

分数阶 Fourier 域多通道采样的滤波器组高效实现

张峰, 陶然*, 王越

北京理工大学电子工程系, 北京 100081

* E-mail: rantao@bit.edu.cn

收稿日期: 2008-06-11; 接受日期: 2008-11-22

国家杰出青年科学基金(批准号: 60625104)、国家自然科学基金(批准号: 60890072, 60572094)和国家重点基础研究发展计划(“973”计划)(批准号: 2009CB724003)资助项目

摘要 研究了分数阶 Fourier 域周期非均匀采样以及多通道采样的滤波器组高效插值和重建方法. 首先, 根据分数阶 Fourier 变换的性质, 得到了分数阶 Fourier 域插值和采样的恒等结构; 然后根据该恒等结构, 得到了从分数阶 Fourier 域多通道采样和周期非均匀采样中重建原始信号的滤波器组高效实现方法; 最后建立了分数阶 Fourier 域多通道采样和分数阶 Fourier 域滤波器组的关系, 并进一步说明可以通过分数阶 Fourier 域准确重建滤波器组, 导出分数阶 Fourier 域新的采样和重建策略.

关键词

分数阶 Fourier 变换
滤波器组
插值恒等结构

近年来, 分数阶 Fourier 变换在光学、量子力学、模式识别、信号处理等领域得到了越来越广泛的应用^[1~10]. 分数阶 Fourier 变换作为 Fourier 变换的广义形式, 可以理解为时频平面的旋转, 同其它时频分布具有密切的联系^[9~13]. 由于分数阶 Fourier 变换是在统一的时频域处理信号, 使得对于处理非平稳信号灵活性更强. 分数阶 Fourier 变换的很多性质都可以看作是 Fourier 变换的一般化; 一些常见的性质, 比如分数阶 Fourier 域卷积和乘积定理, 采样定理, 抽样率转换理论都已经得到, 并在不同的领域得到了应用^[14~26].

采样定理是数字信号处理领域一个非常基础的命题. 关于分数阶 Fourier 域的采样定理至今已有多篇文献从不同角度进行了阐述: 文献^[19]证明了传统 Fourier 域非带限信号可能在某个角度的分数阶 Fourier 域带限; 同时文献^[19~24]从不同角度给出了分数阶 Fourier 域带限信号的均匀采样插值公式; 文献^[23, 24]还得到了均匀采样信号和原始信号的分数阶 Fourier 谱的关系. 以上考虑的采样方案都是均

匀采样.

多通道采样和周期非均匀采样广泛存在于实际工程应用中^[27~30]. 文献^[25, 26]研究了分数阶 Fourier 域的多通道采样和周期非均匀采样理论, 给出了分数阶 Fourier 域多通道采样和周期非均匀采样的谱特征和重建公式. 然而, 利用直接插值方法对多通道采样和周期非均匀采样进行原始连续信号重建是复杂的, 因此需要研究分数阶 Fourier 域多通道采样和周期非均匀采样重建原始连续信号的高效实现方法. 另一方面, 在一些实际工程中, 对于均匀采样以外的其它采样方案, 也需要研究分数阶 Fourier 域高效的插值算法.

本文首先根据分数阶 Fourier 变换的特点, 推导出分数阶 Fourier 域带限信号插值和采样恒等结构. 然后利用该恒等结构得到了分数阶 Fourier 域多通道采样和周期非均匀采样的滤波器组高效插值和重建方法. 最后建立了分数阶 Fourier 域多通道采样和分数阶 Fourier 域滤波器组的关系, 并进一步说明可以

引用格式: 张峰, 陶然, 王越. 分数阶 Fourier 域多通道采样的滤波器组高效实现. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(9): 1595—1605
Zhang F, Tao R, Wang Y. Filterbank implementation for multi-channel sampling in fractional Fourier domain. Sci China Ser E-Tech Sci, 2009, 52(9): 2619—2628, doi: 10.1007/s11431-009-0114-4

根据分数阶 Fourier 域准确重建滤波器组, 导出分数阶 Fourier 域新的采样和重建策略.

1 分数阶 Fourier 变换

信号 $x(t)$ 的 α 角度连续分数阶 Fourier 变换积分形式定义为^[1~5]

$$X_\alpha(u) = F^\alpha[x(t)](u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(u, t) x(t) dt, \quad (1)$$

其中, 积分核为

$$K_\alpha(u, t) = \begin{cases} A_\alpha e^{\frac{u^2+t^2}{2} \cot \alpha - jut \csc \alpha}, & \alpha \neq k\pi, \\ \delta(u-t), & \alpha = 2k\pi, \\ \delta(u+t), & \alpha = (2k+1)\pi, \end{cases} \quad (2)$$

式中 $A_\alpha = \sqrt{(1 - j \cot \alpha) / 2\pi}$, k 取整数. F^α 表示 α 角度分数阶 Fourier 变换算子. 可以看出, 当 $\alpha = \pi/2$ 时, 分数阶 Fourier 变换将变为 Fourier 变换; 而且 α 角度分数阶 Fourier 逆变换就是 $-\alpha$ 角度分数阶 Fourier 变换.

对于离散时间信号, 相应的分数阶 Fourier 变换定义为理想抽样信号的分数阶 Fourier 变换^[13,21]:

$$X_{s\alpha}(u) = A_\alpha e^{\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{\frac{1}{2} \cot \alpha \cdot n^2 T^2 - junT \csc \alpha}, \quad (3)$$

其中, $x[n] = x(nT)$, T 为采样间隔.

离散时间信号 $x[n]$ 的分数阶 Fourier 谱 $X_{s\alpha}(u)$ 是原始连续时间信号 $x(t)$ 的分数阶 Fourier 谱 $X_\alpha(u)$ 以 Chirp 周期 $2\pi \sin \alpha / T$ 的延拓:

$$X_{s\alpha}(u) = \frac{1}{T} e^{\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha \left(u - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha \right) \cdot e^{-j \frac{(u - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha)^2}{2} \cot \alpha}. \quad (4)$$

通过定义 $\omega = uT$ 为分数阶 Fourier 域数字频率, 离散时间分数阶 Fourier 变换及其逆变换为

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\alpha(\omega) &= \tilde{F}^\alpha[x](\omega) \\ &= A_\alpha e^{\frac{j\omega^2}{2T^2} \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{\frac{1}{2} \cot \alpha \cdot n^2 T^2 - j\omega n \csc \alpha}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$x[n] = A_{-\alpha} \int_{-\pi \sin \alpha}^{\pi \sin \alpha} \tilde{X}_\alpha(\omega) \cdot e^{-j \frac{1}{2} \cot \alpha \left(\frac{\omega^2}{T^2} + n^2 T^2 \right) + j\omega n \csc \alpha} d\omega. \quad (6)$$

同时, 在分数阶 Fourier 数字频率域, 离散时间信号 $x[n]$ 的分数阶 Fourier 谱的 Chirp 周期长度被归一化为

$2\pi \sin \alpha$.

分数阶 Fourier 变换具有以下重要的时移和相移性质^[1,5]:

$$F^\alpha[x(t-\tau)] = X_\alpha(u - \tau \cos \alpha) e^{j \frac{\tau^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j\tau u \sin \alpha}, \quad (7)$$

$$F^\alpha[x(t)e^{jvt}] = X_\alpha(u - v \sin \alpha) e^{-j \frac{v^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + jv u \cos \alpha}, \quad (8)$$

其中, τ , v 分别表示时移和相移参数. 关于分数阶 Fourier 变换的其它性质, 可以参考文献^[1~5].

2 分数阶 Fourier 域插值和采样恒等结构

设信号 $x(t)$ 在 α 角度分数阶 Fourier 域上的带宽为 B_α , 也就是满足 $X_\alpha(u) = 0$, 当 $|u| > B_\alpha$. 根据分数阶 Fourier 域采样定理, 理想采样信号不发生频谱混叠的临界采样间隔为 $T_{\alpha,Q} = \pi \sin \alpha / B_\alpha$, 称为 α 角度分数阶 Fourier 域带限信号 Nyquist 采用间隔. 为了得到分数阶 Fourier 域多通道采样和周期非均匀采样重建原始连续信号的滤波器组高效实现, 下面首先给出分数阶 Fourier 域插值和采样的恒等结构.

定理 1. 设 $x(t)$ 是带宽为 B_α 的 α 角度分数阶 Fourier 域带限信号, $H_{\alpha,l}(u)$ 为图 1(a) 中第 l 个通道的 α 角度分数阶 Fourier 域滤波器, $l = 0, \dots, M-1$, 其在 α 角度分数阶 Fourier 域的带宽为 B_α . $H_{\alpha,LP}(u)$ 是 α 角度分数阶 Fourier 域理想低通滤波器:

$$H_{\alpha,LP}(u) = \begin{cases} T_{\alpha,Q}, & |u| \leq B_\alpha, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

那么, 对于任何整数 k , 如果 T 满足 $T/T_{\alpha,Q} - 1/M = k$, 并且图 1(b) 中的 α 角度分数阶 Fourier 域数字滤波器 $\tilde{H}_\alpha(\omega)$ 满足:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\alpha(\omega) &= \frac{M}{T_{\alpha,Q}} H_{\alpha,l} \left(\frac{M\omega + 2\pi l \sin \alpha}{T_{\alpha,Q}} \right), \\ \frac{-\pi - 2\pi l}{M} \sin \alpha &\leq \omega \leq \frac{\pi - 2\pi l}{M} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

图 1(a) 和 (b) 是等价的.

证明.

对于图 1(a), $s_l(t) = x(t) e^{j \frac{2\pi l}{MT} t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, 根据

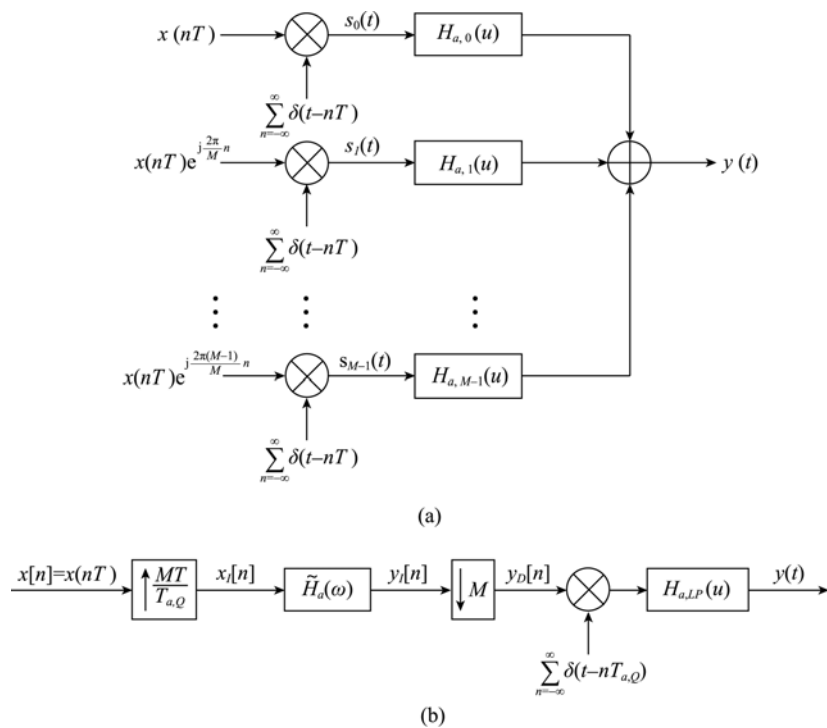


图 1 分数阶 Fourier 域插值恒等结构

分数阶 Fourier 变换的相移性质, 有

$$F^\alpha \left[x(t) e^{j\frac{2\pi l}{MT}t} \right] = X_\alpha \left(u - \frac{2\pi l}{MT} \sin \alpha \right) \cdot e^{-j\frac{\left(\frac{2\pi l}{MT}\right)^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + ju \frac{2\pi l}{MT} \cos \alpha}.$$

进而有

$$F^\alpha [s_l(t)] = \frac{1}{T} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha \left(u - \frac{2\pi l}{MT} \sin \alpha - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha \right) \cdot e^{-j\frac{\left(\frac{2\pi l}{MT}\right)^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + j\left(u - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha\right) \frac{2\pi l}{MT} \cos \alpha} \cdot e^{-j\frac{\left(u - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha\right)^2}{2} \cot \alpha}.$$

因此

$$Y_\alpha(u) = \frac{1}{T} \sum_{l=0}^{M-1} H_{\alpha,l}(u) e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha \left(u - \frac{2\pi l}{MT} \sin \alpha - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha \right) \cdot e^{-j\frac{\cot \alpha}{2} \left[u - \frac{2\pi l}{MT} \sin \alpha - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha \right]^2}. \quad (10)$$

对于图 1(b), 输入为 $x[n]$, 其分数阶 Fourier 变换

$\tilde{X}_\alpha(\omega)$ 为

$$\tilde{X}_\alpha(\omega) = \frac{1}{T} e^{j\frac{\omega^2}{2T^2} \cot \alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha \left(\frac{\omega}{T} - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha \right) \cdot e^{-j\frac{(\omega - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha)^2}{2T^2} \cot \alpha},$$

对 $x[n]$ 进行插值得到 $x_l[n]$, 其分数阶 Fourier 谱为

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\alpha,l}(\omega_1) &= \tilde{X}_\alpha \left(\omega_1 \frac{MT}{T_{a,Q}} \right) \\ &= \frac{1}{T} e^{j\frac{\left(\omega_1 \frac{MT}{T_{a,Q}}\right)^2}{2T^2} \cot \alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha \left(\omega_1 \frac{M}{T_{a,Q}} - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha \right) \cdot e^{-j\frac{\left(\omega_1 \frac{MT}{T_{a,Q}} - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha\right)^2}{2T^2} \cot \alpha} \\ &= \frac{1}{T} e^{j\frac{(M\omega_1)^2}{2T_{a,Q}^2} \cot \alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha \left(\omega_1 \frac{M}{T_{a,Q}} - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha \right) \cdot e^{-j\frac{\left(\omega_1 \frac{MT}{T_{a,Q}} - k \frac{2\pi}{T} \sin \alpha\right)^2}{2T^2} \cot \alpha}, \end{aligned}$$

其中, $\omega_1 = uT_1 = uT_{\alpha,Q}/M$.

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{\alpha,I}(\omega_1) &= \tilde{X}_{\alpha,I}(\omega_1)\tilde{H}_{\alpha}(\omega_1) \\ &= \frac{1}{T}\tilde{H}_{\alpha}(\omega_1)e^{j\frac{(M\omega_1)^2}{2T_{\alpha,Q}^2}\cot\alpha}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{\alpha}\left(\omega_1\frac{M}{T_{\alpha,Q}}-\right. \\ &\quad \left.k\frac{2\pi}{T}\sin\alpha\right)e^{-j\frac{\left(\omega_1\frac{MT}{T_{\alpha,Q}}-k2\pi\sin\alpha\right)^2}{2T^2}\cot\alpha}.\end{aligned}$$

对于抽取后的 $y_D[n]$, 其分数阶 Fourier 谱 $\tilde{Y}_{\alpha,D}(\omega_Q)$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{\alpha,D}(\omega_Q) &= \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\tilde{Y}_{\alpha,I}\left(\omega_1-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right)e^{j\frac{\omega_1^2}{2T_1^2}\cot\alpha} \\ &\quad \cdot e^{-j\frac{\left(\omega_1-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right)^2}{2T_1^2}\cot\alpha} \\ &= \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\tilde{Y}_{\alpha,I}\left(\frac{\omega_Q}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right)e^{j\frac{\omega_Q^2}{2M^2T_1^2}\cot\alpha} \\ &\quad \cdot e^{-j\frac{\left(\frac{\omega_Q}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right)^2}{2T_1^2}\cot\alpha} \\ &= \frac{1}{MT}\sum_{l=0}^{M-1}\tilde{H}_{\alpha}\left(\frac{\omega_Q}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right)e^{j\frac{(\omega_Q-2\pi l\sin\alpha)^2}{2T_{\alpha,Q}^2}\cot\alpha} \\ &\quad \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{\alpha}\left(\frac{\omega_Q}{T_{\alpha,Q}}-k\frac{2\pi}{T}\sin\alpha-\frac{2\pi l\sin\alpha}{T_{\alpha,Q}}\right) \\ &\quad \cdot e^{-j\frac{\left(\left(\frac{\omega_Q}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right)\frac{MT}{T_{\alpha,Q}}-k2\pi\sin\alpha\right)^2}{2T^2}\cot\alpha}e^{j\frac{\omega_Q^2}{2M^2T_1^2}\cot\alpha} \\ &\quad \cdot e^{-j\frac{\left(\frac{\omega_Q}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right)^2}{2T_1^2}\cot\alpha} \\ &= \frac{1}{MT}\sum_{l=0}^{M-1}\tilde{H}_{\alpha}\left(\frac{\omega_Q}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right) \\ &\quad \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{\alpha}\left(\frac{\omega_Q}{T_{\alpha,Q}}-k\frac{2\pi}{T}\sin\alpha-\frac{2\pi l\sin\alpha}{T_{\alpha,Q}}\right) \\ &\quad \cdot e^{-j\frac{\left(\frac{\omega_Q T}{T_{\alpha,Q}}-\frac{2\pi l T\sin\alpha}{T_{\alpha,Q}}-k2\pi\sin\alpha\right)^2}{2T^2}\cot\alpha}e^{j\frac{\omega_Q^2}{2M^2T_1^2}\cot\alpha},\end{aligned}$$

其中, $\omega_Q = uT_{\alpha,Q}$.

由于 $(T/T_{\alpha,Q}-1/M)$ 为一整数, 因此令 $k' =$

$k+l\left(\frac{T}{T_{\alpha,Q}}-\frac{1}{M}\right)$, 带入上式得到

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{\alpha,D}(\omega_Q) &= \frac{1}{MT}\sum_{l=0}^{M-1}\tilde{H}_{\alpha}\left(\frac{\omega_Q}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right) \\ &\quad \cdot \sum_{k'=-\infty}^{\infty}X_{\alpha}\left(\frac{\omega_Q}{T_{\alpha,Q}}-k'\frac{2\pi}{T}\sin\alpha-\frac{2\pi l\sin\alpha}{MT}\right) \\ &\quad \cdot e^{-j\frac{\left(\frac{\omega_Q T}{T_{\alpha,Q}}-\frac{2\pi l T\sin\alpha}{M}-k'2\pi\sin\alpha\right)^2}{2T^2}\cot\alpha}e^{j\frac{\omega_Q^2}{2T_{\alpha,Q}^2}\cot\alpha}.\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}Y_{\alpha}(u) &= T_{\alpha,Q}\tilde{Y}_{\alpha,D}(T_{\alpha,Q}u) \\ &= \frac{T_{\alpha,Q}}{MT}\sum_{l=0}^{M-1}\tilde{H}_{\alpha}\left(\frac{T_{\alpha,Q}u}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right) \\ &\quad \cdot \sum_{k'=-\infty}^{\infty}X_{\alpha}\left(u-k'\frac{2\pi}{T}\sin\alpha-\frac{2\pi l\sin\alpha}{MT}\right) \\ &\quad \cdot e^{-j\frac{\left(uT-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}-k'2\pi\sin\alpha\right)^2}{2T^2}\cot\alpha}e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \\ &= \frac{T_{\alpha,Q}}{MT}\sum_{l=0}^{M-1}\tilde{H}_{\alpha}\left(\frac{T_{\alpha,Q}u}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right) \cdot e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \\ &\quad \cdot \sum_{k'=-\infty}^{\infty}X_{\alpha}\left(u-k'\frac{2\pi}{T}\sin\alpha-\frac{2\pi l\sin\alpha}{MT}\right) \\ &\quad \cdot e^{-j\left(u-\frac{2\pi l\sin\alpha}{MT}-\frac{k'2\pi\sin\alpha}{T}\right)^2\frac{\cot\alpha}{2}}.\end{aligned}\quad (11)$$

对比(10)和(11)式可以得到, 如果图 1(a)和(b)等价, 需要满足:

$$H_{\alpha,l}(u) = \frac{T_{\alpha,Q}}{M}\tilde{H}_{\alpha}\left(\frac{T_{\alpha,Q}u}{M}-\frac{2\pi l\sin\alpha}{M}\right), \quad |u| \leq B,$$

$0 \leq l \leq M-1$,

也就是

$$\tilde{H}_{\alpha}(\omega) = \frac{M}{T_{\alpha,Q}}H_{\alpha,l}\left(\frac{M\omega+2\pi l\sin\alpha}{T_{\alpha,Q}}\right),$$

$$-\frac{\pi-2\pi l}{M}\sin\alpha \leq \omega \leq \frac{\pi-2\pi l}{M}\sin\alpha, \quad 0 \leq l \leq M-1.$$

证毕.

当 $M=1, T=NT_{\alpha,Q}$ 时, 图 1(a)和(b)成为图 2.

其中,

$$\tilde{H}_{\alpha}(\omega) = \frac{1}{T_{\alpha,Q}}H_{\alpha}\left(\frac{\omega}{T_{\alpha,Q}}\right), \quad |\omega| \leq \pi\sin\alpha. \quad (12)$$

类似地, 可以得到分数阶 Fourier 域采样恒等结构, 如图 3 所示. 其中 $T = NT_{\alpha,Q}$, 分数阶 Fourier 域数字滤波器 $H_{\alpha}(\omega/T_{\alpha,Q}), |\omega| \leq \pi \sin \alpha$.

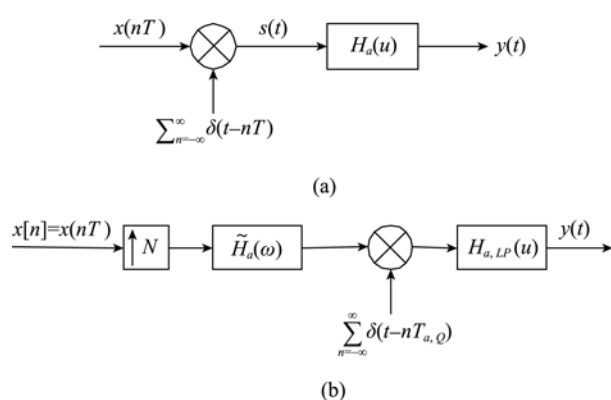


图 2 $M=1$ 时分数阶 Fourier 域插值恒等结构

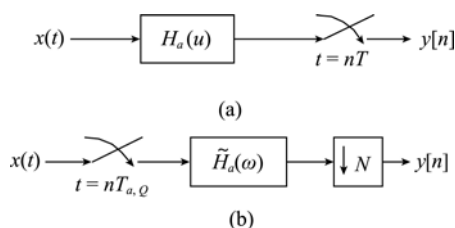


图 3 分数阶 Fourier 域采样恒等结构

对定理 1 的几点讨论.

(i) 从分数阶 Fourier 域插值和采样恒等结构可以看出, 通过选择合适的分数阶 Fourier 域数字滤波器和内插因子, 可以把不同采样间隔的采样信号插值为统一的分数阶 Fourier 域 Nyquist 均匀采样, 因而可以高效地实现对原始连续信号的重建.

(ii) 利用恒等结构, 把分数阶 Fourier 域滤波器转换为数字滤波器, 进而可以使用滤波器组重建原始信号. 由于滤波器组具有高效的实现方法^[16~18], 因此可以得到分数阶 Fourier 域插值和重建的高效实现.

(iii) 从(9)式可以看出, 图 1(b)中的分数阶 Fourier 域数字滤波器 $\tilde{H}_{\alpha}(\omega)$ 由图 1(a)中的 M 个分数阶 Fourier 域滤波器 $H_{\alpha,l}(u)$ 确定, $l=0, \dots, M-1$. 分数阶 Fourier 域数字频率周期 $2\pi \sin \alpha$ 被均匀分为 M 段,

在第 l 段上, $\tilde{H}_{\alpha}(\omega)$ 由 $H_{\alpha,l}(u)$ 确定. 由于 $H_{\alpha,l}(u)$ 在 α 角度分数阶 Fourier 域的带宽为 B_{α} , 因而(9)式又可以写作

$$\tilde{H}_{\alpha}(\omega) = \frac{M}{T_{\alpha,Q}} \sum_{l=0}^{M-1} H_{\alpha,l} \left(\frac{M\omega + 2\pi l \sin \alpha}{T_{\alpha,Q}} \right),$$

$$-2\pi \sin \alpha + \frac{\pi}{M} \sin \alpha \leq \omega \leq \frac{\pi}{M} \sin \alpha.$$

下面对定理 1 进行仿真. 信号 $x(t)$ 在 $\alpha = \pi/6$ 角度分数阶 Fourier 域带宽为 $B_{\alpha} = 3.14$. 选择 $M=2$, 采样间隔 $T=0.25$. 图 1(a)中的两路离散信号 $x(nT)$ 和 $x(nT)e^{j2\pi n/M}$ 如图 4(a)和(b)所示. $H_{\alpha,0}(u)$ 和 $H_{\alpha,1}(u)$ 是 $\alpha=\pi/6$ 角度分数阶 Fourier 域上带宽为 B_{α} 的低通滤波器. 得到图 1(a)的输出 $y(t)$ 如图 4(c)所示. 图 1(b)中输入离散信号 $x(nT)$ 经过数字滤波器 $\tilde{H}_{\alpha}(\omega)$ 以及采样率转换环节得到以 Nyquist 采样间隔 $T_{\alpha,Q}=0.5$ 的离散信号 $y_D[n] = y_D(nT_{\alpha,Q})$, 如图 4(d)所示. 然后通过 α 角度分数阶 Fourier 域理想低通滤波器后, 得到输出信号 $y(t)$, 如图 4(e)所示.

3 分数阶 Fourier 域多通道采样和周期非均匀采样的滤波器组实现

多通道采样和周期非均匀采样广泛存在于实际工程应用中. 在数字采集系统中, 由于非理想时基的存在, 会导致实际的采样过程为周期非均匀采样过程; 同时, 为了提高数据采样率也需要采用周期非均匀采样. 在多路无线通信和 MIMO 系统中, 需要对天线发送和接收的多个通道信号进行采样和重建. 在文献^[25, 26]中, 得到了分数阶 Fourier 域多通道采样的时域直接重建公式和周期非均匀采样的谱特征和重建公式. 建立从分数阶 Fourier 域多通道采样和周期非均匀采样中重建原始连续信号的滤波器组高效实现.

根据分数阶 Fourier 域多通道采样定理^[25], 对于分数阶 Fourier 域带限信号 $x(t)$ 通过 M 个分数阶 Fourier 域滤波器 $H_{\alpha,1}(u), H_{\alpha,2}(u), \dots, H_{\alpha,M}(u)$ 后得到输出 $g_k(t), k=1, \dots, M$, 那么根据 $g_k(t)$ 的采样可以完全重建原始连续信号 $x(t)$, 其重建公式为

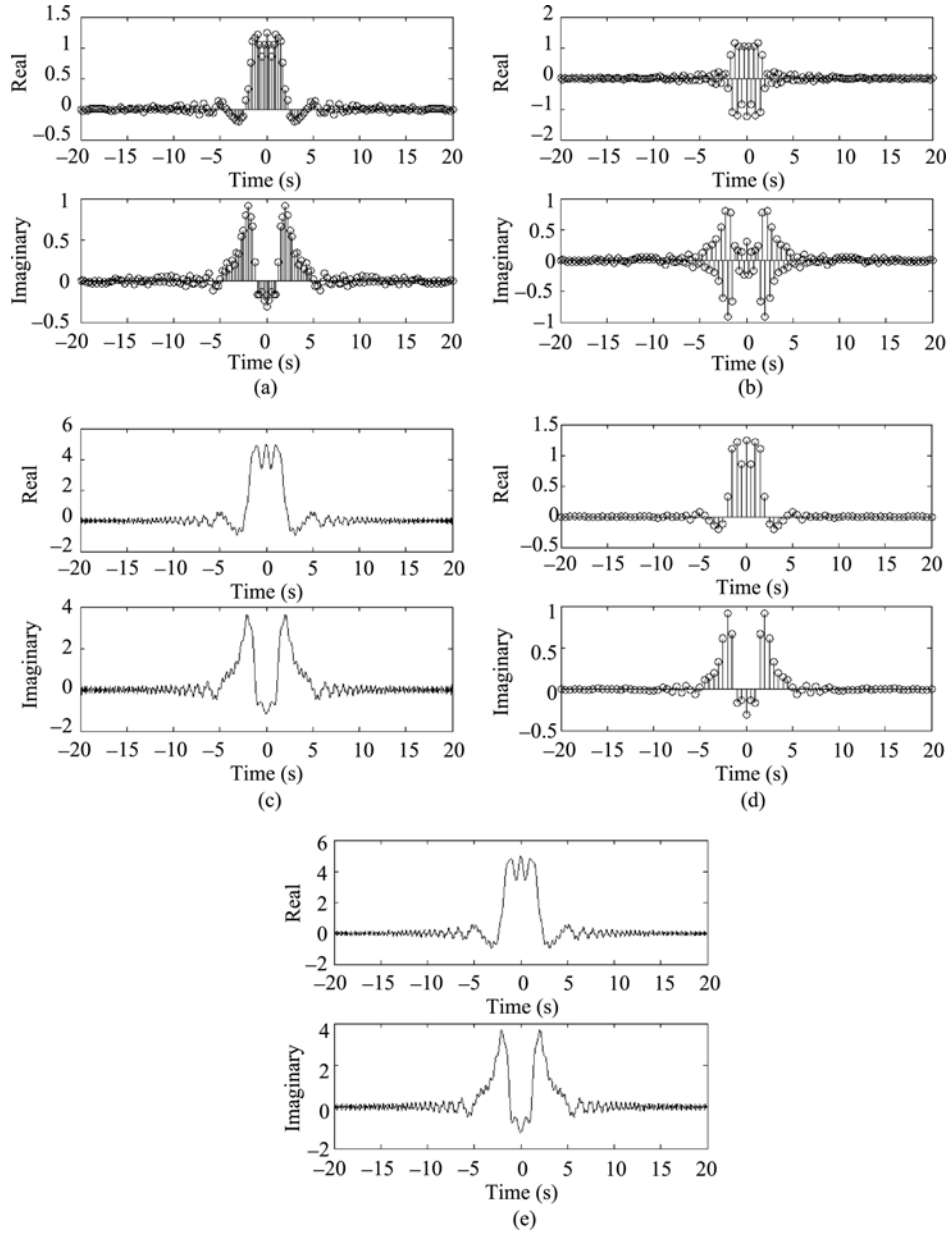


图 4 分数阶 Fourier 域插值恒等结构实例

(a) $x(nT)$; (b) $x(nT)e^{j2\pi n/M}$; (c) 图 1(a)的输出 $y(t)$; (d) 图 1(b)中经过采样率转换的信号 $y_D(nT_{\alpha,Q})$; (e) 图 1(b)的输出 $y(t)$

$$x(t) = e^{-j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[g_1(nT) e^{j\frac{(nT)^2}{2}\cot\alpha} y_1(t-nT) + \dots + g_M(nT) e^{j\frac{(nT)^2}{2}\cot\alpha} y_M(t-nT) \right], \quad (13)$$

其中, $y_k(t)$ 由 M 个线性方程确定.

利用分数阶卷积, (13)式可以表示为

$$x(t) = \sum_{k=1}^M e^{-j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_k(nT) e^{j\frac{(nT)^2}{2}\cot\alpha} y_k(t-nT) = \sum_{k=1}^M \left[g_k(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \right]^{\alpha} * z_k(t), \quad (14)$$

其中, $z_k(t) = y_k(t) e^{-j\frac{t^2}{2}\cot\alpha}$. 令 $R_{\alpha,k}(u) = e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} Z_{\alpha,k}(u)$,

那么分数阶 Fourier 域多通道采样重建的直接实现框图如图 5 所示, 其中每一支路的采样间隔为 $T = MT_{\alpha,Q}$.

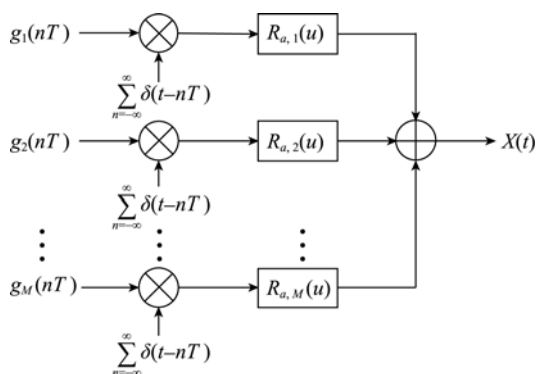


图 5 分数阶 Fourier 域多通道采样信号重建原始连续信号框图

图 5 是从多通道重建公式(13)直接得到的, 利用定理 1 中 $M=1$ 时的等价结构(图 2), 可以得到多通道采样的分数阶 Fourier 域数字滤波器组实现, 如图 6 所示. 可以看出, 通过每条支路内 M 倍内插和数字滤波器环节, 图 6 中 $x[n]$ 已经变成是对 $x(t)$ 以 Nyquist 采样间隔 $T_{\alpha,Q}$ 进行均匀采样的序列. 因此, 通过使用数字滤波器组, 把多通道采样转换为以 Nyquist 采样间隔 $T_{\alpha,Q}$ 进行的均匀采样序列. 进而可以利用已有的各种高效实现方法对多通道采样进行重建. 同时由于滤波器组具有高效的实现结构, 因而这种基于滤波器组的插值重建方法是高效的.

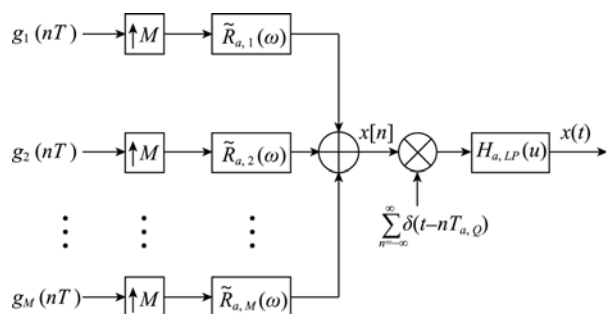


图 6 分数阶 Fourier 域多通道采样信号重建原始连续信号的滤波器组实现

周期非均匀采样模型如图 7 所示. 相邻采样点之间不必是均匀的, 但是每一点与其后第 M 个采样点之间的间隔为 T . 也就是说总的采样间隔为 $T=MT_{\alpha,Q}$. 每个周期的 M 个非均匀采样点标记为 $t_k, k=1, \dots, M$. 所有的非均匀采样点为 $t_k+nT, k=1, \dots, M, n \in (-\infty, \infty)$.

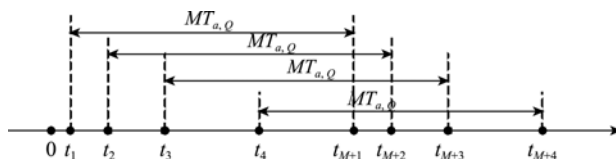


图 7 周期非均匀采样信号模型

根据分数阶 Fourier 域多通道采样定理, 可以得到分数阶 Fourier 域周期非均匀采样的时域重建公式:

$$x(t) = e^{-j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^M x(nT+t_k) e^{j\frac{(nT+t_k)^2}{2}\cot\alpha} \cdot \frac{(-1)^{nM} \prod_{q=1}^M \sin\left[\frac{\pi(t-t_q)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-nT-t_k)}{T} \prod_{q=1, q \neq k}^M \sin\left[\frac{\pi(t_k-t_q)}{T}\right]}. \quad (15)$$

从(15)式可以看出, 对于周期非均匀采样信号, 采用时域直接插值方法重建原始连续信号是复杂的. 为了得到高效的重建方法, 对(15)式交换求和的顺序, 利用分数阶卷积表示为

$$x(t) = \sum_{k=1}^M s_k(t) *_h h_k(t), \quad (16)$$

其中

$$s_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT+t_k) e^{jnTt_k \cot\alpha} \delta(t-nT),$$

$$h_k(t) = e^{-j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \cdot \frac{\prod_{q=1}^M \sin\left[\frac{\pi(t-t_q)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-t_k)}{T} \prod_{q=1, q \neq k}^M \sin\left[\frac{\pi(t_k-t_q)}{T}\right]} e^{j\frac{t_k^2}{2}\cot\alpha}.$$

令 $T_{\alpha,k}(u) = e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} H_{\alpha,k}(u)$, 可以得到分数阶 Fourier 域周期非均匀采样重建的直接实现框图如图 8 所示.

从图 8 可以看出, 在对周期非均匀采样信号进行重建时, 把非均匀采样信号分为 M 路, 每一路都是对原始信号的进行采样间隔为 $T = MT_{\alpha,Q}$ 的理想采样. 和多通道采样一样, 这种时域直接重建周期非均匀采样的方法是复杂的. 利用定理 1 中 $M=1$ 时的插值等价结构(图 2), 可以得到分数阶 Fourier 域周期非均匀采样重建的滤波器组高效实现结构, 如图 9 所示.

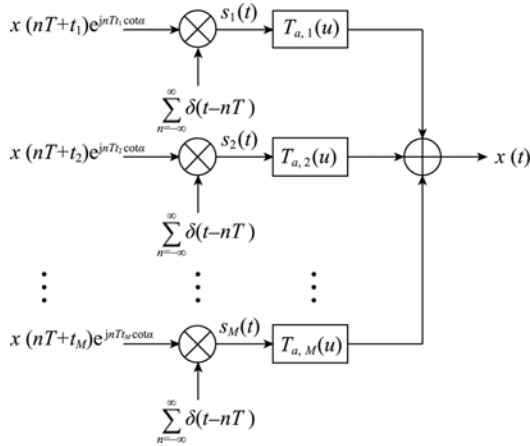


图 8 分数阶 Fourier 域周期非均匀采样信号重建原始连续信号框图

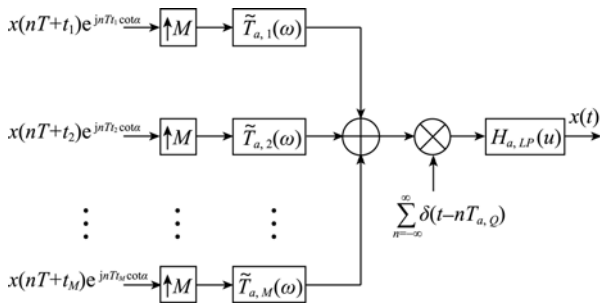


图 9 分数阶 Fourier 域周期非均匀采样信号重建原始连续信号的滤波器组实现

从图 9 可以看出, 通过每条支路内的 M 倍内插和数字滤波器环节, 得到原始信号的 Nyquist 均匀采样序列, 因此就可以按照传统 Nyquist 采样进行重建. 由于可以利用滤波器组的各种高效实现结构, 所以这种通过分数阶 Fourier 域滤波器组重建周期非均匀

采样的方法比直接时域插值方法高效.

由于分数阶 Fourier 域周期非均匀采样是分数阶 Fourier 域多通道采样的特例, 下面对分数阶 Fourier 域多通道采样的重建进行仿真.

信号 $x(t)$ 为 $\alpha=\pi/5$ 角度分数阶 Fourier 域 $B_\alpha=5$ 的带限信号, 通过 2 个通道得到输出 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$, 其中 2 个通道的滤波器分别为 $H_{\pi/5,1}(u)=1$ 和 $H_{\pi/5,2}(u)=ju$. 选取采样间隔 $T=0.3 < T_{\pi/5,Q}$. 仿真结果如图 10 所示.

其中图 10(a)和(b)是信号 $x(t)$ 的幅度以及实部和虚部, 图 10(c)和(d)为 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 的采样, 图 10(e)是对原始信号进行重建的结果.

4 分数阶 Fourier 域采样和分数阶 Fourier 域滤波器组的关系

第 3 节给出了分数阶 Fourier 域多通道采样和周期非均匀采样重建原始信号的滤波器组实现. 如果再结合定理 1 中采样恒等结构(图 3), 就可以得到从采样到重建的完整滤波器组实现, 如图 11 所示.

从图 11 可以看出, 通过分数阶 Fourier 域插值和采样恒等结构, 分数阶 Fourier 域多通道采样和插值可以完全采用滤波器组结构. 因此, 利用分数阶 Fourier 域插值和采样恒等结构, 可以把多通道采样和重建用滤波器组来实现. 也就是说, 分数阶 Fourier 域插值和采样恒等结构建立了分数阶 Fourier 域采样和分数阶 Fourier 域滤波器组的对应关系. 因此, 反过来, 也可以根据分数阶 Fourier 域准确重建滤波器组, 得到与之对应的采样策略和其重建方法. 比如, 对于如图 12(a)所示的分数阶 Fourier 域非均匀准确重建滤波器组, 其可以看作是把四通道均匀准确重建滤波器组的下面两通道合并成一个通道等价得到, 因而其第三路的抽取和内插因子是上面两路的一半, 其分析和综合滤波器都已经得到^[17,18]. 因此, 可以利用定理 1 将其转化为相应的分数阶 Fourier 域采样策略和直接重建方法, 如图 12(b)所示. 由于图 12(a)中非均匀准确重建滤波器组第三路的抽取因子为上两路抽取因子的一半, 因而根据图 2 和 3 的等价结构得到相应的分数阶 Fourier 域采样和重建的第三路采样速率为上两路的一半.

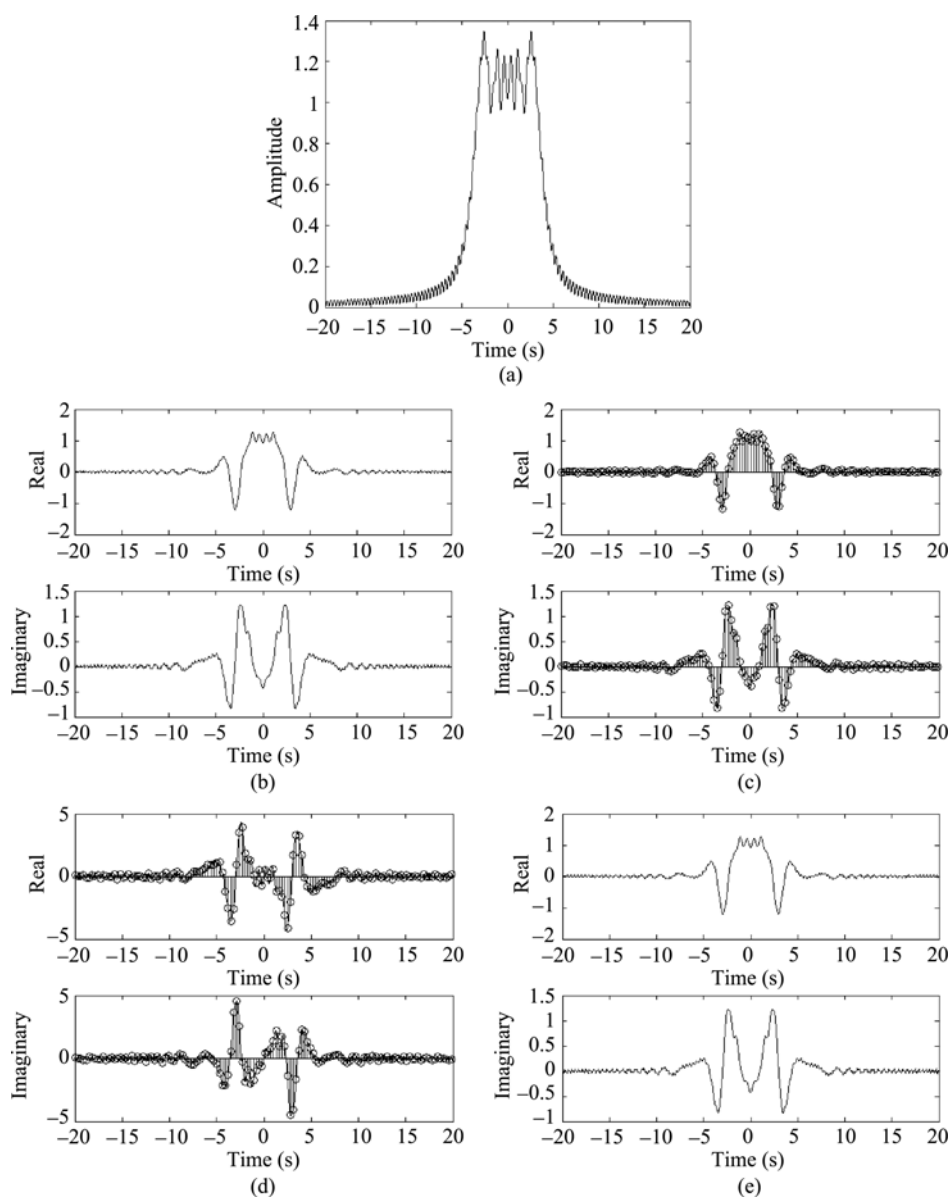


图 10 分数阶 Fourier 域多通道采样重建

(a) 信号 $x(t)$ 的幅度; (b) 信号 $x(t)$ 的实部和虚部; (c) $g_1(t)$ 和其采样 $g_1(nT)$; (d) $g_2(t)$ 和其采样 $g_2(nT)$; (e) 原始信号 $x(t)$ 的重建

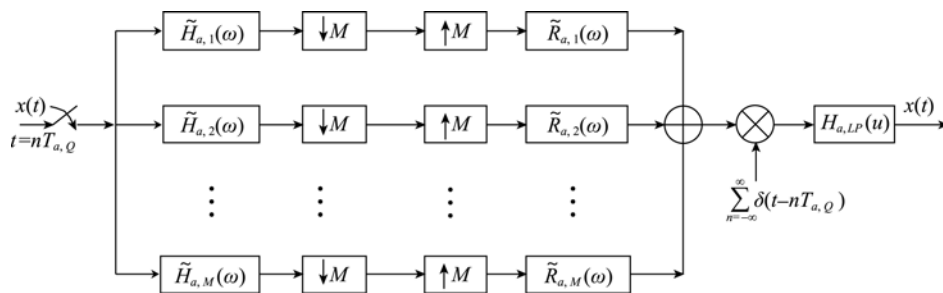


图 11 分数阶 Fourier 域多通道采样和重建的滤波器组实现

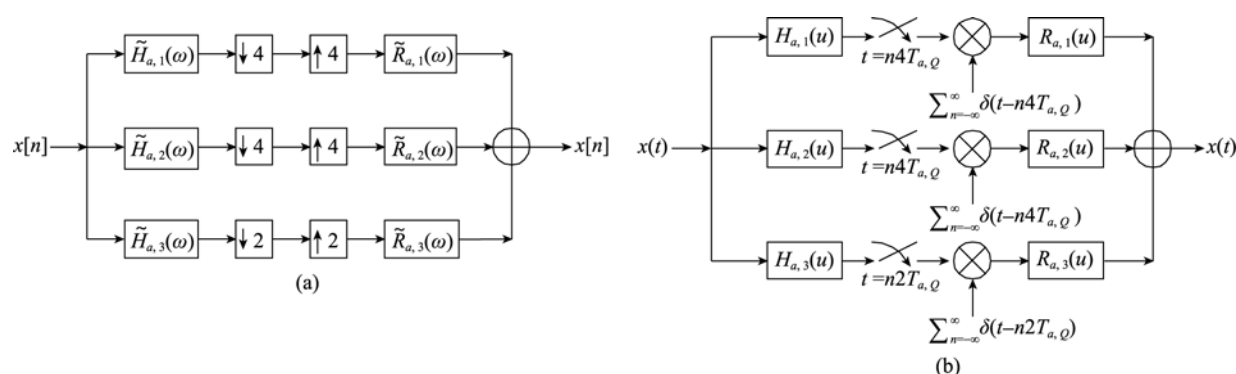


图 12 (a)分数阶 Fourier 域准确重建滤波器组以及(b)与之对应的采样和重建策略

5 结论

本文根据分数阶 Fourier 变换所特有的性质, 首先得到了分数阶 Fourier 域插值和采样恒等结构. 进而利用该恒等结构得到了分数阶 Fourier 域多通道采样和周期非均匀采样的滤波器组插值和重建高效方

法. 理论研究表明, 分数阶 Fourier 域插值和采样恒等结构建立了分数阶 Fourier 域采样和分数阶 Fourier 域滤波器组之间的关系, 并且可以根据分数阶 Fourier 域准确重建滤波器组得到相应的分数阶 Fourier 域采样和重建策略.

参考文献

- Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. IEEE Trans Signal Proc, 1994, 42(11): 3084—3091 [\[DOI\]](#)
- Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. J Inst Math Appl, 1980, 25(3): 241—265 [\[DOI\]](#)
- 陶然, 邓兵, 王越. 分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的研究进展. 中国科学 F 辑: 信息科学, 2006, 36(2): 113—136
- 陶然, 张峰, 王越. 分数阶 Fourier 变换离散化的研究进展. 中国科学 F 辑: 信息科学, 2008, 38(4): 481—503
- 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004
- Zayed A I. On the relationship between the Fourier transform and fractional Fourier transform. IEEE Signal Proc Lett, 1996, 3(12): 310—311 [\[DOI\]](#)
- Lohmann A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. J Opt Soc Amer A, 1993, 10(10): 2181—2186 [\[DOI\]](#)
- Ozaktas H M, Barshan B, Mendlovic D, et al. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relationship to chirp and wavelet transform. J Opt Soc Amer A, 1994, 11(2): 547—559 [\[DOI\]](#)
- Lohmann A W, Soffer B H. Relationship between the Radon-Wigner and the fractional Fourier transform. J Opt Soc Amer A, 1994, 11(6): 1798—1801 [\[DOI\]](#)
- Mustard D A. The fractional Fourier transform and the Wigner distribution. J Aust Math Soc B, 1996, 38: 209—219 [\[DOI\]](#)
- Pei S C, Ding J J. Relations between fractional operations and time-frequency distributions, and their applications. IEEE Trans Signal Proc, 2001, 49(8): 1638—1655 [\[DOI\]](#)
- Ozaktas H M, Aytur O. Fractional Fourier domains. Signal Proc, 1995, 46(11): 119—124 [\[DOI\]](#)

- 13 Cariolaro G, Erseghe T, Kraniuskas P, et al. A unified framework for the fractional Fourier transform. *IEEE Trans Signal Proc*, 1998, 46(12): 3206—3219[DOI]
- 14 Almeida L B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform. *IEEE Signal Proc Lett*, 1997, 4(1): 15—17[DOI]
- 15 Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform. *IEEE Signal Proc Lett*, 1998, 5(5): 101—103[DOI]
- 16 Tao R, Deng B, Zhang W Q, et al. Sampling and sampling rate conversion of band limited signals in the fractional Fourier transform domain. *IEEE Trans Signal Process*, 2008, 56(1): 158—171[DOI]
- 17 张峰, 陶然. 基于离散时间分数阶 Fourier 变换的多抽样率信号处理. *自然科学进展*, 2008, 18(1): 93—101
- 18 孟祥意, 陶然, 王越. 抽取和内插的分数阶 Fourier 域分析. *中国科学 E 辑: 技术科学*, 2007, 37(8): 1000—1017
- 19 Xia X. On bandlimited signals with fractional Fourier transform. *IEEE Signal Proc Lett*, 1996, 3(12): 72—74[DOI]
- 20 Zayed A I. On the relationship between the Fourier transform and fractional Fourier transform. *IEEE Signal Proc Lett*, 1996, 3(12): 310—311[DOI]
- 21 Erseghe T, Kraniuskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem. *IEEE Trans Signal Proc*, 1999, 47(12): 3419—3423[DOI]
- 22 Candan C, Ozaktas H M. Sampling and series expansion theorems for fractional Fourier and other transforms. *Signal Proc*, 2003, 83(11): 2455—2457[DOI]
- 23 张卫强, 陶然. 分数阶 Fourier 域上带通信号的采样定理. *电子学报*, 2005, 33(7): 1196—1199
- 24 Torres R, Pellat-Finet P, Torres Y. Sampling theorem for fractional bandlimited signals: A self-contained proof. Application to digital holography. *IEEE Signal Proc Lett*, 2006, 13(11): 676—679[DOI]
- 25 张峰, 陶然, 王越. 分数阶 Fourier 域带限信号多通道采样定理. *中国科学 E 辑: 技术科学*, 2008, 38(11): 1874—1885
- 26 Tao R, Li Z B, Wang Y. Spectral analysis and reconstruction for periodic nonuniformly sampled signals in fractional Fourier domain. *IEEE Trans Signal Proc*, 2007, 55(7): 3541—3547[DOI]
- 27 Papoulis A. Generalized sampling expansion. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1977, Cas-24(11): 652—654[DOI]
- 28 Jenq Y C. Digital spectra of nonuniformly sampled signals: Fundamentals and high-speed waveform digitizers. *IEEE Trans Instrum Meas*, 1988, 37(2): 245—251[DOI]
- 29 Jenq Y C. Perfect reconstruction of digital spectrum from nonuniformly sampled signals. *IEEE Trans Instrum Meas*, 1997, 46(3): 649—652[DOI]
- 30 Seidner D, Feder M. Vector sampling expansion. *IEEE Trans Signal Proc*, 2000, 48(5): 1401—1416[DOI]