

构造广义 Sturm 序列的递归算法^{*}

符红光 杨路 曾振柄

(中国科学院成都计算机应用研究所, 成都 610041)

摘要 广义 Sturm 序列被用于判断一个多项式方程 $f(x)$ 在多项式 $h(x) > 0$ 条件下的实根数. 为了构造这样的序列, 原先的方法基本上就是辗转相除法. 对于带符号系数的多项式, 大量的实例表明其效率甚低, 无法处理较复杂的问题. 代之以一个新的递归算法, 成功地避免了由辗转相除引起的高复杂度的计算.

关键词 子结式多项式 主子结式系数 多项式余式序列

作为经典 Sturm 序列的推广, 广义 Sturm 序列¹⁾ (GSS) 在实代数、实几何、自动推理、计算机视觉等许多领域起着非常重要的作用. 它是由 Tarski¹⁾ 在 1951 年引入的, 用以判断在给定区间内多项式方程 $f(x)=0$ 的满足条件 $h(x) > 0$ 的实根的个数, 这里 $h(x)$ 是另一多项式. 显然, 经典的 Sturm 序列正是 $h(x) \equiv 1$ 的特殊情形. 按照 Tarski 的定义, 构造 GSS 的算法基本上就是多项式的辗转相除法. 这样的算法对于含符号(文字)系数的多项式是确实不方便和没有效率的. 另一方面, 理论和应用中愈来愈多的问题都涉及到含参多项式. 为处理符号系数多项式方程的实根判定问题, 近年来人们作了诸多努力. 在文献[2, 3] 中, González-Vega 等人推广了 Habicht 的工作⁴⁾, 引入了 Sturm-Habicht 序列 (SHS). 该序列从子结式多项式链入手, 与 GSS 不同之处是它可能含有零多项式, 使得人们不能直接从它的变号数判断实根的数目, 还需要一些不易记住的附加规则. 杨路等人^{5~7)} 建立了实根和复根分类的完全判别系统, 该系统能判定实系数多项式的实根和复根的个数以及相应的重数, 而 GSS 和 SHS 仅仅给出不同实根的数目. 因为完全判别系统中的判别式序列由主子结式系数构成, 因此也可能含有零元素, 但是与 SHS 不同, 判别式序列的符号修订规则非常简单, 而且易于记忆. 最近, 基于文献[5] 的工作, 张景中等人⁸⁾ 建立了复系数多项式的完全判别系统, 该系统需要与文献[5] 同样的符号修订规则, 并且给出一个能自动产生详尽的实根和复根分类表的计算机程序.

与 SHS 和判别式序列不同, GSS 中不含零多项式, 其实根数直接由通常意义下的变号数确定, 无需任何符号修订. 在本文中, 我们建立了联系广义 Sturm 序列和子结式多项式链的一般递归公式(定理 3), 其目的是利用容易计算的子结式多项式链来构造广义 Sturm 序列. 由此, 提出了构造广义 Sturm 序列的递归算法, 它的最大优点是不涉及多项式的辗转相除, 从而极大地降低了计算的复杂度.

1999-06-04 收稿

^{*} 国家“九七三”项目和中国科学院“九五”重点基础研究资助项目

1) 在一些文献中也被称之为 Sturm-Tarski 序列

在本节最后我们简述一下 GSS 的用法, 这对不十分熟悉本领域的读者可能有用.

给定两个多项式 $f(x)$, $h(x)$ 和闭区间 $[a, b]$, 设 $g(x)$ 是 $f'(x)h(x)$ 除以 $f(x)$ 的余式, 并用 $S(f, g)$ 表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 GSS, 用 $V_a(f, g)$ 和 $V_b(f, g)$ 分别表示 $S(f, g)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 的变号数. 此外, 集合 $\{x | f(x)=0, h(x) > 0, x \in [a, b]\}$ 的基数记为 $N_a^b(f | h > 0)$, 同样集合 $\{x | f(x)=0, h(x) < 0, x \in [a, b]\}$ 的基数记为 $N_a^b(f | h < 0)$, 那么我们有^[1]

$$N_a^b(f | h > 0) - N_a^b(f | h < 0) = V_a(f, g) - V_b(f, g).$$

如果用 $N_a^b(f)$ 表示 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 中的实根数, 按照 Sturm 定理, 有

$$N_a^b(f) = V_a(f, f') - V_b(f, f').$$

注意如果 $f(x)$ 和 $h(x)$ 没有公根, 那么 $N_a^b(f | h > 0) + N_a^b(f | h < 0) = N_a^b(f)$. 这时显然我们可以得到

$$N_a^b(f | h > 0) + N_a^b(f | h < 0) = V_a(f, f') - V_b(f, f'),$$

所以,

$$\begin{aligned} N_a^b(f | h > 0) &= \frac{1}{2} (V_a(f, f') - V_b(f, f') + V_a(f, g) - V_b(f, g)), \\ N_a^b(f | h < 0) &= \frac{1}{2} (V_a(f, f') - V_b(f, f') - V_a(f, g) + V_b(f, g)). \end{aligned} \quad (0)$$

上面关系说明了如何利用 GSS 的变号数判断 $f(x)$ 在 $h(x) > 0$ 或 $h(x) < 0$ 的条件下的实根个数.

关于 GSS 的定义, 我们将在第 2 节中详细给出.

1 基本概念和预备定理

本节首先介绍子结式多项式链和主子结式系数的概念, 然后叙述有关子结式多项式链与多项式余式序列的两个基本结果^[9].

设 I 是一整环, $I[u, x]$ 是 I 上的多项式环, 其中 $u = u_1, \dots, u_s$. 下面的两个定义涉及 $I[u, x]$ 中多项式序列的系数矩阵以及行列多项式的概念.

定义 1 给定 $I[u, x]$ 上的多项式序列 $A_i = \sum_{j=0}^n a_{ij}x^j$, $1 \leq i \leq k$. 设 $l = 1 + \max_{1 \leq i \leq k} (n_i)$, 且令

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} a_{i, l-j}, & \text{若 } l-j \leq n_i, \\ 0, & \text{若 } l-j > n_i, \end{cases} \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, l)$$

那么, $k \times l$ 矩阵 (λ_{ij}) 称为 $A_1, \dots, A_k$ 的系数矩阵, 记为 $\text{mat}(A_1, \dots, A_k)$.

定义 2 设 M 是 $I[u, x]$ 上的 $k \times l$ 矩阵, $k \leq l$, 且 $M^{(j)}$ 表示由 M 的前 $k-1$ 列和第 j 列, $k \leq j \leq l$, 构成的子矩阵, 则多项式

$$|M^{(k)}| x^{l-k} + \dots + |M^{(l)}|$$

称为 M 的行列多项式, 记为 $\text{detpol}(M)$.

现在, 我们可以用上面两个记号给出 $I[u, x]$ 上两个多项式 A 和 B 的子结式多项式和主子结式系数的定义.

定义 3 设 $A = \sum_0^m a_i x^i$, $B = \sum_0^n b_j x^j \in I[u, x]$, $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in I[u]$, 且 $\deg(A) = m > 0$, $\deg(B) = n > 0$. 对于 k , $0 \leq k < \min(m, n)$, 令

$$M_k = \text{mat}(x^{n-k-1}A(x), \dots, A(x), x^{m-k-1}B(x), \dots, B(x)) =$$

$$\begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & \\ & a_m & \cdots & & a_0 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & a_m & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & \\ & b_n & \cdots & & b_0 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & b_n & \cdots & b_0 \end{pmatrix},$$

那么 $S_k = \det \text{pol}(M_k)$ 称为 A 和 B 的 k 阶子结式多项式, 并将 $R_k = \det(M_k^{(m+n-2k)})$ (即 M_k 的前 $m+n-2k$ 列构成的行列式) 称为 A 和 B 的 k 阶主子结式系数.

特别是, 如果 $m = n+1$, 我们可以令 $S_{n+1} = A$, $S_n = B$, 然后按上面的定义构造多项式序列

$$S_{n+1}, S_n, S_{n-1}, \dots, S_0$$

称之为 A 和 B 的子结式多项式链.

注意 S_0 即是 A 和 B 关于 x 的结式. 一般来说, 由于 M_k 有 $m+n-2k$ 行和 $m+n-k$ 列, 多项式 S_k 关于 x 的次数不超过 k , 即

$$\deg(S_k) \leq (m+n-k) - (m+n-2k) = k.$$

从定义 3 容易证明, $\deg(S_k) = k$ 当且仅当 $R_k \neq 0$.

定义 4 设 $A, B \in I[u, x]$ 是两个次数分别为 m 和 n 的多项式, S_k ($0 \leq k < \min(m, n)$) 是 A 和 B 的 k 阶子结式多项式, 如果 $\deg(S_k) = r < k$, 我们称 S_k 是亏损的子结式多项式, 否则称 S_k 是正则的子结式多项式.

通常用 $\text{lc}(S_k)$ 表示 S_k 的首项的系数, 简称 S_k 的导系数. 在亏损的情形, 显然 $\text{lc}(S_k) \neq R_k$.

定理 1^[9] 设 $S_{n+1}, S_n, \dots, S_0$ 是多项式环 $I[u, x]$ 中 S_{n+1} 和 S_n 的子结式多项式链. 如果 S_{j+1} 是正则的, S_j 是亏损的, 次数为 r ($r < j$), 且约定 $\deg(0) = -1$, 那么

$$S_{j-1} = S_{j-2} = \cdots = S_{r+1} = 0, \quad -1 \leq r < j < n, \quad (1)$$

$$R_{j+1}^{j-r} S_r = \text{lc}(S_j)^{j-r} S_j, \quad 0 \leq r < j < n, \quad (2)$$

$$(-1)^{j-r} R_{j+1}^{j-r+2} S_{r-1} = \text{prem}(S_{j+1}, S_j), \quad 0 < r \leq j < n. \quad (3)$$

这里 $\text{prem}(S_{j+1}, S_j)$ 代表 S_{j+1} 除以 S_j 的伪余式.

下面我们叙述多项式的余式序列和子结式多项式链的基本定理, 同时给出了多项式余式序列的定义.

定理 2^[9] 设 $A_1, \dots, A_r$ 是 $I[u, x]$ 中的多项式余式序列, 即存在非零的 $e_i, f_i \in I[u]$ 使得

$$e_i A_i = Q_i A_{i+1} + f_i A_{i+2} \quad (1 \leq i \leq r-2).$$

令 $n_1, n_2, \dots, n_r$ 和 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 分别表示 $\{A_1, \dots, A_r\}$ 的次数序列和导系数序列. 那么, 对任意的 $j, 2 \leq j \leq r-1$, 我们有

$$S_k = 0, \quad 0 \leq k < n_r, \quad n_{j+1} < k < n_j - 1, \\ \left\{ \prod_{i=1}^{j-1} e_{i+1}^{n_i - n_j + 1} \right\} S_{n_j - 1} = \left\{ \prod_{i=1}^{j-1} (-1)^{(n_i - n_j + 1)(n_{i+1} - n_j + 1)} f_i^{n_{i+1} - n_j + 1} c_{i+1}^{n_i - n_{i+2}} \right\} \times \\ c_j^{-n_j + n_{j+1} + 1} A_{j+1} \quad (1 < j < r), \quad (4)$$

$$\left\{ \prod_{i=1}^{j-1} e_{i+1}^{n_i - n_{j+1}} \right\} S_{n_{j+1}} = \left\{ \prod_{i=1}^{j-1} (-1)^{(n_i - n_{j+1})(n_{i+1} - n_{j+1})} f_i^{n_{i+1} - n_{j+1}} c_i^{n_i - n_{i+2}} \right\} \times \\ c_{j+1}^{n_{j+1} - 1} A_{j+1} \quad (1 < j < r). \quad (5)$$

2 广义 Sturm 序列与子结式多项式链

本节目的是建立任意两个多项式的广义 Sturm 序列和子结式多项式链的递归关系.

定义 5 设 $A_1, A_2 \in I[u, x]$, 那么 A_1 和 A_2 的广义 Sturm 序列(GSS)是一个多项式余式序列 $A_1, A_2, \dots$, 满足

$$e_i A_i = Q_i A_{i+1} + f_i A_{i+2}, \quad e_i = c_{i+1}^{2(n_i - n_{i+1} + 1)}, \quad f_i = -1,$$

这里 $Q_i \in I[u, x]$, $n_i = \deg(A_i)$, $c_i = \text{lc}(A_i)$.

为方便起见, 我们定义两个多项式的相似关系.

定义 6 设 $A, B \in I[u, x]$, 如果存在非零的 $a, b \in I[u]$ 使得 $a^2 A = b^2 B$, 则 A 和 B 称为“相似”的多项式, 记为 $A \sim B$.

显然“ $\sim$ ”是一个等价关系, 并且满足下面两个性质:

- (1) 如果 $A, B, C, D \in I[u, x]$ 且 $A \sim B, C \sim D$, 那么 $A \circ C \sim B \circ D$;
- (2) 如果 $A, B \in I[u, x]$ 且 $A \sim B$, 那么 $\text{lc}(A) \sim \text{lc}(B)$.

下面的定理是本文的主要结果.

定理 3 设 A_i 是上面定义的广义 Sturm 序列, S_k 是 A_1 和 A_2 的 k 阶子结式多项式, 那么

$$S_{n_j - 1} S_{n_j} \sim (-1)^{n_1 - n_j} \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (c_i c_{i+1})^{n_i - n_{i+2}} \right\} A_j A_{j+1}.$$

证 设 $\delta = n_i - n_{i+1}$. 根据定义 5 和定理 2 中的(4)和(5)式, 得

$$\prod_{i=1}^{j-1} c_{i+1}^{2(\delta+1)(n_{i+1} - n_j + 1)} S_{n_j - 1} = \prod_{i=1}^{j-1} (-1)^{(n_i - n_j + 1)(n_{i+1} - n_j + 1)} f_i^{n_{i+1} - n_j + 1} c_{i+1}^{n_i - n_{i+2}} \times \\ c_j^{-n_j + n_{j+1} + 1} A_{j+1}, \quad (6)$$

$$\prod_{i=1}^{j-2} c_{i+1}^{2(\delta+1)(n_{i+1} - n_j)} S_{n_j} = \prod_{i=1}^{j-2} (-1)^{(n_i - n_j)(n_{i+1} - n_j)} f_i^{n_{i+1} - n_j} c_i^{n_i - n_{i+2}} \times \\ c_{j+1}^{n_{j+1} - 1} A_j. \quad (7)$$

显然(6)和(7)式的左边有下面的相似关系

$$\prod_{i=1}^{j-1} c_{i+1}^{2(\delta+1)(n_{i+1} - n_j + 1)} S_{n_j - 1} \sim S_{n_j - 1}, \\ \prod_{i=1}^{j-2} c_{i+1}^{2(\delta+1)(n_{i+1} - n_j)} S_{n_j} \sim S_{n_j},$$

因此, (6)和(7)式的左边相乘相似于 $S_{n_j-1}S_{n_j}$, 即

$$\left\{ \prod_{i=1}^{j-1} c_{i+1}^{2(\delta+1)(n_{i+1}-n_j+1)} S_{n_j-1} \right\} \circ \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} c_{i+1}^{2(\delta+1)(n_{i+1}-n_j)} S_{n_j} \right\} \sim S_{n_j-1}S_{n_j}.$$

另一方面, 在(6)和(7)式的右边代入 $f_i = -1$, 并且把它们相乘, 得

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{i=1}^{j-1} (-1)^{(n_i-n_j+1)(n_{i+1}-n_j+1)} (-1)^{(n_{i+1}-n_j+1)} c_{i+1}^{n-n_{i+2}} \times c_j^{-n_j+n_{j+1}+1} A_{j+1} \right\} \circ \\ & \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (-1)^{(n_i-n_j)(n_{i+1}-n_j)} (-1)^{(n_{i+1}-n_j)} c_i^{n-n_{i+2}} \times c_{j-1}^{n-n_j-1} A_j \right\} = \\ & \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (-1)^{(n_i-n_j)(n_{i+1}-n_j+1)} c_{i+1}^{n-n_{i+2}} \right\} \circ (-1)^{n_{j-1}-n_j} c_{j-1}^{n-n_j-1} A_{j+1} \circ \\ & \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (-1)^{(n_i-n_j+1)(n_{i+1}-n_j)} c_i^{n-n_{i+2}} \right\} \circ c_{j-1}^{n-n_j-1} A_j \sim \\ & (-1)^{n_{j-1}-n_j} \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (-1)^{2(n_i-n_j)(n_{i+1}-n_j)+n_i+n_{i+1}-2n_j} (c_i c_{i+1})^{n_i-n_{i+2}} \right\} A_j A_{j+1} = \\ & (-1)^{n_{j-1}-n_j} \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (-1)^{n_i+n_{i+1}} (c_i c_{i+1})^{n_i-n_{i+2}} \right\} A_j A_{j+1} = \\ & (-1)^{n_1-n_j} \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (c_i c_{i+1})^{n_i-n_{i+2}} \right\} A_j A_{j+1}, \end{aligned}$$

因此, 比较(6)和(7)式的左、右两边相乘后的相似关系, 即得到定理的结论:

$$S_{n_j-1}S_{n_j} \sim (-1)^{n_1-n_j} \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (c_i c_{i+1})^{n_i-n_{i+2}} \right\} A_j A_{j+1}.$$

为了构造 GSS, 即 $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$, 关键是计算 A_i 的首项, 因为每一个 A_i 也是子结式多项式链的元素, 至多相差 $[1, u]$ 中的一个多项式因子.

3 导系数之间的联系

某些时候, 人们仅关心一个多项式在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的实根分类, 因为有限区间的情形能够转化为无限区间上的问题. 为了判断一个多项式在 $(-\infty, +\infty)$ 上的实根数, 我们仅仅需要知道 Sturm 序列中各多项式的首项所组成的序列, 即“首项序列”. 在本节中, 我们将建立 GSS 的导系数与子结式多项式链的导系数之间的联系.

当 S_j 是亏损的时候, $\text{lc}(S_j)$ 不同于 R_j , 为区别起见我们在后续部分中用符号 L_j 表示 $\text{lc}(S_j)$. 应用相似关系中的性质 2 到定理 3 中, 我们容易得到下面有关导系数的推论.

推论 1 设 $\{L_j\}$ 是 A_1 和 A_2 的子结式多项式链的导系数, 且 $\{c_j\}$ 和 $\{n_j\}$ 分别是广义 Sturm 序列的导系数序列和次数序列, 那么对所有 $j \geq 2$, 有

$$L_{n_j-1}L_{n_j} \sim (-1)^{n_1-n_j} \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (c_i c_{i+1})^{n_i-n_{i+2}} \right\} c_j c_{j+1}. \quad (8)$$

一般地, 仅从主子结式系数 $\{R_j\}$ 来构造广义 Sturm 序列的首项是不可能的. 但对下面两种经常出现的特殊情形, 我们将证明推论 1 中的 L_j 可以替换为 $\{R_j\}$.

推论 2 对任意的 $j \geq 2$, 如果在子结式多项式链 S_{n_j} 和 $S_{n_{j+1}}$ 之间的零多项式的数目是奇

数, 那么

$$R_{n_{j+1}} R_{n_j} \sim (-1)^{n_1 - n_j} \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (c_i c_{i+1})^{n_i - n_{i+2}} \right\} c_j c_{j+1}. \quad (9)$$

证 在定理 1 的(2)式中, 设 $j=r$ 和 $n_{j-1}=n_{j+1}$, 有

$$R_{n_j}^{n_j - n_{j+1} - 1} \circ S_{n_{j+1}} = \text{lc}(S_{n_j})^{n_j - n_{j+1} - 1} \circ S_{n_j - 1} = L_{n_j - 1}^{n_j - n_{j+1} - 1} \circ S_{n_j - 1}.$$

因此 S_{n_j} 是正则的, 那么 $R_{n_j} = L_{n_j}$. 因此

$$L_{n_j}^{n_j - n_{j+1} - 1} \circ L_{n_{j+1}} = L_{n_j - 1}^{n_j - n_{j+1} - 1}.$$

显然进一步可得

$$(L_{n_{j-1}} L_{n_j})^{n_j - n_{j+1}} \sim L_{n_j} L_{n_{j+1}}.$$

如果 S_{n_j} 和 $S_{n_{j+1}}$ 之间的零多项式的数目是奇数, 那么根据 $L_{n_{j-1}} \neq 0$ 和

$$L_{n_j - 2} = \cdots = L_{n_{j+1} + 1} = 0, \quad l = (n_j - 2) - (n_{j+1} + 1) + 1 = 1 \pmod{2},$$

可得 $n_j - n_{j+1} = l + 2 = 1 \pmod{2}$, 因此

$$L_{n_{j-1}} L_{n_j} \sim L_{n_j} L_{n_{j+1}} = R_{n_j} R_{n_{j+1}}.$$

按照推论 1, 我们得到

$$R_{n_{j+1}} R_{n_j} \sim (-1)^{n_1 - n_j} \left\{ \prod_{i=1}^{j-2} (c_i c_{i+1})^{n_i - n_{i+2}} \right\} c_j c_{j+1}.$$

事实上, 当子结式多项式链 S_{n_j} 和 $S_{n_{j+1}}$ 之间的零多项式为偶数个时, 一般不能得到 $R_{n_{j+1}} R_{n_j}$ 与 $c_j c_{j+1}$ 递归关系. 尽管如此, 但是我们容易推出

$$V(c_j, c_{j+1}, -\infty) - V(c_j, c_{j+1}, +\infty) = 0,$$

这里 $V(c_j, c_{j+1}, x_0)$ 代表 $c_j x^n$ 和 $c_{j+1} x^{n+1}$ 在 x_0 处的变号数 (等于 0 或 1). 因此, 如果仅仅判断一个多项式在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的实根数, $c_j c_{j+1}$ 的符号可以忽略不考虑. 综合推论 2 的结论, 在理论上揭示了子结式多项式链中奇数零和偶数零片段的本质区别, 并证明了主子结式系数 $\{R_j\}$ 对于判断一个多项式在 $(-\infty, +\infty)$ 上的不同实根的数目是充分的, 但对于构造 Sturm 序列的首项序列却是不够的.

推论 3 如果对所有 $j \geq 2$, S_j 是正则的, 那么

$$R_{n_{j+1}} R_{n_j} \sim (-1)^{n_1 - n_j} c_j c_{j+1}. \quad (10)$$

证 因为所有 S_j 是正则的, 那么

$$L_{n_{j-1}} = R_{n_{j-1}} = R_{n_{j+1}},$$

且 $n_j - n_{j+2} = 2$, 所以

$$L_{n_{j-1}} L_{n_j} = R_{n_{j+1}} R_{n_j},$$

由推论 1, 我们有

$$R_{n_{j+1}} R_{n_j} \sim (-1)^{n_1 - n_j} c_j c_{j+1}.$$

4 构造 GSS 首项序列的算法及其实现

在本节中, 我们将给出由子结式多项式链的诸导系数递归构造广义 Sturm 序列诸首项的

算法.

在开始叙述算法之前, 我们首先解释怎样由 $\{L_j\}$ 序列得到 $\{n_j\}$ 序列. 根据推论 1, 显然任意的 $n_j (j \geq 2)$ 应该满足 $L_{n_j} \neq 0$ 和 $L_{n_j-1} \neq 0$. 所以, 在 $\{L_j\}$ 序列中的零元素和后继元素为零的非零元素应该从 $\{L_j\}$ 中删除, 剩下的序列就是 $\{L_{n_j}\}$. 我们用下面的例子说明如何得到 $\{n_j\}$ 序列. 假设 L_j 序列是:

$$[L_{15} L_{14} L_{13} 0 0 0 L_9 L_8 0 0 L_5 L_4 L_3 0 0 0],$$

其中 $L_{12} = L_{11} = L_{10} = L_7 = L_6 = L_2 = L_1 = L_0 = 0$. 又因为 L_{13} , L_8 和 L_3 的后继元素分别是 L_{12} , L_7 和 L_2 , 所以删除 L_j 中的零元素和 L_{13} , L_8 , L_3 , 得

$$[L_{15} L_{14} L_9 L_5 L_4].$$

因此,

$$[n_1 n_2 n_3 n_4 n_5] = [15 14 9 5 4].$$

下面叙述我们计算广义 Sturm 序列导项的递归算法.

Step 0 输入两个任意多项式

$$f = a_1 x^{d_1} + \cdots + a_{d_1+1}, \quad g = b_1 x^{d_2} + \cdots + b_{d_2+1}.$$

设 $d_1 \geq d_2$,

Step 1 计算 f 和 g 的子结式多项式链的导系数: $[L_{d_1}, L_{d_2}, L_{d_2-1}, \cdots, L_0]$.

Step 2 删除 $[L_{d_1}, L_{d_2}, L_{d_2-1}, \cdots, L_0]$ 中所有零元素和后继为零的非零元素, 得到: $\{n_j\}$, $j \geq 2$.

Step 3 设 $c_1 = a_1$, $c_2 = d_2$, 按照推论 1 的递归公式, 构造 c_{j+1} , $j \geq 2$.

Step 4 输出广义 Sturm 序列的导项

$$[c_1 x^{n_1}, c_2 x^{n_2}, \cdots, c_r x^{n_r}].$$

注意, 如果 $\{L_{n_j}\}$ 满足推论 2 或推论 3 的条件那么算法中的递归计算可以简化.

为了说明上面算法如何处理非正则的问题, 我们首先给出一个常系数多项式的例子.

例 1 考虑如下的 16 次多项式:

$$f(x) = x^{16} + x^{15} - x^{14} - x^3 + 2x - 1.$$

Step 1 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的子结式多项式链的导系数为

$$\begin{aligned} & [1, 16, -47, -70, 910, 0, 0, 0, 0, 0, -57101150470, 186542099873397, \\ & -153071917876088452, -54432582050918473944, \\ & 9286590776365807319304, -5673497056650749683440] \sim \\ & [1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, -1, -1, 1, -1]. \end{aligned}$$

Step 2 计算 n_j , $j=1, 2, \cdots$,

$$n_1 = 16, n_2 = 15, n_3 = 14, n_4 = 13, n_5 = 5, n_6 = 4, n_7 = 3, n_8 = 2, n_9 = 1, n_{10} = 0.$$

Step 3 根据推论 1, 递归计算所有 c_j :

初始: $c_1 = 1$,

$$c_2 \sim 1;$$

$$(1): c_2 c_3 \sim (-1)^{n_1 - n_2} L_{n_2-1} L_{n_2} = (-1)^0 L_{14} L_{15} \sim 1,$$

$$\Rightarrow c_3 \sim 1;$$

$$(2): c_3 c_4 \sim (-1)^{n_1 - n_3} L_{n_3 - 1} L_{n_3} \circ (c_1 c_2)^{n_1 - n_3} \sim L_{13} L_{14} \sim 1,$$

$$\Rightarrow c_4 \sim 1;$$

$$(3): c_4 c_5 \sim (-1)^{n_1 - n_4} L_{n_4 - 1} L_{n_4} \circ \prod_{i=1}^2 (c_i c_{i+1})^{n_i - n_{i+2}} \sim (-1) \circ L_{12} L_{13} \sim 1,$$

$$\Rightarrow c_5 \sim 1;$$

$$(4): c_5 c_6 \sim (-1)^{n_1 - n_5} L_{n_5 - 1} L_{n_5} \circ \prod_{i=1}^3 (c_i c_{i+1})^{n_i - n_{i+2}} \sim (-1) \circ L_4 L_5 \sim 1$$

$$\Rightarrow c_6 \sim 1;$$

$$(5): c_6 c_7 \sim (-1)^{n_1 - n_6} L_{n_6 - 1} L_{n_6} \circ \prod_{i=1}^4 (c_i c_{i+1})^{n_i - n_{i+2}} \sim L_3 L_4 \sim -1$$

$$\Rightarrow c_7 \sim -1;$$

$$(6): c_7 c_8 \sim (-1)^{n_1 - n_7} L_{n_7 - 1} L_{n_7} \circ \prod_{i=1}^5 (c_i c_{i+1})^{n_i - n_{i+2}} \sim (-1) \circ L_2 L_3 \sim -1$$

$$\Rightarrow c_8 \sim 1;$$

$$(7): c_8 c_9 \sim (-1)^{n_1 - n_8} L_{n_8 - 1} L_{n_8} \circ \prod_{i=1}^6 (c_i c_{i+1})^{n_i - n_{i+2}} \sim L_1 L_2 \sim -1$$

$$\Rightarrow c_9 \sim -1;$$

$$(8): c_9 c_{10} \sim (-1)^{n_1 - n_9} L_{n_9 - 1} L_{n_9} \circ \prod_{i=1}^7 (c_i c_{i+1})^{n_i - n_{i+2}} \sim (-1) \circ L_0 L_1 \sim 1$$

$$\Rightarrow c_{10} \sim -1$$

Step 4 输出 $f(x)$ 的 Sturm 序列的首项序列 $\{c_j x^{n_j}\}$:

$$[x^{16}, x^{15}, x^{14}, x^{13}, x^5, x^4, -x^3, x^2, -x, -1].$$

根据上面的首项序列, 我们分别计算出它在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 的变号数为 5 和 3, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的实根数是 2.

例 2 设 $p(x)$ 是一般的 7 次多项式:

$$p(x) = x^7 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f,$$

计算 $p(x)$ 和 $p'(x)$ 的主子结式系数:

$$R_7 = 1,$$

$$R_6 = 7,$$

$$R_5 = 14a,$$

$$R_4 = 20a^3 + 63b^2 - 56ac,$$

$$R_3 = -54b^4 + 207b^2ac + 189b^2e - 8b^2a^3 - 420bdc - 80ba^2d + 20ca^4 -$$

$$168eca + 60ea^3 + 244c^3 - 136a^2c^2 + 175ad^2,$$

$$R_2 \text{ 是一个 51 项的多项式,}$$

$$R_1 \text{ 是一个 159 项的多项式,}$$

$$R_0 \text{ 是一个 320 项的多项式.}$$

显然对 $j=1, 2, \dots, 8$, 有 $n_j=8-j$, 我们可以用更简单的推论 3, 计算 c_j .

初始: $c_1=1, c_2 \sim 1$;

$$(1): c_2 c_3 \sim (-1)^{n_1-n_2} R_{n_3} R_{n_2} = (-1) \circ 14a,$$

$$\Rightarrow c_3 \sim -a;$$

$$(2): c_3 c_4 \sim (-1)^{n_1-n_3} R_{n_4} R_{n_3} = 14a \circ (20a^3 + 63b^2 - 56ac),$$

$$\Rightarrow c_4 \sim -(20a^3 + 63b^2 - 56ac);$$

$$(3): c_4 c_5 \sim (-1)^{n_1-n_4} R_{n_5} R_{n_4} = (-1) \circ (20a^3 + 63b^2 - 56ac) \circ R_3,$$

$$\Rightarrow c_5 \sim R_3;$$

$$(4): c_5 c_6 \sim (-1)^{n_1-n_5} R_{n_6} R_{n_5} = R_2 \circ R_3,$$

$$\Rightarrow c_6 \sim R_2;$$

$$(5): c_6 c_7 \sim (-1)^{n_1-n_6} R_{n_7} R_{n_6} = (-1) \circ R_1 \circ R_2,$$

$$\Rightarrow c_7 \sim -R_1;$$

$$(6): c_7 c_8 \sim (-1)^{n_1-n_7} R_{n_8} R_{n_7} = R_0 \circ R_1,$$

$$\Rightarrow c_8 \sim -R_0.$$

例 3 设

$$f(x) = x^5 - 55x^4 + 330x^3 - 462x^2 + 165x - 11,$$

$$g(x) = \text{remainder}(f'(x)(x^3 - 4x^2 - 7x + 9), f(x)) = \\ 24695 + 103511x^4 - 686004x^3 + 983818x^2 - 357236x,$$

计算广义 Sturm 序列的首项序列.

Step 1 计算 f 和 g 的子结式多项式链的导系数:

$$[L_5, L_4, L_3, L_2, L_1, L_0] = \\ [1, 103511, -933349472, 714038809899008, \\ 131482675200066060288, 2438078451967297738244096] \sim \\ [1, 1, -1, 1, 1, 1].$$

Step 2 计算 n_j 序列:

$$n_1 = 5, n_2 = 4, n_3 = 3, n_4 = 2, n_5 = 1, n_6 = 0.$$

Step 3 根据推论 3, 计算 c_j :

$$c_1 \sim 1, c_2 \sim 1, c_3 \sim 1, c_4 \sim -1, c_5 \sim 1, c_6 \sim 1.$$

Step 4 输出 f 和 g 的广义 Sturm 序列的诸首项:

$$x^5, x^4, x^3, -x^2, x, 1.$$

最后, 根据 f, g 的 GSS 和 f 的 Sturm 序列, 按照 (0) 式的两个公式, 我们计算出:

$$N_{-\infty}^{+\infty}(f \mid h > 0) = 2, N_{-\infty}^{+\infty}(f \mid h < 0) = 3.$$

在本节中, 我们通过 3 个实例说明了我们的算法. 前两个例子涉及经典的 Sturm 序列, 用于判断在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的实根数. 最后一个例子, 给出如何利用广义 Sturm 序列在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上判断 $f(x)$ 满足 $h(x) > 0$ 或 $h(x) < 0$ 的实根数. 本算法已经用符号代数软件 MAPLE 实现. 特别是对带有符号系数的多项式, 各种实例显示本算法具有较高的效率. 在第 2 节的最后已经指出, 一旦获得其首项序列, 广义 Sturm 序列也就唾手而得, 故此不

再赘述.

参 考 文 献

- 1 Tarski A. A decision method for elementary algebra and geometry. 2nd ed. California: Univ of California Press. 1951
- 2 González-Vega L, Lombardi H, Recio T, et al. Sturm-Habicht sequence. In: ISSAC-89 Proceedings. New York: ACM Press. 1989. 136 ~ 146
- 3 González-Vega L, Recio T, Lombardi H, et al. Sturm-Habicht sequence, determinants and real roots of univariate polynomials. In: Caviness B F, Johnson J R eds. Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition. Berlin: Springer-Verlag. 1998. 300 ~ 316
- 4 Habicht W. Eine Verallgemeinerung des Sturmschen Wurzelzahl-verfahrens. Comm. Math. Helvetici, 1948, 21: 99 ~ 116
- 5 Yang L, Hou X R, Zeng Z B. A complete discrimination system for polynomials. Science in China, Ser E, 1996, 39(6): 628 ~ 646
- 6 Yang L, Xia B C. Explicit criterion to determine the number of positive roots of a polynomial. MM Research Preprints, 1997, 15: 134 ~ 145
- 7 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性代数方程组与定理机器证明. 上海: 上海科技教育出版社, 1996
- 8 Liang S X, Zhang J Z. A complete discrimination system for polynomials with complex coefficients and its automatic generation. Science in China, Ser E, 1999, 42(2): 113 ~ 128
- 9 Loos R. Generalized polynomial remainder sequence. In: Buchberger B, eds. Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation. Berlin: Springer-Verlag. 1983. 115 ~ 137