

拟流函数法——叶轮机机械内三维流动分析问题 and 设计问题的一种求解方法*

徐建中 顾春伟 石建成 杜建一

(中国科学院工程热物理研究所, 北京 100080)

摘 要

本文从动量方程的特点出发并满足连续方程, 引入了两个拟流函数。每个拟流函数的主方程均只包含其自身的二阶偏导数, 而不包含另一个拟流函数的二阶偏导数。这样, 完全的三维解便可通过两个拟流函数主方程的分别单独求解和它们之间的相互迭代来获得。文中给出了在任意非正交坐标系中拟流函数的主方程和相应的边界条件。对叶轮机机械内部三维气动分析问题和设计问题的求解进行了讨论和计算, 并与解析解、其他数值解法做了比较。结果表明: 这种拟流函数方法计算准确而简便, 易于得到收敛结果, 是求解三维无粘流动的好方法。

关键词: 叶轮机机械气动热力学, 计算流体力学, 三维流动

一、引 言

直接求解三维流动是叶轮机机械气动计算的一个重要方向。近年来, 它已经受到广泛的重视, 并取得了不少进展。

在用时间相关法求解 Euler 方程方面, 已有不少结果, 开始在实践中得到应用。尽管 Euler 方程是准确的无粘模型, 但由于要求很大的计算机内存和很长的计算时间, 这一方法在相当多的工程问题中还难以普遍采用。

势函数方法具有计算简便的显著优点, 特别是非等熵势函数^[1-3]的发展扩展了其应用范围。但是, 无旋假定仍是使用这种方法的主要限制。而且, 三维非等熵势函数计算的激波对 R-H 条件的满足也较差^[4]。

将三维流动分解为无旋部分和有旋部分的方法, 近年来也进行了一些工作^[5,6]。它可视为二维流函数方法在三维情况下的普遍化, 或是势函数与流函数的某种组合。

在三维流动的计算中, 也曾考虑过流函数方法^[7,8]。但由于两个流函数的主方程均包含另一个流函数的二阶偏导数, 彼此耦合紧密, 计算很复杂。

在本文中, 将基于动量方程的特点, 根据连续方程的要求, 提出两个拟流函数。它们主方

本文 1990 年 9 月 21 日收到, 1991 年 6 月 16 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

程之间的联系比较松散,形式相近,而边界条件也不复杂,便于数值求解。为了说明本方法的可行性,对三维气动分析问题进行了计算,与解析解、其他计算方法做了比较;还用这一方法求解了给定某种形式 Mach 数分布的三维气动设计问题,给出了很好的结果。

二、拟流函数及其主方程

无粘性气体在以等角速度 ω 旋转的叶轮机械内做相对定常、绝热运动的基本方程为:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{W}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \nabla(W)^2 - \mathbf{W} \times (\nabla \times \mathbf{V}) - (\omega)^2 \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad (3)$$

这里 I 是相对滞止转焓。

在根据连续方程 (1) 来引入中间变量求解三维流动的方法中,通常是由满足连续方程,或者得出矢量势的表达式,或者得出管形场的结论,再代入方程 (2) 和 (3) 求解。由于未考虑动量方程的具体形式,得到的方程比较复杂,求解困难。若在根据方程 (1) 寻求中间变量时,能与方程 (2) 的特点相结合,使最终的方程比较便于计算,无疑是有意义的。

在任意非正交曲线坐标系(图 1)中,方程 (1) 和 (2) 取作

$$\frac{\partial(\sqrt{g} \rho w^i)}{\partial x^i} = 0, \quad (4)$$

$$w^j \frac{\partial w^1}{\partial x^j} + w^j w^i \Gamma_{ij}^1 + 2\omega_j w_i \varepsilon^{ij1} - (\omega)^2 r^1 = -RT \frac{\partial \ln \rho}{\partial x^1} g^{11} - R \frac{\partial T}{\partial x^1} g^{11}, \quad (5)$$

$$w^j \frac{\partial w^2}{\partial x^j} + w^j w^i \Gamma_{ij}^2 + 2\omega_j w_i \varepsilon^{ij2} - (\omega)^2 r^2 = -RT \frac{\partial \ln \rho}{\partial x^2} g^{22} - R \frac{\partial T}{\partial x^2} g^{22}, \quad (6)$$

$$w^j \frac{\partial w^3}{\partial x^j} + w^j w^i \Gamma_{ij}^3 + 2\omega_j w_i \varepsilon^{ij3} - (\omega)^2 r^3 = -RT \frac{\partial \ln \rho}{\partial x^3} g^{33} - R \frac{\partial T}{\partial x^3} g^{33}, \quad (7)$$

其中 Γ_{ij}^k 是二阶 Christoffel 符号; ε^{ijk} 为顺序记号或行列式张量。在从方程 (2) 得出方程 (5) — (7) 时应用了状态方程。

为满足方程 (4), 可引入许多种函数或其组合。这给选择中间变量很大的自由度, 有可能考虑动量方程的特点, 使其求解尽可能简单。在二维流动中, 流函数的应用使计算大为简化; 在三维流动中, 由流函数及其线性组合构成新的中间变量, 对计算也可能是有利的。基于这样的想法, 引入下面的拟流函数 Φ 和 Ψ :

$$\begin{cases} \sqrt{g} \rho w^1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x^3}, \\ \sqrt{g} \rho w^2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^3}, \\ \sqrt{g} \rho w^3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (8)$$

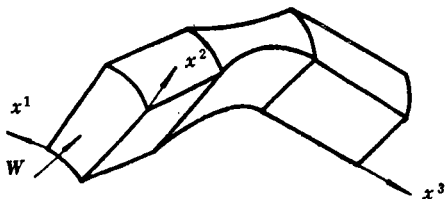


图 1 曲线坐标系

将这一定义式代入方程(5)得到

$$w^i \left(\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right)_{x^i} + w^i w^i \Gamma_{ii}^1 + 2\omega_i w_j \varepsilon^{ij1} - (\omega)^2 r^1 = -RT \frac{\partial \ln \rho}{\partial x^1} g^{k1} - R \frac{\partial T}{\partial x^1} g^{k1}. \quad (9)$$

在此方程中,仅出现 Φ 的二阶导数项,而无 Ψ 的二阶导数项。可见,用它来作为 Φ 的主方程是便于求解的。同样,将(8)式代入(6)式有

$$w^i \left(\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^3} \right)_{x^i} + w^i w^i \Gamma_{ii}^2 + 2\omega_i w_j \varepsilon^{ij2} - (\omega)^2 r^2 = -RT \frac{\partial \ln \rho}{\partial x^2} g^{k2} - R \frac{\partial T}{\partial x^2} g^{k2}. \quad (10)$$

这个方程不出现 Φ 的二阶导数项,是求解 Ψ 的主方程。方程(9)和(10)在形式上类似,这是有利于求解的。方程(8)定义的拟流函数,与文献[9]中的流函数形式上类似,但出发点和想法都不相同。在三维流动中, Φ 和 Ψ 都没有明确的物理意义。因此,将它称为拟流函数。

我们看到,与流函数相比,拟流函数也是标量函数,但其计算较流函数简单。与文献[10]中引入的类流函数(Streamlike Functions)相比,后者是矢量函数,二者是不同的;在具体求解中,后者还要将速度分裂,计算比较复杂。可见,用拟流函数来求解三维定常流动是简便的。

已经指出,满足连续方程的表达式可有许多种,这可根据欲求解问题的情况加以选择,使计算最为简便。因此,拟流函数的定义可以是多种多样的。这种能适应各种不同问题的灵活性,是本文方法另一个显著的特点。

从上面的分析可以看出,除定常、无粘条件外,拟流函数方法没有其他假定,是与 Euler 方程等价的数学模型。它既计及了流动中的旋度,又可考虑非等熵效应,这种方程形式简单、运用方式灵活的拟流函数方法可以成为求解三维流动的有用工具。

在求解不可压流时,除前述两拟流函数主方程外,可通过另一方向的动量方程方便地求出压强。对于可压缩流,可象二维流函数方法那样,从另一方向的动量方程来计算密度^[11]:

$$\begin{aligned} w^3 w^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} &= w^i \frac{\partial \rho w^3}{\partial x^i} + \rho w^i w^i \Gamma_{ii}^3 + 2\rho \omega_i w_j \varepsilon^{ij3} - \rho (\omega)^2 r^3 \\ &+ RT \frac{\partial \rho}{\partial x^k} g^{k3} + \rho R \frac{\partial T}{\partial x^k} g^{k3}, \end{aligned} \quad (11)$$

用这种方法计算出来的激波,满足 Rankine-Hugoniot 条件。

三、边界条件和差分离散

在如图 1 所示的任意非正交坐标系,有以下的边界条件。

1. 物面(包括叶片表面和上、下壁面)条件

由无渗透条件和拟流函数定义知,在叶片表面的 $W^1 = 0$ 和壁面上的 $W^2 = 0$ 可分别表为

在叶片表面: $\Phi = \text{常数}$; 在上、下壁面: $\Psi = \text{常数}$ 。

2. 进出口条件

在进口边界,给定流速的大小和方向。取进口面上的 Φ 为零,而 Ψ 值由给定的速度来确定。其他的进口条件和出口条件一样,需根据该处的流动状态来给出。

3. 周期条件

对从叶片尾缘到出口边界的后周期区,采用不考虑尾涡面存在的简单周期条件。这样,在

前、后周期区, 对应点上的任何气体参数均应相等。由此可得:

$$\Phi_{n_1+i,j,k} = \Phi_{i,j,k}, \quad \Psi_{n_1+i,j,k} = \Psi_{i,j,k},$$

此处 i, j, k 分别表沿 x^1, x^2, x^3 的坐标; n_1 为 x^1 方向上的网格点数。

对两个拟流函数主方程 (9) 和 (10) 离散化后, 可得:

$$EFA \cdot (\Phi_{i,j,k-1}^{n+1} - \Phi_{i,j,k-1}^n) + EFB \cdot (\Phi_{i,j,k}^{n+1} - \Phi_{i,j,k}^n) + EFC \cdot (\Phi_{i,j,k+1}^{n+1} - \Phi_{i,j,k+1}^n) = EFDA^*, \quad (12)$$

$$EFA \cdot (\Psi_{i,j,k-1}^{n+1} - \Psi_{i,j,k-1}^n) + EFB \cdot (\Psi_{i,j,k}^{n+1} - \Psi_{i,j,k}^n) + EFC \cdot (\Psi_{i,j,k+1}^{n+1} - \Psi_{i,j,k+1}^n) = EFDB^*, \quad (13)$$

其中

$$EFA = \left(\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \right)_{i,j,k-\frac{1}{2}}, \quad EFB = \left(\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \right)_{i,j,k-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}},$$

$$EFC = \left(\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}}, \quad EFDA^* = \frac{(\Delta x^3)^2 f_1^n}{w^3}, \quad EFDB^* = \frac{(\Delta x^3)^2 f_2^n}{w^3},$$

而 f_1^n 和 f_2^n 分别为方程 (12) 和 (13) 的残差。

在计算中, 为使差分格式统一和保证计算的稳定, 引入人工粘性:

$$\bar{\rho}_{i,j,k+\frac{1}{2}} = (1 - v_{i,j,k}) \rho_{i,j,k+\frac{1}{2}} + v_{i,j,k} \rho_{i,j,k-\frac{1}{2}},$$

$$v_{i,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{当 } M_{i,j,k} < 1; \\ c \left(1 - \frac{1}{M^2} \right), & \text{当 } M_{i,j,k} \geq 1 \quad (1 < c < 2). \end{cases}$$

方程 (11)–(13) 的收敛准则分别为:

$$\max(\Delta \Phi, \Delta \Psi) \leq \varepsilon_1, \quad \max(\Delta \rho) \leq \varepsilon_2.$$

四、气动分析问题的计算实例

拟流函数方法在叶轮机气动分析问题或正问题中的计算过程可分为以下步骤:

1. 给定初值。

2. 从方程 (12) 和 (13) 解 Φ 和 Ψ 。

3. 由得出的 Φ 和 Ψ 值, 根据能量方程 (3) 和密度方程 (11) 计算温度和密度分布 (对不可压流, 则从动量方程 (7) 算出压强), 并进而得到新的速度场。

4. 重复上述两步骤, 直至满足所要求的收敛准则。

为检验本文方法, 先求解一个有解析解的、类似于三维叶栅流场的旋转管道流场; 再对一个三维轴流叶栅进行计算。

算例 1. 旋转管道^[12]

通道的几何形状如图 2 所示; 计算网格见图

3. 对这个有解析解的流场, 其各参数取为:

$$r_1 = 1.217, r_2 = 1.802, z_1 = 0.4, z_2 = 0.7, n = 8,$$

$$m = -120, a = -35, b = 0.1, \omega = -10, k = 1.$$

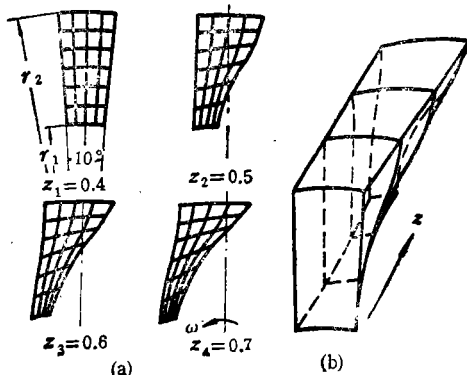


图 2 通道几何形状

((a) 曲面图, (b) 立体图)

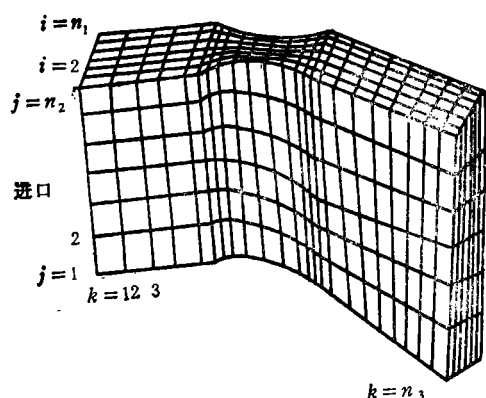
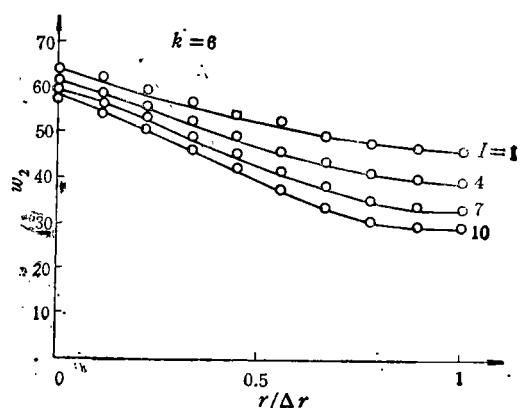


图3 计算网格

图4 沿 x^1 方向速度分布
(○为计算值, —为解析解)

计算过程收敛良好, 每一步迭代所用机时不多。迭代 90 次后, 三个方向速度的相对误差均小于 2%。图 4 给出了拟流函数法得到的速度分布与解析解给出结果的比较。可以看到, 计算解与解析解是一致的, 二者的符合是比较好的。

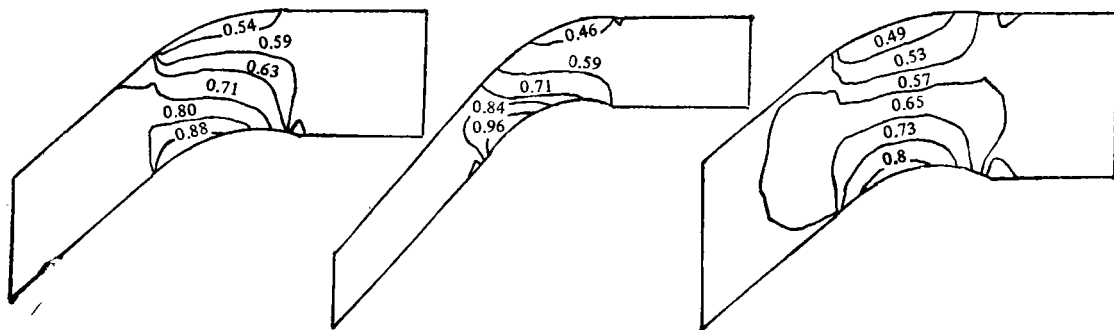
这个算例表明, 用拟流函数来求解三维流场是可行的, 其计算简单、收敛快。

算例 2. 轴流压气机静子^[13,14]

叶型参数与文献 [13] 和 [14] 中的相同。进、出口参数列在表 1 上。计算网格划分为 $9 \times 9 \times 58$, 其中前、后缘点分别为第 20 站和第 39 站。

表1 压气机静子进、出口参数

	r	P_1^0	T_1^0	M_1	β_1	β_2
1	166.4	14532.2	325.19	0.806	45.03	0.00
2	187.2	15279.1	328.12	0.778	43.05	0.00
3	228.9	15798.8	329.40	0.710	39.20	0.00
4	270.51	15796.1	329.80	0.647	35.80	0.00
5	312.15	15427.9	331.45	0.604	34.19	0.00
6	332.97	14954.4	333.91	0.587	34.70	0.00

图5 沿 x^1 - x^2 截面等 Mach 数分布

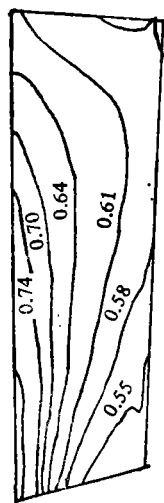


图 6 流道中心截面等 Mach 数分布

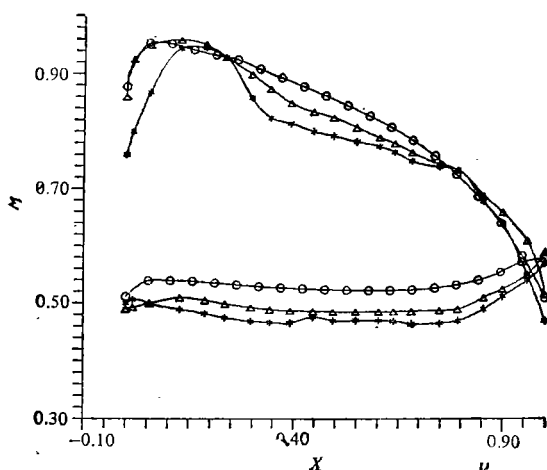


图 7 叶片中心截面 Mach 数分布
(*根据文献 [13]; Δ 根据文献 [14]; $\circ$ 为本文资料)

图 5 给出了叶根、叶中和叶顶三个截面上的等 Mach 数分布; 图 6 为流道中心截面上的等 Mach 线分布。从图 7 所示的为本文方法计算得出的叶中截面 Mach 数的分布与文献 [13, 14] 用两族流面迭代计算得出的三维结果的比较可以看出, 三者基本上是相似的; 而用多个两族流面迭代所得到的完全三维解的计算结果^[14]与本文的结果更为接近。

用本文方法还计算了几个压气机和透平的算例, 限于篇幅, 不一一介绍。总的结论是, 拟流函数方法是一种求解三维流场的有效方法, 数值结果准确, 而计算简便。

五、在气动设计问题中的应用

叶轮机械完全的三维反问题是根据给定的速度或压强分布, 计算出其通道尺寸和叶片的空间坐标。它包括确定流道形状、叶片前后缘位置和叶型坐标。因此, 这种普遍意义下的反问题是十分复杂的。目前, 这方面的研究工作主要是针对计算叶型的三维坐标这一方面的课题来进行的^[15, 16]。

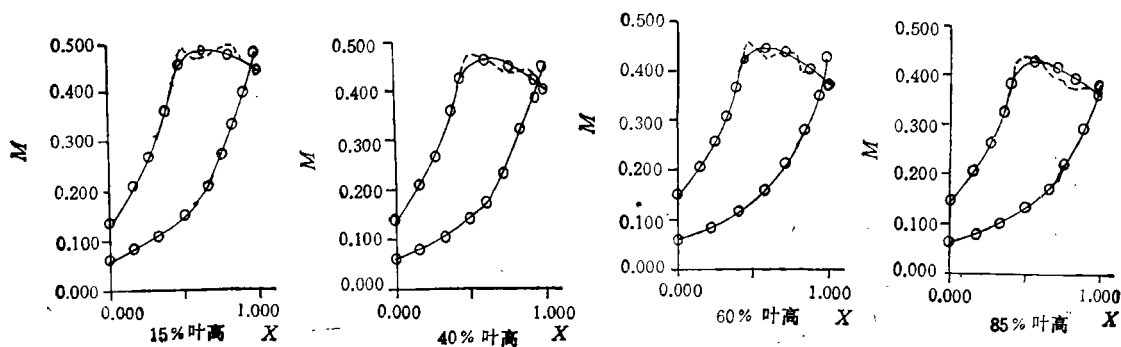


图 8 叶型表面 Mach 数分布
(---为原始曲线, —为目标曲线, $\circ$ 为修改点)

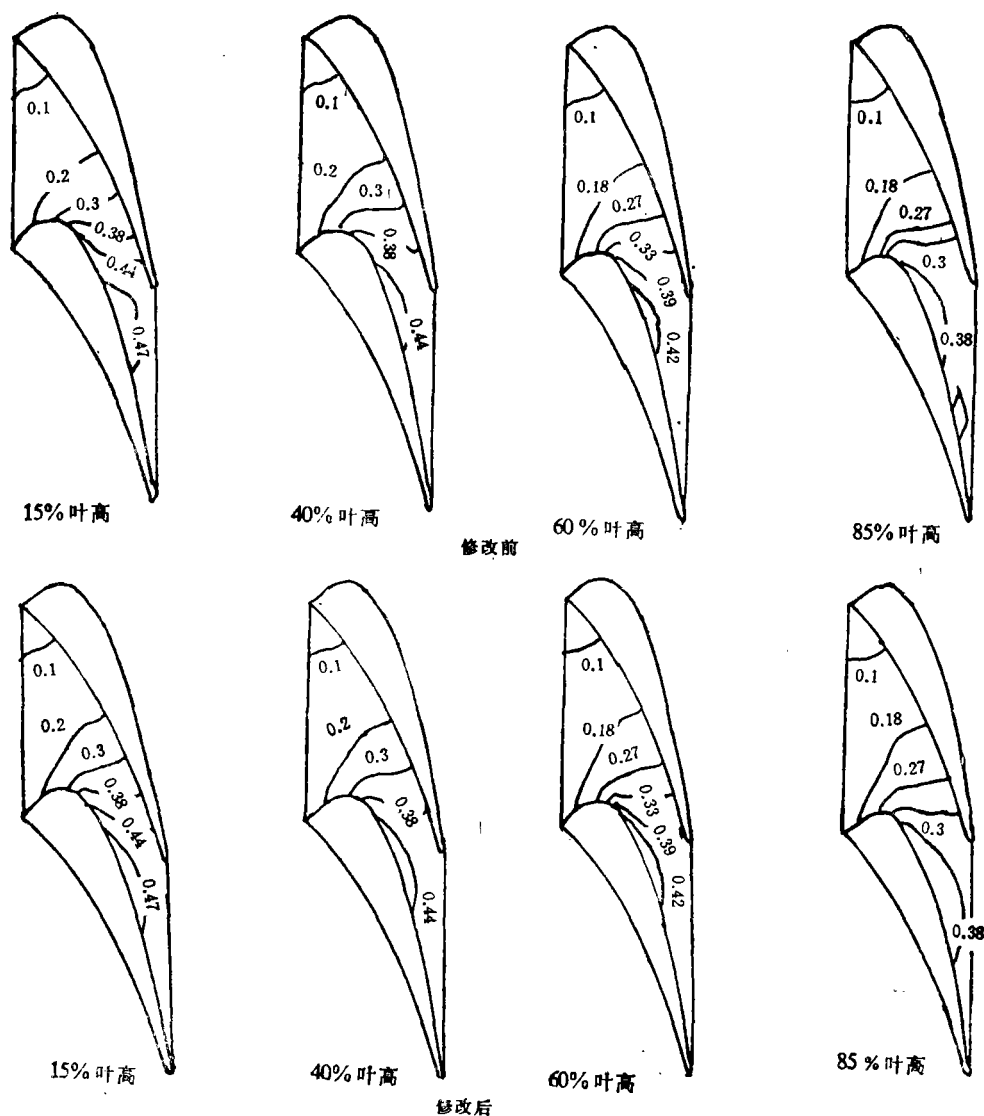


图9 修改前后等 Mach 数分布

在现有的气动设计体系中,通常是根据迴转面上二维计算的结果来确定叶型,再经积叠而得到整个三维叶型。很明显,基于这一叶型的三维流动计算与原来二维计算的结果不会完全相同。为了保证所要求的速度或压强分布,必须修改叶型。注意到在实际应用中,强度和冷却等的要求是很重要的,从工程的角度看,根据给定的速度或压强分布来计算出叶片三维坐标的这种设计问题或半反问题是有意义的。本文正是解决这一类设计问题的,所给定的是叶片表面的 Mach 数分布。

在叶片表面上某点,其 Mach 数与坐标之间的关系只能求得近似的表达式。事实上,将关系式 $M = M(x^1, x^2, x^3)$ 在该点 (x^1, x^2, x^3) 的邻域展开有:

$$M = M_0 + M'_0 \Delta x^1 + \frac{1}{2} M''_0 (\Delta x^1)^2$$

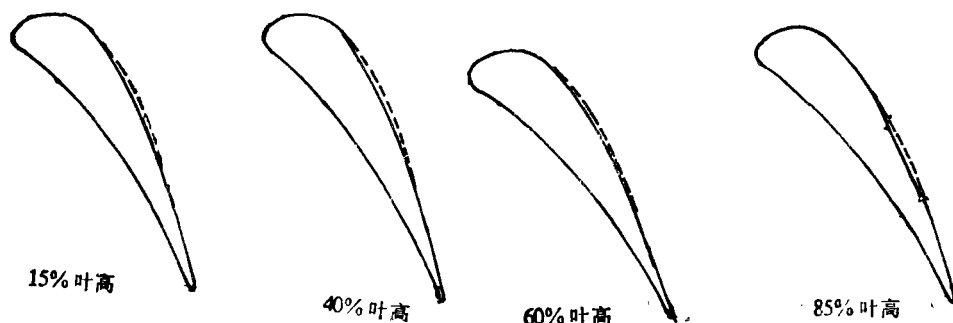


图 10 原始叶型和修改后叶型相比较
(—— 为原始曲线, ---- 为修改后曲线)

于是,可以得到

$$\Delta x^1 = \frac{-M'_0 \pm \sqrt{M_0'^2 - 2(M_0 - M)M_0''}}{2(M_0 - M)}$$

对于这种给定 Mach 数分布的气动设计问题,求解过程如下。

1. 给定初场和初始叶型;给定所要求的 Mach 数分布。
2. 计算度规张量。
3. 解两个拟流函数主方程,并检验 Φ 和 Ψ 是否满足收敛准则。若不满足,则重新计算 Φ 和 Ψ ,直至满足收敛准则。
4. 计算 Mach 数分布,检验是否满足收敛准则。若不满足,则修改叶片型面坐标,重复步骤 2, 3 和 4, 开始新一轮迭代,直至 Mach 数收敛准则得到满足。

算例 3. 轴流透平导叶

导叶共有 14 片叶片。进口气体参数为: 滞止压强 10 780 000Pa, 滞止温度 1350K, 静压 10 716 810Pa, 气流角 0° 。平均出口气流角是 74° 。

图 8—10 给出了部分计算结果。在图 8 中画出了三个典型截面上的三种 Mach 数分布曲线,它们分别是根据初始叶型计算得到的,设计问题所要求的和按修改后叶型算出的。从比较中可以看出,修改后叶型内的 Mach 数分布与所要求的分布是完全一致的。

从图 9 所示的三个截面上叶栅通道内的等 Mach 数线分布来看,它们在初始叶型和修改后的叶型中有明显不同。图 10 中修改前、后叶型坐标的比较表明,叶背中部型线有了相当的变化。

由这些结果不难得出,拟流函数方法可以根据给定的 Mach 数分布,直接计算出叶片的三维坐标。

应当指出,在本文方法中,设计问题的计算是与分析问题的计算紧密联系的。这使得本方法易于成为叶轮机械三维气动设计体系的一个组成部分,成为气动设计的有用工具。

六、结 语

从满足连续方程和尽可能减少由动量方程得出的求解主方程的非线性程度出发,本文发展了一种通过两个拟流函数迭代求解三维定常流动的方法。所得出的两个拟流函数主方程均

只包含其自身的二阶偏导数项,这样,数值求解时易于拟线性化。而且,两个主方程间的关连相对松散,可分别单独计算再迭代得到整个三维流场的解。

给出了在任意非正交坐标中的拟流函数主方程及相应的边界条件,并给出了其在三维气动分析问题和设计问题中应用的实例。数值结果表明,拟流函数法是一个简便而有效的三维流动分析和设计工具,它有望在工程实践中得到广泛应用。

从方法上看,拟流函数法的基本思想在运用上是灵活的,对外部流动和其他内部流动也是适用的。因此,这种在数学上与 Euler 方程等价、在计算上颇为简单的拟流函数方法的应用范围是很广的。

参 考 文 献

- [1] Klopfer, G. H. & Nixon, D., *ALAA Paper* No. 83-0375, 1983.
- [2] Hafez, M. et al., *ibid.*, No. 84-1182, 1984.
- [3] Xu, J. Z. et al., *ASME J. of Turbomachinery*, **110** (1988), 363—368.
- [4] 徐建中,航空学报, **8**(1987), 342—347.
- [5] Lacer, C. & Hirsch, Ch., *ASME Paper* No. 82-GT-316, 1982.
- [6] Giannakoglou, K. et al., *ISABE*, 85-7050, 1985.
- [7] Giese, J. H., *J. of Mathematics and Physics.*, **30** (1951), 31—35.
- [8] 吴文权,机械工程学报, **15**(1979), 61—67.
- [9] Moore, F. K., *NACA*, TN 2279, 1950.
- [10] Hamed, A. & Abdallah, S., *ALAA J. of Aircraft*, **16** (1979), 801—802.
- [11] 徐建中等,中国科学 A 辑, **29**(1989), 421—428.
- [12] 蔡睿贤等,工程热物理学报, **5**(1984), 348—353.
- [13] 朱根兴等,同上, **4**(1983), 134—142.
- [14] 汪庆桓等,同上, **4**(1983), 336—346.
- [15] Varetta, M., *ISABE*, 87-7022, 1987.
- [16] Zedan, H. & Sehra, A. K., *ASME Paper* No. 90-GT-67, 1990.