法, 文献[42,43]则进一步分析了采用 Gauss 数值积分的稳定性问题, 指出采用 Padé 逼近为基础的矩阵指数精细方法是无条件稳定的计算格式, 可给出更高的精度.

直接数值积分方法避免了矩阵的求逆运算, 但需要额外计算积分点上的矩阵指数.

### 2.3.4 响应矩阵方法

响应矩阵方法<sup>[47]</sup>将非齐次项的 Duhamel 积分转换为一系列响应矩阵的计算, 然后利用与精细积分方法相同的思想给出了一种计算响应矩阵的方法. 以非齐次项  $f$  为形如方程(24)的多项式函数为例, 系统的响应可通过以下方程给出:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \exp(\mathbf{H}\eta)\mathbf{v}_k + \Phi_0(\eta)f_0 + \Phi_1(\eta)f_1 + \dots, \quad (29)$$

其中响应矩阵为

$$\begin{aligned} \Phi_0(\eta) &= \int_0^\eta \exp[\mathbf{H}(\eta-\tau)] d\tau, \\ \Phi_1(\eta) &= \int_0^\eta \exp[\mathbf{H}(\eta-\tau)] \cdot \tau d\tau, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

不同于上面给出的解析积分方法和直接数值积分方法, 响应矩阵方法<sup>[47]</sup>首先给出了响应矩阵的加法定理, 然后利用与计算矩阵指数相同的思想, 将基本积分步长细分为很小的区段. 然后, 在很小的区段将响应矩阵非常精确的数值积分, 最后使用加法定理得到基本积分步长上的响应矩阵, 对于等积分步长递推, 响应矩阵只需计算 1 次. 按照文献[47]的方法, 还可以给出当非齐次项为多项式、正/余弦、指数以及它们的组合函数形式时的响应矩阵. 与解析积分方法相比, 该方法不需要矩阵求逆, 而且给出更为简便的精确递推格式, 同时也可很方便地应用于非线性问题<sup>[48]</sup>.

## 2.4 大规模问题的快速精细积分法

实际工程问题需要对于大规模问题的瞬态响应进行分析, 此时系统矩阵  $\mathbf{H}$  通常具有很高的维数, 但往往同时具有稀疏的特点. 对于这样的问题, 如果直接采用精细积分方法求解, 矩阵指数的精细积分计算会破坏原矩阵的稀疏、对称等特性, 并需要耗费大量的时间和存储空间. 为了在大规模问题中充分发挥精细积分方法的优势, 学者们从不同角度进一步提高了精细积分方法的效率.

钟万勰<sup>[49,50]</sup>根据差分法窄带宽的特点, 提出了求解偏微分方程的子域精细积分方法. 该方法将全域分解为多个独立的子域, 每个子域采用精细积分方法求解, 从而在保证较高精度的同时, 显著地降低计算规模. 在此基础上, 文献[51]提出了瞬态热传导的子结构精细积分方法, 这种方法根据物理域划分子结构, 更适合于有限元法及并行计算. 文献[52]提出了周期结构的子域精细积分方法, 以周期结构的单胞划分子域, 仅计算一个小规模的矩阵指数即可实现整个结构的瞬态分析.

储德文和王元丰<sup>[53]</sup>利用模态叠加法对结构进行解耦降阶, 然后再利用精细积分方法求解降阶的动力微分方程. 这种方法一方面通过选取主要模态降低了计算规模, 另一方面充分利用了精细积分方法精度高的优点.

高强等人<sup>[54~56]</sup>利用结构动力响应的物理特点, 从物理上论证了大规模动力系统对应的矩阵指数也具有稀疏性, 并利用这个性质提出了一种快速精细积分方法. 与原始精细积分方法相比, 该方法只在加法定理的循环过程中增加了对矩阵指数的稀疏化过程, 但却极大地提高了计算效率. 在此基础上, 高强等人<sup>[57~60]</sup>针对周期结构提出了周期结构动力响应的高效率精细积分方法, 该方法在利用矩阵指数稀疏性的同时, 进一步利用结构的周期性, 并指出周期结构对应的矩阵指数中含有大量重复的元素, 而这些元素可通过特殊的技术只计算一次, 从而大大降低了计算量和存储量. 利用这些性质, 在保证与原始精细积分方法相同精度前提下, 可实现百万量级自由度的瞬态分析.

文献[61~63]利用矩阵的对称性、稀疏性, 在一定程度上降低了存储量, 提高了计算效率. Fung 和 Chen<sup>[64]</sup>提出了一种通过 Krylov 空间技术和引入阶

跃、脉冲响应矩阵的方法<sup>[65]</sup>来提高大规模问题的计算效率.

另一个提高精细积分方法计算效率的途径是采用并行计算技术. 精细积分方法大量使用矩阵-矩阵和矩阵-向量乘法, 非常适合于并行算法. 文献[66]对时间步实施粗粒度并行化, 通讯量低, 获得了很好的并行效率. 文献[61]结合稀疏矩阵技术, 提出了精细积分分级数解的并行算法. 文献[67]则进一步发展了非线性动力方程级数解的并行算法. 对于偏微分方程精细积分方法, 特别结合子域计算的相对独立性, 文献[68]给出了加速比和效率很高的并行算法.

## 2.5 时变、非线性微分方程的求解

精细积分方法针对的是线性定常系统, 而时变、非线性动力学问题的数值积分技术一直是重要和有挑战性的课题. 如何在时变、非线性动力学问题中, 充分发挥精细积分方法高精度和高稳定性优势, 也是众多学者关注的问题.

以精细积分方法为基础构造时变、非线性动力学问题数值积分方法的基本思路是将时变、非线性问题表示为如下形式<sup>[69]</sup>:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}_0 \mathbf{v} + \mathbf{f}(t, \mathbf{v}), \quad (31)$$

式中,  $\mathbf{H}_0$  是常数矩阵, 一般假设为是满秩矩阵, 而非齐次项是时间和状态的函数. 然后, 在区段  $[t_k, t_{k+1}]$  内采用多项式形式近似方程(31)中的非线性非齐次项, 即:

$$\mathbf{f}[t_k + \tau, \mathbf{v}(t_k + \tau)] = \mathbf{f}_{k,0} + \mathbf{f}_{k,1}\tau + \mathbf{f}_{k,2}\tau^2 + \dots, \quad (32)$$

$0 < \tau \leq \eta,$

式中, 多项式函数的系数  $\mathbf{f}_{k,0}, \mathbf{f}_{k,1}, \mathbf{f}_{k,2}, \dots$  可以通过外插多步法<sup>[70,71]</sup>、Taylor 级数近似和 Lagrange 插值法等<sup>[72,73]</sup>得到. 一旦得到了非齐次项的近似表示形式, 就可以采用前述的精细积分方法求解.

以上方法可分为两大类: 如果多项式函数的系数  $\mathbf{f}_{k,0}, \mathbf{f}_{k,1}, \mathbf{f}_{k,2}, \dots$  中含有待求状态  $\mathbf{v}_{k+1}$ , 则是隐式算法, 这时需要结合预测-校正等迭代技术求解<sup>[72]</sup>; 如果不含  $\mathbf{v}_{k+1}$ , 则是显式解法<sup>[69,70,74]</sup>. 显式解法具有更简便的递推格式和效率, 而隐式格式则具有更好的稳定性和精度. 如果是线性时变系统, 则可通过分段常数、摄动法、Fourier 级数或 Magnus 级数等方式将

时变系统转化为多个时不变系统, 从而应用精细积分方法求解<sup>[75-77]</sup>.

另外, 还有两类处理非线性问题的方法值得注意. 一类是利用同伦摄动方法, 针对所求解的非线性微分方程构造一同伦函数, 通过求解该同伦函数的一组摄动解得到非线性微分方程的渐进解, 而每一个摄动方程都是线性常系数非齐次微分方程<sup>[78,79]</sup>. 另一类是首先将非线性动力系统转化为 Minkowski 空间的 Lie 群型动力系统<sup>[80,81]</sup>, 由于该 Lie 群型动力方程是齐次的, 可采用精细积分方法求解.

需要指出的是, 精细积分方法本质上适用于线性定常微分方程的求解. 以上对时变和非线性问题的处理, 其基本思想都是将其中的线性定常部分采用精细积分方法精确求解, 而其余的部分采用近似或迭代的方式处理. 因此, 这些方法适用于弱非线性问题, 而对于强非线性问题, 如何利用精细积分方法的优点还是值得研究的问题.

## 3 两点边值问题的精细积分方法及其应用

两点边值问题对弹性波的传播、电磁波导、输运以及最优控制等领域都具有重要的意义. 在提出初值问题的精细积分方法的同时, 钟万勰<sup>[9-11]</sup>基于计算结构力学和最优控制之间的模拟理论, 也建立了两点边值问题的精细分方法. 本节将简要介绍两点边值问题精细分方法的主要思想以及应用情况.

线性常微分方程的两点边值问题可用以下方程描述:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{A}^T\mathbf{p}, \quad (33)$$

$$\mathbf{q}(z_0) = \text{known}, \quad \mathbf{p}(z_f) = \text{known}. \quad (34)$$

钟万勰<sup>[9-11]</sup>基于计算结构力学和最优控制之间的模拟理论, 引入了混合变量和区段混合能的概念, 并以此为基础建立了两点边值问题的精细积分方法. 其基本思想是首先在区段  $[z_a, z_b]$  上, 将方程(33)的解表示为如下形式:

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{F}\mathbf{q}_a + \mathbf{G}\mathbf{p}_b, \quad \mathbf{p}_a = -\mathbf{Q}\mathbf{q}_a + \mathbf{F}^T\mathbf{p}_b, \quad (35)$$

式中,  $\mathbf{q}_a$  和  $\mathbf{p}_a$  是  $z_a$  处的状态向量, 而  $\mathbf{q}_b$  和  $\mathbf{p}_b$  是  $z_b$  处的状态向量,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}(z_a, z_b)$  是区段的混合能矩阵. 然后根据方程(33)和(35)可得到  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$  满足如下的微分方程和边界条件为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{F}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{B})\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{Q}), \\ \dot{\mathbf{G}} &= \mathbf{AG} + \mathbf{GA}^T - \mathbf{GBG} + \mathbf{D} = \mathbf{FDF}^T, \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{B} + \mathbf{QA} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q} - \mathbf{QDQ} = \mathbf{F}^T\mathbf{BF}, \\ \mathbf{F}(0) &= \mathbf{I}, \quad \mathbf{G}(0) = \mathbf{Q}(0) = \mathbf{0}. \end{aligned}\quad (36)$$

至此对两点边值问题(33)的求解转换为对方程(36)的求解.

对方程(36)的求解可利用与初值问题精细积分方法类似的思想, 即基于加法定理的  $2^N$  类算法和增量计算与存储. 首先, 将求解区域等分为  $2^N$  个子区段, 假设其长度为  $\tau$ . 然后, 在很小的区段  $\tau$  上, 将  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$  采用 Taylor 级数展开近似, 即:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(\tau) &\approx \sum_{k=1}^M \boldsymbol{\theta}_k \tau^k, \quad \mathbf{G}(\tau) \approx \sum_{k=1}^M \boldsymbol{\gamma}_k \tau^k, \\ \mathbf{F}(\tau) &\approx \mathbf{I} + \sum_{k=1}^M \boldsymbol{\varphi}_k \tau^k = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}}(\tau).\end{aligned}\quad (38)$$

则根据方程(36)可得到其中的展开系数为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_1 &= \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{D}, \quad \boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{A}, \\ \boldsymbol{\theta}_k &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}_{k-1} + \boldsymbol{\varphi}_{k-1}^T \mathbf{B} + \sum_{m=1}^{k-2} \boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_{k-m-1}, \\ \boldsymbol{\gamma}_k &= \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}_{k-1} + \boldsymbol{\gamma}_{k-1}^T \mathbf{A} - \sum_{m=1}^{k-2} \boldsymbol{\gamma}_m^T \mathbf{B} \boldsymbol{\gamma}_{k-m-1}, \\ \boldsymbol{\varphi}_k &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_{k-1} - \boldsymbol{\gamma}_{k-1}^T \mathbf{B} - \sum_{m=1}^{k-2} \boldsymbol{\gamma}_m^T \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_{k-m-1}, \\ (k &= 2, 3, \dots, M).\end{aligned}\quad (39)$$

类似于矩阵指数的加法定理, 钟万勰<sup>[9~11]</sup>给出了矩阵  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$  的增量加法定理, 即:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(2\tau) &= \mathbf{G}(\tau) \\ &+ [\mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}}(\tau)][\mathbf{G}^{-1}(\tau) + \mathbf{Q}(\tau)]^{-1} [\mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}}^T(\tau)], \\ \mathbf{Q}(2\tau) &= \mathbf{Q}(\tau) \\ &+ [\mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}}^T(\tau)][\mathbf{Q}^{-1}(\tau) + \mathbf{G}(\tau)]^{-1} [\mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}}(\tau)], \\ \bar{\mathbf{F}}(2\tau) &= [\bar{\mathbf{F}}(\tau) - \mathbf{G}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)/2][\mathbf{I} + \mathbf{G}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)]^{-1} \\ &+ [\mathbf{I} + \mathbf{G}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)]^{-1} (\bar{\mathbf{F}}(\tau) - \mathbf{G}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)/2) \\ &+ \bar{\mathbf{F}}(\tau)[\mathbf{I} + \mathbf{G}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)]^{-1} \bar{\mathbf{F}}(\tau).\end{aligned}\quad (40)$$

以上是两点边值问题精细积分方法的基本原理和过程, 它首先利用方程(38)和(39)计算小区段  $\tau$  上的  $\bar{\mathbf{F}}(\tau)$ ,  $\mathbf{G}(\tau)$  和  $\mathbf{Q}(\tau)$ , 然后将方程(40)循环执行  $N$  次即可得到整个区段的  $\bar{\mathbf{F}}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$ , 最后将  $\bar{\mathbf{F}}$  与单位

矩阵相加即可得到  $\mathbf{F}$ .

与初值问题精细积分方法类似, 由于一方面在很小区段上的近似非常精确, 另一方面在  $2^N$  类算法的区段合并过程中使用了增量计算从而最大限度地避免了舍入误差, 因此两点边值问题精细积分方法可给出计算机意义上的精确解. 在此基础上, 钟万勰等人<sup>[82]</sup>将精细积分方法与本征值计数方法结合, 建立了基于混合变量精细积分的扩展 W-W 算法, 从而实现了应用两点边值问题精细积分方法进行结构振动和波传播问题中的频散分析. 在这之后, 一些学者也在细节上对两点边值问题精细积分方法进行了一定程度的改进, 请见文献[83~87].

两点边值问题的精细积分方法提出后, 首先在最优控制领域中的 LQ 控制<sup>[88,89]</sup>、矩阵微分 Riccati 方程求解<sup>[11]</sup>、卡尔曼-布西滤波<sup>[90]</sup>、 $H_\infty$  控制系统的分析与设计<sup>[91,92]</sup>等方面得到应用, 这方面的详细情况可参考文献[93,94]. 目前, 两点边值问题的精细积分方法已在分层介质中波传播问题<sup>[95~98]</sup>、表面波问题<sup>[99,100]</sup>和随机波传播问题<sup>[101~105]</sup>, 分层地基动力响应<sup>[106~108]</sup>, 电磁波反射和透射问题<sup>[109]</sup>, 奇异摄动边值问题<sup>[110]</sup>等方面得到了广泛的应用.

#### 4 初值和边值问题精细积分方法的关系

第 2 和第 3 节分别介绍了初值和两点边值问题的精细积分方法, 可以看到它们的基本思想是相同的, 都是基于加法定理和增量计算与存储. 同时, 可以看到两点边值问题的控制方程(33)与初值问题的控制方程(1)对应的齐次方程是相同的. 因此, 初值和边值精细积分方法必然存在某种联系. 在本节中, 我们将讨论初值和边值精细积分方法的联系和区别, 一方面将论证这两种方法在理论上是等价的, 另一方面将说明它们在数值计算中是不等价的, 从而给出将精细积分方法分为两类的原因<sup>[84]</sup>.

如果将方程(33)表示为如下的整体形式, 即:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{cases}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}. \quad (41)$$

则方程(41)与方程(1)的齐次方程在形式上是一样的. 由第 2 节可知, 方程(41)的解可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{p}_b \end{cases} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} \\ \boldsymbol{\Phi}_{21} & \boldsymbol{\Phi}_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{cases} = \boldsymbol{\Phi} \begin{cases} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{cases}, \quad (42)$$

式中,  $\mathbf{q}_a$  和  $\mathbf{p}_a$  是  $z_a$  处的状态向量, 而  $\mathbf{q}_b$  和  $\mathbf{p}_b$  是  $z_b$  处的状态向量, 而  $\Phi$  是矩阵  $\mathbf{H}(z_b - z_a)$  的矩阵指数, 即:

$$\Phi = \exp[\mathbf{H}(z_b - z_a)]. \quad (43)$$

比较方程(42)和(35)可给出:

$$\mathbf{F} = \Phi_{22}^{-T}, \quad \mathbf{G} = \Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}. \quad (44)$$

方程(44)表明, 理论上矩阵  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$  可以通过矩阵指数计算.

利用方程(44), 可以将初值和边值问题的精细积分方法联系在一起. 一方面, 可以按照第 3 节中的边值问题的精细积分方法计算  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$ , 另一方面也可以先将矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{D}$  组合成为矩阵  $\mathbf{H}$ , 然后利用第 2 节中的初值问题的精细积分方法计算其对应的矩阵指数, 最后通过方程(44)计算得到  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$ . 因此, 从理论上看, 初值和边值问题的精细积分方法是等价的, 它们的关系如图 1.

既然  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$  可以通过矩阵指数计算得到, 为什么还要区分初值和边值问题的精细积分方法呢? 这主要是因为, 虽然方程(44)表明  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$  与矩阵指数理论上可以互相转换, 但通过第 3 节的边值问题的精细积分方法直接计算  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$  和通过第 2 节的初值问题计算矩阵指数后再转换为  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$ , 这两个过程在数值计算过程中的舍入误差和稳定性是不等价的. 这是因为, 虽然初值和边值问题的控制方程形式上相同, 但它们的系统矩阵  $\mathbf{H}$  具有不同的特性.

一般来说, 初值问题的系统矩阵  $\mathbf{H}$  的特征值的实部都小于或等于零, 否则这个系统就是不稳定的. 对于这种情况, 从数值计算角度看, 采用第 2 节的初值问题的精细积分方法计算矩阵指数是没问题的.

而边值问题的系统矩阵  $\mathbf{H}$  的特征值的实部不等于零, 且同时有实部大于零和小于零的特征值. 特别是, 绝大部分情况下, 边值问题的系统矩阵  $\mathbf{H}$  具有方程(41)的形式, 此时  $\mathbf{H}$  是哈密顿矩阵, 则它的特征值必然一正一负同时出现, 又由于边值问题的特点, 其

特征值的实部不等于零, 因此此时边值问题系统矩阵  $\mathbf{H}$  的特征值中既有实部大于零的特征值, 又有实部小于零的特征值. 对于这种情况, 如果存在实部比较大特征值或求解域比较长, 则利用初值问题的精细积分方法计算矩阵指数在数值上是不稳定的. 而通过边值问题的精细积分方法计算  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$ , 则相当于充分考虑了边值问题的本质特性, 它在数值上是稳定的.

本节讨论了初值和边值问题精细积分方法的联系和区别. 从理论上讲这两种精细积分方法是等价的, 可以互相转换. 但由于边值和初值问题本身特性的不同, 这两种精细积分方法在数值性能方面是不同的, 这是区分两类精细积分方法的根本原因.

## 5 讨论与结论

精细积分方法提供了一个高精度、高稳定的算法设计平台. 本文总结了初值和边值问题精细积分方法的基本思想和进一步发展, 特别讨论了初值和边值问题精细积分方法的联系和区别. 对于线性常微分方程初值和两点边值问题, 精细积分方法可分别给出矩阵指数和混合能矩阵的计算机上的精确解. 以矩阵指数的精确计算为基础, 可设计出求解非齐次、非线性初值问题的高性能数值求解算法. 混合能矩阵的精细积分方法可为波传播问题、最优控制理论、表面波问题等的分析提供算法基础.

精细积分方法的应用领域日趋广泛, 随着研究的深入, 在以下几个方面有望取得较大的进展: (1) 与保辛算法的结合. 哈密顿动力系统的保辛已成为数值算法设计的一项重要内容. 传统的保辛算法虽然可以较好地描述系统的长期特性, 但往往在数值精度方面不够理想. 将精细积分方法的高精度、高稳定性优势和保辛思想结合, 有望大大提高保辛算法的性能. (2) 利用精细积分方法求解大规模问题的研究具有重要的现实意义. 充分利用物理问题的特性和数学结构, 从而构造计算矩阵指数的高效率精细积分方法, 有望取得更大的进展. (3) 求解非线性刚柔耦合问题. 精细积分方法处理线性刚性问题具有独特的优势. 有很大一类非线性刚柔耦合问题, 其高频部分是线性振动, 而非线性部分是较缓慢的运动. 对于这类问题, 利用精细积分方法处理线性刚性问

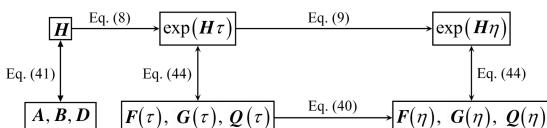


图 1 初值和边值问题精细积分方法的关系

题的优势, 可望构造出更高性能数值方法。(4) 初值问题的精细积分方法虽然已得到了比较广泛的应用,

但在波传播问题、周期结构能带分析等领域还有广阔的发展空间。

## 参考文献

- 1 Bathe K J, Wilson E L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. New Jersey: Prentice-Hall, 1976
- 2 Dokainish M A, Subbaraj K. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-I. Explicit methods; II. Implicit methods. *Comput Struct*, 1989, 32: 1371–1386
- 3 Lambert J D. The Initial Value Problem for Ordinary Differential Equations. New York: Academic Press, 1993
- 4 Hairer E, Lubich C, Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Berlin: Springer, 2006
- 5 钟万勰, 杨再石. 连续时间 LQ 控制主要本征对的算法. *应用数学和力学*, 1991, 12: 45–50
- 6 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法. *大连理工大学学报*, 1994, 34: 131–136
- 7 钟万勰. 暂态历程的精细计算方法. *计算结构力学及其应用*, 1995, 12: 1–6
- 8 Zhong W X, Williams F W. A precise time step integration method. *P I Mech Eng C-J Mech*, 1994, 208: 427–430
- 9 钟万勰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1993
- 10 Zhong W X, Cheung Y K, Li Y. The precise finite strip method. *Comput Struct*, 1998, 69: 773–783
- 11 钟万勰. 矩阵黎卡提方程的精细积分法. *计算结构力学及其应用*, 1994, 11: 113–119
- 12 林家浩, 沈为平. 结构非平稳随机响应的混合型精细时程积分. *振动工程学报*, 1995, 2: 127–135
- 13 谭述君, 钟万勰. 基于精细积分的(最优)控制系统程序库. 见: 技术科学论坛第二十三次学术报告会议论文集. 上海: 中国科学院, 中国机械工程学会, 2006. 75–94
- 14 吴志刚, 谭述君, 彭海军. 现代控制系统设计与仿真——使用 PIMCSO 工具箱. 北京: 科学出版社, 2012
- 15 Wei C Z, Guo J F, Park S Y, et al. IFF optimal control for missile formation reconfiguration in cooperative engagement. *J Aerospace Eng*, 2013, 28: 04014087
- 16 Wei C Z, Shen Y, Ma X X, et al. Optimal formation keeping control in missile cooperative engagement. *Aircr Eng Aerosp Tec*, 2012, 84: 376–389
- 17 苗昊春, 马清华, 董国才, 等. 反坦克导弹最优一体化制导与控制. *系统仿真技术*, 2013, 9: 9–13
- 18 Moler C, van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM Rev*, 1978, 20: 801–836
- 19 Moler C, van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Rev*, 2003, 45: 3–49
- 20 钟万勰, 姚征. 椭圆函数的精细积分分算法. 见: 祝贺郑哲敏先生八十华诞应用力学报告会, 应用力学进展论文集. 北京: 中国力学学会, 2004. 106–111
- 21 Fung T C. Computation of the matrix exponential and its derivatives by scaling and squaring. *Int J Numer Methods Eng*, 2004, 59: 1273–1286
- 22 陆静, 韦笑梅, 齐辉. 正余弦矩阵函数的精细积分分算法. *广西工学院学报*, 2006, 17: 89–91
- 23 富明慧, 张文志. 病态代数方程的精细积分分解法. *计算力学学报*, 2011, 28: 530–534
- 24 刘勇, 沈为平. 精细时程积分中状态转换矩阵的自适应算法. *振动与冲击*, 1995, 14: 82–85
- 25 向宇, 黄玉盈, 曾革委. 精细时程积分法的误差分析与精度设计. *计算力学学报*, 2002, 19: 276–280
- 26 陈奎孚, 张森文. 精细时程积分法的参数选择. *计算力学学报*, 1998, 15: 301–305
- 27 张洪武, 钟万勰. 矩阵指数计算算法讨论. *大连理工大学学报*, 2000, 40: 522–525
- 28 徐明毅, 张勇传. 精细辛算法的高效格式和简化计算. *力学与实践*, 2005, 27: 55–57
- 29 徐明毅, 张勇传. 精细辛几何算法的误差估计. *数学物理学报*, 2006, 26: 314–320
- 30 谭述君, 吴志刚, 钟万勰. 矩阵指数精细积分方法中参数的自适应选择. *力学学报*, 2009, 41: 961–966
- 31 林家浩, 沈为平, 宋华茂, 等. 结构非平稳随机响应的混合型精细时程积分. *振动工程学报*, 1995, (2): 127–135
- 32 Lin J H, Shen W P, Williams F W. Accurate high-speed computation of non-stationary random structural response. *Eng Struct*, 1997, 19: 586–593
- 33 顾元宪, 陈飚松, 张洪武. 结构动力方程的增维精细积分法. *力学学报*, 2000, 32: 447–456
- 34 周钢, 王跃先, 贾国庆, 等. 一种基于 Taylor 级数的齐次扩容精细算法. *上海交通大学学报*, 2001, 35: 1916–1919
- 35 向宇, 黄玉盈, 黄健强. 一种新型齐次扩容精细积分法. *华中科技大学学报: 自然科学版*, 2002, 30: 74–76

- 36 吴泽艳, 王立峰, 武哲. 大规模动力系统高精度增维精细积分方法快速算法. 振动与冲击, 2014, 33: 188–192
- 37 Wang Y, Tian X, Zhou G. Homogenized high precision direct integration scheme and its applications in engineering. *Commun Numer Meth Eng*, 2002, 18: 429–439
- 38 时小红, 周钢, 付召华. 基于 Legendre 多项式函数系的齐次扩容精细算法. 计算力学学报, 2005, 22: 335–338
- 39 Huang Y, Long Y. On orthogonal polynomial approximation with the dimensional expanding technique for precise time integration in transient analysis. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2007, 12: 1584–1603
- 40 张森文, 曹开彬. 计算结构动力响应的状态方程直接积分法. 计算力学学报, 2000, 17: 94–97
- 41 汪梦甫, 周锡元. 结构动力方程的更新精细积分方法. 力学学报, 2004, 36: 191–195
- 42 Wang M F, Au F T K. Assessment and improvement of precise time step integration method. *Comput Struct*, 2004, 84: 779–786
- 43 汪梦甫. 无条件稳定的更新精细积分方法. 固体力学学报, 2006, 27: 311–314
- 44 储德文, 王元丰. 精细直接积分法的积分方法选择. 工程力学, 2002, 19: 115–119
- 45 任传波, 贺光宗, 李忠芳. 结构动力学精细积分的一种高精度通用计算格式. 机械科学与技术, 2005, 24: 1507–1509
- 46 张继锋, 邓子辰, 徐方暖, 等. 一种新的改进精细直接积分法. 动力学与控制学报, 2015, 13: 241–245
- 47 谭述君, 钟万勰. 非齐次动力方程 Duhamel 项的精细积分. 力学学报, 2007, 23: 374–381
- 48 谭述君, 高强, 钟万勰. Duhamel 项的精细积分方法在非线性微分方程数值求解中的应用. 计算力学学报, 2010, 27: 752–758
- 49 钟万勰. 子域精细积分及偏微分方程数值解. 计算结构力学及其应用, 1995, 12: 253–260
- 50 Zhong W X, Zhu J P, Zhong X X. On a new time integration method for solving time dependent partial differential equations. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1996, 130: 163–178
- 51 陈飚松, 顾元宪. 瞬态热传导方程的子结构精细积分方法. 应用力学学报, 2001, 18: 14–19
- 52 Wu F, Gao Q, Zhong W. Subdomain precise integration method for periodic structures. *Shock Vibr*, 2014, 2014: 657589
- 53 储德文, 王元丰. 结构动力方程的振型分解精细积分法. 铁道学报, 2003, 25: 89–92
- 54 高强, 吴锋, 张洪武, 等. 大规模动力系统改进的快速精细积分方法. 计算力学学报, 2011, 28: 493–498
- 55 Gao Q, Wu F, Zhang H, et al. A fast precise integration method for structural dynamics problems. *Struct Eng Mech*, 2012, 43: 1–13
- 56 Wu F, Gao Q, Zhong W X. Fast precise integration method for hyperbolic heat conduction problems. *Appl Math Mech*, 2013, 34: 791–800
- 57 高强, 姚伟岸, 吴锋, 等. 周期结构动力响应的高效数值方法. 力学学报, 2011, 43: 1181–1185
- 58 Gao Q, Yao W, Wu F, et al. An efficient algorithm for computing the dynamic responses of one-dimensional periodic structures and periodic structures with defects. *Comput Mech*, 2013, 52: 525–534
- 59 Gao Q, Zhang H W, Zhong W X, et al. An accurate and efficient method for dynamic analysis of two-dimensional periodic structures. *Int J Appl Mech*, 2016, 8: 1650013
- 60 Zhang J, Gao Q, Tan S J, et al. A precise integration method for solving coupled vehicle-track dynamics with nonlinear wheel-rail contact. *J Sound Vibr*, 2012, 331: 4763–4773
- 61 李渊印, 金先龙, 李丽君, 等. 精细时程法在大型结构动力响应中的应用. 农业机械学报, 2005, 36: 98–102
- 62 顾无宪, 陈飚松. 非线性瞬态热传导的精细积分方法. 大连理工大学学报, 2000, 40: 24–28
- 63 徐建新, 郭巧荣, 卿光辉. 可分型指数矩阵的快速精细积分法. 动力学与控制学报, 2010, 8: 24–28
- 64 Fung T C, Chen Z L. Krylov precise time-step integration method. *Int J Numer Meth Eng*, 2006, 68: 1115–1136
- 65 Fung T C. A precise time-step integration method by step-response and impulsive-response matrices for dynamic problems. *Int J Numer Meth Eng*, 1997, 40: 4501–4527
- 66 Shen W P, Lin J H, Williams F W. Parallel computing for the high precision direct integration method. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1995, 126: 315–331
- 67 李渊印, 金先龙, 张晓云, 等. 非线性动力方程精细积分分级数解的并行算法. 上海交通大学学报, 2008, 40: 1809–1812
- 68 唐纪晔, 钟万勰. 交替方向的扩散方程精细积分并行算法. 应用数学, 1998, 11: 58–64
- 69 吕和祥, 蔡志勤, 裴春航. 非线性动力学问题的一个显式精细积分算法. 应用力学学报, 2001, 18: 34–40
- 70 唐晨, 张皞, 闫海青, 等. 非线性系统的任意项精细积分外插多步法及其在混沌数值分析中的应用. 物理学报, 2003, 52: 1091–1095
- 71 陈伯望, 王海波. 结构非线性动力分析的精细积分多步法. 工程力学, 2009, 26: 41–46
- 72 Li Y Y, Jin X L, Wang Y Q. An implicit series precise integration algorithm for structural nonlinear dynamic equations. *Acta Mech Solida Sin*, 2005, 18: 70–75
- 73 张婧姝, 于洪洁, 洪嘉振. 非线性插值精细积分法在刚柔耦合弹簧摆中的应用. 力学季刊, 2013, 34: 415–422
- 74 裴春航, 吕和祥, 钟万勰. 求解非线性动力学方程的分段直接积分法. 力学学报, 2002, 34: 369–378
- 75 Yue C, Ren X, Yang Y, et al. A modified precise integration method based on Magnus expansion for transient response analysis of time

- varying dynamical structure. *Chaos Soliton Fract*, 2016, 89: 40–46
- 76 Tan S J, Peng H J, Zhou W Y, et al. A novel extended precise integration method based on Fourier series expansion for the  $H_2$ -norm of linear time-varying periodic systems. *Int J Control*, 2016, 89: 2083–2095
- 77 富明慧, 蓝林华, 陆克浪, 等. 时变动力系统的高阶乘法摄动方法. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2012, 42: 185–189
- 78 Mei S L, Zhang S W. Coupling technique of variational iteration and homotopy perturbation methods for nonlinear matrix differential equations. *Comput Math Appl*, 2007, 54: 1092–1100
- 79 梅树立, 张森文. 基于精细积分技术的非线性动力学方程的同伦摄动法. *计算力学学报*, 2005, 22: 665–670
- 80 Zhang S Y, Deng Z C. An improved precise integration method for nonlinear dynamic system. *Mech Res Commun*, 2003, 30: 33–38
- 81 Zhang S Y, Deng Z C. Group preserving schemes for nonlinear dynamic system based on RKM methods. *Appl Math Comput*, 2006, 175: 497–507
- 82 Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems. *J Vib Acoust*, 1997, 119: 334–340
- 83 谭述君, 周文雅, 吴志刚. 线性定常系统非齐次两点边值问题的扩展精细积分方法. *应用数学和力学*, 2015, 36: 1145–1157
- 84 Gao Q, Tan S J, Zhong W X, et al. Improved precise integration method for differential Riccati equation. *Appl Math Mech*, 2013, 34: 1–14
- 85 彭海军, 高强. 线性非齐次常微分方程两端边值问题精细积分法. *大连理工大学学报*, 2010, 50: 475–480
- 86 张文志, 富明慧, 蓝林华. 两端边值问题的通用精细积分法. *中山大学学报: 自然科学版*, 2010, 49: 15–19
- 87 Chen B, Tong L, Gu Y. Precise time integration for linear two-point boundary value problems. *Appl Math Comput*, 2006, 175: 182–211
- 88 钟万勰, 钟翔翔. LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用. *自动化学报*, 1992, 18: 325–332
- 89 钟万勰, 蔡志勤. LQG 量测反馈最优控制的精细积分. *应用数学和力学*, 2000, 21: 1279–1284
- 90 钟万勰. 卡尔曼-布西滤波的精细积分. *大连理工大学学报*, 1999, 39: 191–200
- 91 钟万勰.  $H_\infty$  控制状态反馈与瑞利商精细积分. *计算力学学报*, 1999, 16: 1–17
- 92 吴志刚, 钟万勰. 有限时间  $H_\infty$  控制系统设计的精细积分方法. *控制理论与应用*, 2002, 19: 291–296
- 93 吴志刚. 线性鲁棒控制的理论与计算. 大连: 大连理工大学出版社, 2003
- 94 钟万勰, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算. 北京: 科学出版社, 2007
- 95 Gao Q, Zhong W X, Howson W P. A precise method for solving wave propagation problems in layered anisotropic media. *Wave Motion*, 2004, 40: 191–207
- 96 Chen L. Green's function for a transversely isotropic multi-layered half-space: An application of the precise integration method. *Acta Mech*, 2015, 226: 3881–3904
- 97 Cheng Y C, Ai Z Y. Consolidation analysis of transversely isotropic layered saturated soils in the Cartesian coordinate system by extended precise integration method. *Appl Math Model*, 2015, 40: 2692–2704
- 98 Ai Z Y, Wu Q L, Wang L J. Extended precise integration method for axisymmetric thermo-elastic problem in transversely isotropic material. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 2016, 40: 297–312
- 99 Zhong W X, Howson W P, Williams F W. Precise solutions for surface wave propagation in stratified material. *J Vib Acoust*, 2001, 123: 198–204
- 100 Gao Q, Lin J H, Zhong W X, et al. A precise numerical method for Rayleigh waves in a stratified half space. *Int J Numer Methods Eng*, 2006, 67: 771–786
- 101 Gao Q, Lin J H, Zhong W X, et al. Propagation of non-stationary random waves in viscoelastic stratified solids. *Comput Geotech*, 2006, 33: 444–453
- 102 Gao Q, Lin J H, Zhong W X, et al. Random wave propagation in a viscoelastic layered half space. *Int J Solids Struct*, 2006, 43: 6453–6471
- 103 Gao Q, Howson W P, Watson A, et al. Propagation of non-uniformly modulated evolutionary random waves in a stratified viscoelastic solid. *Struct Eng Mech*, 2006, 24: 213–225
- 104 Gao Q, Lin J H, Zhong W X, et al. Propagation of partially coherent non-stationary random waves in a viscoelastic layered half-space. *Soil Dyn Earthq Eng*, 2008, 28: 305–320
- 105 Gao Q, Lin J H, Zhong W X, et al. Isotropic layered soil-structure interaction caused by stationary random excitations. *Int J Solids Struct*, 2009, 46: 455–463
- 106 林皋, 韩泽军, 李伟东, 等. 多层地基条带基础动力刚度矩阵的精细积分算法. *力学学报*, 2012, 44: 557–567
- 107 Han Z J, Lin G, Li J B. Dynamic response of footings on stratified soil using the precise integration method. In: 15th World Conference on Earthquake Engineering, 2012
- 108 Lin G, Han Z, Zhong H, et al. A precise integration approach for dynamic impedance of rigid strip footing on arbitrary anisotropic layered

- half-space. *Soil Dyn Earthq Eng*, 2013, 49: 96–108  
109 方宏远, 林皋, 张蓓. 求解电磁波在层状有耗介质中反射和透射的精细积分方法. *大连理工大学学报*, 2012, 52: 707–712  
110 富明慧, 张文志. 求解奇异摄动边值问题的精细积分法. *应用数学和力学*, 2010, 31: 1382–1392

## A survey of the precise integration method

GAO Qiang<sup>1,2</sup>, TAN ShuJun<sup>1,3</sup> & ZHONG WanXie<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian 116024, China;

<sup>2</sup> Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

<sup>3</sup> School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

For the initial value and two-point boundary value problems of linear ordinary differential equation, the Precise Integration Method (PIM) gives exact solutions in the computer accuracy sense. In this paper, the basic idea and the further development of PIM are surveyed. For the initial value problems, the basic idea of PIM, the methods for integrating the nonhomogeneous term, the methods for large scale problems and the application of PIM in time-varying and nonlinear system are surveyed. For two-point boundary value problems, the basic idea and the fundamental formula of PIM are given and the application of the PIM for two-point boundary value problems in many fields are surveyed. Finally, the relationship between the PIM for the initial value and two-point boundary value problems is discussed, which gives a new angle for understanding and application of PIM.

**precise integration method, exponential matrix, initial value problem, two-point boundary value problem, symplectic**

doi: 10.1360/N092016-00205