



稳定分层湍流的大涡模拟

沈治, 李宇鹏, 崔桂香*, 张兆顺

清华大学工程力学系, 北京 100084

* 联系人, E-mail: cgx@mail.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2009-04-10; 接受日期: 2009-08-11

中国气象局城市气象基金和国家自然科学基金(批准号: 10872109, 10872020)资助项目

摘要 稳定分层湍流是大气和海洋流动中常见的自然现象, 是预测大气和海洋流动的重要物理机制. 我们用大涡模拟方法研究稳定分层流体湍流, 以期获得与实际大气和海洋中稳定分层湍流相符的性质. 我们在不同初始条件的流场和不同的流动特征参数(雷诺数 Re 和弗罗德数 Fr) 下用大涡模拟方法获得充分发展湍流场. 通过分析湍动能和湍流特征尺度随时间的演化考察稳定分层湍流演化过程; 并通过三维能谱、水平和垂直能谱来检验数值模拟是否和真实大气、海洋中实测结果一致. 研究表明, 大涡模拟可以用较少网格数获得和实测一致的稳定分层湍流性质. 不同的初始流场都能演化为湍流, 并且发现演化过程的后期总是内波能量占优势. 研究证实要获得和实测一致的稳定分层湍流的关键是特征参数必须满足一定条件: 特征雷诺数和弗罗德数不一定要和实际大气和海洋中的参数相等, 但是要求雷诺数足够大, 弗罗德数足够小(例如 $Re > 10^2$, $Fr < 0.1$); 特别重要的是组合参数 $ReFr^2$ 必须大于 10.

关键词

分层湍流
内波
位涡
大涡模拟

稳定分层是指重力场中流体密度梯度小于零, $d\rho/dz < 0$ (z 是与地面垂直向上的坐标), 或温度梯度大于零, $dT/dz > 0$. 稳定分层在大气和海洋流动中是常见的现象, 而且是产生大气和海洋湍流的主要因素之一. 稳定分层流体是静稳定的, 但受扰动后能激发内波, 内波的破碎可导致湍流, 称为稳定分层湍流, 简称分层湍流. 稳定分层流体中回复力是浮力, 因此分层湍流也称浮力湍流. 高雷诺数稳定分层流动中, 还可能发生准二维的有旋环流. 由于分层湍流在大气和海洋流动的演化中起重要作用, 地球物理学和流体力学界对这种流动都十分关注. 大气或海洋中的分层湍流属于高雷诺数 Re 和低弗罗德数 Fr 的各向异性湍流, 除了耗资巨大的现场实测外, 对于

这种流动的理论、实验和数值模拟研究都十分困难. 从 20 世纪末至今, 地球物理学家和湍流研究工作者对这种流动作了大量的数值模拟和理论研究^[1~3], 对于这种湍流有了进一步认识, 但是, 至今仍然没有完全满意的数值模拟结果. 例如, 关于分层湍流的能谱问题, 大气或海洋实测结果表明, 垂直湍动能能谱有 k^{-3} 规律^[4], 而水平湍动能能谱有 $k^{-5/3}$ 规律^[5]. 已有实验室测量或数值模拟结果都未能获得和实测完全一致的结果. 研究者往往把这种不满意的结果归因于实验或数值模拟的雷诺数不够高, 或弗罗德数不够低. 最近, Brethouwer 等人^[6]提出分层湍流研究不仅需要 $Re \gg 1$ 和 $Fr \ll 1$ 的条件, 还需要用组合参数 $ReFr^2 \gg 1$ 来判断是否符合大气或海洋分层湍流的条

引用格式: 沈治, 李宇鹏, 崔桂香, 等. 稳定分层湍流的大涡模拟. 中国科学 G 辑, 2009, 39(10): 1503—1513

Shen Z, Li Y P, Cui G X, et al. Large eddy simulation of stably stratified turbulence. Sci China Ser G, doi: 10.1007/s11433-009-0293-9

件, 他们用自己和前人的数值模拟及物理实验结果验证了组合参数的必要性. Brethouwer等人^[1]的观点是, 虽然数值模拟和物理实验的雷诺数不可能和实际大气、海洋流动中的雷诺数相等, 但是只要雷诺数足够大, 弗罗德数足够小, 且组合参数满足 $ReFr^2 \gg 1$, 数值模拟和物理实验就能获得与实测相同的能谱规律.

数值模拟浮力湍流的困难之一是高雷诺数. 现有的湍流精确数值模拟有两种方法, 直接数值模拟(DNS)和大涡模拟(LES). 完全直接数值模拟需要很高的分辨率, 现有的计算机资源还不可能实现高雷诺数浮力湍流的完全直接数值模拟. 现有直接数值模拟研究中大多数采用所谓超黏模型^[6], 即在黏性项上附加 4 阶黏性项 $\nu_2 \Delta \Delta \mathbf{u}$, 其目的是使小尺度(高波数)湍流急速衰减, 以保证计算稳定性. 大涡模拟方法通过附加亚格子黏性的方法保证可解尺度(大尺度)湍流计算的稳定性. 这两种解决困难的方法并没有本质差别, 为此, 本文采用大涡模拟的计算方法.

理论上研究稳定分层湍流的浮力效应可暂时不考虑剪切和旋转, 在均匀湍流中研究分层湍流基本性质, 一方面可以直接考察稳定分层的浮力效应; 另一方面计算简单, 可在足够大的三维立方体空间中应用谱方法计算, 本文采用该方法研究稳定分层湍流的基本性质. 主要算例按初始场的不同分三组, 第一组的初始场是简单内波; 第二组初始场为简单位涡, 即泰勒-格林涡; 第三组初始场是均匀各向同性湍流.

1 计算模型和计算方法

在大气和海洋中流动的空气与水均可视作不可压缩牛顿流体. 在温度梯度或密度梯度足够小时, 可以采用布辛内斯克假定. 在上述条件下, 海洋中分层流动的控制方程为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} g \mathbf{e}_z + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho' + w G_\rho = D \Delta \rho', \quad (3)$$

上式中 ν , D 分别是流体运动分子黏性系数和密度扩散系数; g 是重力加速度, $\mathbf{e}_z$ 是垂直于地面向上的单位向量. ρ_0 是具有等梯度 $G_\rho = d\rho_0/dz$ 的环境密度; p' 表示

除了静水压强以外由浮力产生的压强, ρ' 是由浮力产生的密度扰动量, 并假定 $\rho'/\rho_0 \ll 1$, w 是垂直向上的速度分量.

大气运动中, 设空气是完全气体, 即 $p = R\rho T$, 当浮力引起的密度变化为小量时, $T'/T_0 \approx -\rho'/\rho_0$, 大气中分层流动的控制方程可写作:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0} g \mathbf{e}_z + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T' + w G_T = \kappa \Delta T', \quad (6)$$

方程(6)中 κ 是热扩散系数. 只要以气体温度扩散系数 κ 取代质量扩散系数 D , 大气分层流动和海水分层流动的方程组在形式和性质上完全相同. 本文将方程(4)~(6)作为数值计算的基本方程组.

过滤方程组(4)~(6)可获得大涡模拟的基本方程如下:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\frac{\nabla \bar{p}'}{\rho_0} + \frac{\bar{T}'}{T_0} g \mathbf{e}_z + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{T}'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{T}' + \bar{w} G_T = \kappa \Delta \bar{T}' + \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (9)$$

上式中有上横杠的变量为过滤后的量, 例如:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_D} \int G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (10)$$

方程(10)中 $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 是过滤函数, $\bar{\mathbf{u}}$ 是过滤后的速度, 在大涡模拟中称作可解尺度速度. 方程(7)中 $\boldsymbol{\tau}$ 称作亚格子应力, 它是可解尺度运动和过滤掉的运动之间的动量输运, 亚格子应力需要用模型来封闭. 同理, 方程(9)中 $\mathbf{q}$ 是亚格子热通量, 它是可解尺度运动和过滤掉的运动间的热量输运, 亚格子通量也需要用模型封闭.

本文中亚格子应力采用 Smagorinsky 涡黏模式, 即

$$\tau_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \tau_{kk} \delta_{ij}, \quad (11)$$

在均匀湍流中, 亚格子涡黏系数全场是常数:

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \langle 2S_{ij} S_{ij} \rangle^{1/2}, \quad (12)$$

上式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示空间体积平均, Smagorinsky 系数 $C_s = 0.1$, 此式中 Δ 是过滤尺度, 计算中采用网格长度. 亚

格子通量采用涡扩散模式, 即

$$q_i = \kappa_t \frac{\partial T'}{\partial x_i}, \quad (13)$$

均匀湍流中采用常数亚格子涡扩散系数为

$$\kappa_t = \nu_t / Pr_t, \quad (14)$$

Pr_t 是湍流普朗特数, 通常采用 $Pr_t = 1.0$.

将常数涡黏和涡扩散系数模式代入公式(7)和(9), 并略去可解尺度量的上横杠, 均匀分层湍流的大涡数值模拟方程可写作:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0} g \mathbf{e}_z + (\nu + \nu_t) \Delta \mathbf{u}, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T' + w G_T = (\kappa + \kappa_t) \Delta T', \quad (17)$$

均匀湍流的数值计算采用谱方法, 在立方体计算域中用周期边界条件求解控制方程组. 首先将大涡模的基本方程(15)~(17)写成以下形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = & \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} - \nabla \left(\frac{p'}{\rho_0} + \frac{u_i u_i}{2} - \frac{\tau_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) \\ & + \frac{T'}{T_0} g \mathbf{e}_z + (\nu + \nu_t) \Delta \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla T' - w G_T + (\kappa + \kappa_t) \Delta T', \quad (20)$$

上式中 $\boldsymbol{\Omega}$ 是速度场旋度. 将流动变量作傅里叶展开:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \exp(\mathbf{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \\ p(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{p}(\mathbf{k}, t) \exp(\mathbf{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (21)$$

同时将物理空间的基本方程组投影到谱空间可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = & (\widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}})_i - \mathbf{i} k_i \hat{\pi} + \hat{T}'(\mathbf{k}, t) g \delta_{i3} / T_0 \\ & - (\nu + \nu_t) k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (22)$$

$$-\mathbf{i} k_i \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \hat{T}'}{\partial t} = -\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla T'} - \hat{w} G_T - (\kappa + \kappa_t) k^2 \hat{T}', \quad (24)$$

(22) 式是运动方程(18)在谱空间的表示形式; 方程(23)是连续方程(19)在谱空间的形式, 方程(24)是温度输运方程(20)在谱空间的形式. 公式(22)右边第 2 项中

$\hat{\pi} = \hat{p}(\mathbf{k}, t) + \widehat{u_i u_i} / 2 - \hat{\tau}_{kk} / 3$. 谱方法计算均匀湍流的步骤是: 先将公式(22)中 $\hat{\pi}$ 用谱空间连续方程(23)消去, 于是方程(22)和(24)是速度和温度的联立方程. 给定谱空间中速度和温度的初始分布后, 进行时间积分, 就可以获得速度、温度在谱空间中的演化. 最后, 利用公式(21)将谱空间量变换到物理空间来获得速度和温度在物理空间的演化. 如果在物理空间中给定初始速度和温度分布, 先将它们做傅里叶级数展开, 获得谱空间中的初始分布表达式, 然后进行时间积分. 为了提高计算速度, 方程(22)和(23)中右端非线性项 $(\widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}})_i, \widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla T'}$ 采用伪谱方法计算, 即非线性项在物理空间计算后投影到谱空间, 而不用卷积计算(卷积计算计算量很大). 关于均匀湍流的谱方法计算理论和技巧可参见 Canuto 等人 [7] 的专著或张兆顺等人 [8] 的《湍流理论和模拟》. 本文中, 非线性的混淆误差用 3/2 规则消除, 时间推进采用 4 阶龙格-库塔积分; 先积分运动方程(22), 然后积分温度输运方程(24).

研究均匀浮力湍流有两种方法, 即强迫平稳的浮力湍流 [1] 和衰减的浮力湍流 [9]. 计算强迫浮力湍流需要在动量方程(4)中附加强迫力, 在强迫力作用下, 初始的脉动逐渐发展到平稳的湍流状态. 衰减的浮力湍流由初始给定的能量自然衰减, 在衰减过程中, 初始的脉动逐渐发展到浮力湍流状态. 两种方法各有优点和不足. 强迫稳定方法能够获得平稳的浮力湍流, 但是, 最后统计稳定的湍流状态和施加的强迫力有关, 它是否符合实际大气或海洋中的情况很难从理论上确定; 此外, 绝大多数浮力湍流的实验室研究都是衰减的. 衰减浮力湍流的缺点是不能获得平稳的湍流状态, 因此湍流雷诺数、弗罗德数随时间是变化的. 不过浮力湍流的衰减率是比较低的, 在计算推进的适当阶段, 当雷诺数和弗罗德数变化很小时接近于平稳状态. 本文主要用衰减算例研究稳定分层湍流的性质, 并在文章最后讨论强迫平稳湍流的数值模拟结果.

稳定分层流动中浮力的主要作用是: 一方面它抑制重力方向的运动, 在忽略黏性(高雷诺数)条件下可产生准二维的大尺度环流, 这种大尺度环流称为位势涡, 简称位涡(potential vortex, PV); 另一方面, 垂直方向运动方程和密度或温度方程耦合产生重力

内波, 简称内波(internal wave, IW). 内波的破碎可导致湍流^[10]; 准二维的位涡在外界扰动下, 可产生垂直方向的高剪切率, 由剪切不稳定导致湍流^[3]. 根据这种设想, 本文研究中设计了三类初始条件. 第一类算例的初始条件是简单内波; 第二类算例的初始条件泰勒-格林涡, 它是一种最简单的准二维位涡; 第三类算例的初始条件是各向同性湍流, 这种初始状态中既包含位涡, 也有内波. 下面分别说明 3 种初始场的生成方法.

泰勒-格林涡初始流场为

$$\begin{cases} u = u_0 \cos(z) \cos(x) \sin(y), \\ v = -u_0 \cos(z) \cos(y) \sin(x), \\ w = 0, \end{cases} \quad (25)$$

上式中 u_0 是泰勒-格林涡的强度. 泰勒-格林涡初始场的脉动温度为零, 温度脉动完全由速度脉动产生.

初始内波流场为简单的驻波:

$$u = u_0 \cos(x+z), \quad v = 0, \quad w = -u_0 \cos(x+z), \quad (26)$$

$$T' = \frac{u_0 T_0 N}{g} \cos(x+z), \quad (27)$$

线性内波扰动中温度脉动和速度脉动有关, 故初始温度脉动必须由式(23)给定.

初始各向同性湍流场在谱空间中给出, 给定湍动能谱为 von Karman 谱, 湍动能在 3 个速度分量中均匀分配. 具体构造方法参见文献[11], 初始各向同性湍流场中的起始温度等于零.

2 算例及计算结果

2.1 算例

算例的介质为空气, 立方体计算域边长 $D = 32 \text{ m}$, 分子运动黏性系数 $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, 分子普朗特数 $Pr = 0.7$, 空气温度 $T_0 = 293 \text{ K}$, 重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. 其他初始参数和特征量见表 1. 算例A组初始场是简单内波, B组初始场是泰勒-格林涡, 算例C1 是初始场为各向同性湍流的衰减浮力湍流, 算例C2 是初始场为各向同性的强迫平稳的浮力湍流. 表中 N 是稳定分层流动的重要时间参数, 称作Brunt-Väisälä频率, 其定义是

$$N^2 = \frac{1}{T_0} \frac{dT}{dz} g \quad (28a)$$

或

$$N^2 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz} g, \quad (28b)$$

表 1 算例计算参数和衰减后期的特征参数

算例	网格数	$u_0/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	N/s^{-1}	衰减后期的特征参数量级			
				Re	Fr	$ReFr^2$	
A	A1	144 ³	0.02008	0.0196	10 ³	10 ⁻¹	10 ¹
	A2	128 ³	0.00502	0.062	10 ²	<10 ⁻¹	<10 ⁰
B	B1	144 ³	0.0502	0.062	10 ³	10 ⁻²	10 ⁰
	B2	128 ³	0.0502	0.0062	10 ²	10 ⁻¹	10 ⁰
C	C1	144 ³	0.0502	0.0196	10 ³	10 ⁻²	10 ⁰
	C2	144 ³	0.01004	0.0196	10 ³	10 ⁰	10 ⁴

2.2 算例结果 1: 特征尺度和参数的演化

以 Brunt-Väisälä 频率的倒数作为特征时间, 选定特征速度 U 和特征长度 L , 浮力湍流中雷诺数、弗罗德数的定义如下:

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (29)$$

$$Fr = \frac{U}{NL}, \quad (30)$$

在算例分析中, 需要研究稳定分层湍流中各种尺度的演化. 其中一部分尺度仍采用经典各向同性湍流的尺度, 例如, 脉动速度均方根 u_{rms} 、惯性尺度 L 、泰勒微尺度 λ 和 科尔莫戈罗夫尺度 η (后文简称科氏尺度):

$$u_{\text{rms}} = \langle u_i u_i \rangle^{1/2}, \quad (31)$$

$$L = \frac{\langle u_i u_i / 2 \rangle^{3/2}}{\varepsilon}, \quad (32)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{10\nu \langle u_i u_i / 2 \rangle}{\varepsilon}}, \quad (33)$$

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad (34)$$

公式(32)~(34)中 ε 是湍动能耗散率:

$$\varepsilon = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle, \quad (35)$$

理论上, 各向异性的浮力湍流需要用脉动速度的张

量相关函数来定义各向异性尺度. 实际上, 浮力湍流中空间尺度的主要差别表现在垂直和水平方向上. 根据流场的平均剪切率来定义垂直和水平尺度^[9], 垂直尺度用 L_z 表示, 它的定义为

$$L_z = \frac{u_{\text{rms}}}{\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\rangle^{1/2}}, \quad (36)$$

水平方向尺度 L_H 的定义如下:

$$L_H = \frac{u_{\text{rms}}}{\left\langle \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^{1/2}}, \quad (37)$$

另外, 表示浮力湍流性质的特征尺度还常用内波翻转尺度和 Ozmidov 尺度. 当内波相速度等于湍流脉动速度时内波发生翻转, 然后破碎, 这时脉动尺度用 L_c 表示:

$$L_c = \frac{u_{\text{rms}}}{N}, \quad (38)$$

Ozmidov 尺度表示浮力谱 $E(k) = \alpha N^2 k^{-3}$ 和惯性谱 $E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ 的交点, 并用 L_o 表示:

$$L_o = \sqrt{\frac{\varepsilon}{N^3}}, \quad (39)$$

图 1(a)~(c)是由初始场为简单内波 (A1)、泰勒-格林涡(B1)和各向同性湍流(C1)演化的衰减浮力湍流中经典湍流尺度的演化.

经典尺度用于判断数值计算的网格分辨率是否足够. 进入湍流状态后, 计算域长度应大于泰勒微分尺度 8 倍以上, 以保证有足够的大尺度脉动作用; 网

格长度应和科氏耗散尺度同一量级, 以保证包含足够的小尺度脉动. 从图 1(a)~(c)可以看出, 算例 A1 衰减后期的泰勒微尺度等于 2 m, 约为计算域长度的 1/16; 算例 B1, C1 衰减后期的泰勒微尺度更小. 算例 A1 衰减后期科氏尺度约为 0.1 m 和网格长度(32/144 m)同一量级. 算例 B1, C1 衰减后期的科氏尺度则远远大于网格长度, 该计算结果证实给定的网格分辨率是足够的.

图 2 是浮力湍流尺度的演化, 横坐标时间 t 是物理时间乘以 Brunt-Väisälä 频率的无量纲时间(下同). 数值模拟初始阶段的浮力尺度并不代表浮力湍流的性质, 它们是初始状态扰动的尺度; 在数值模拟后期的尺度属于浮力湍流的性质. 不同初始扰动诱发的浮力湍流的特征尺度有共同的特性: 以剪切率度量的特征长度最大, 并且水平尺度总是大于垂直尺度, 也就是说, 稳定分层的密度梯度或温度梯度抑制垂直方向的扰动. 算例 A1 的大部分时间范围有 $L_c > L_o > \eta$, 但是在衰减后期 $L_o < \eta$, 这时的湍流不再具有浮力湍流的性质, 而称作化石湍流^[3], 它不是本文讨论的内容. 算例 B1 在 $40 > t > 10$ 范围内有浮力湍流的特性. 算例 C1 的衰减后期, 浮力湍流也演化为化石湍流.

图 3 是特征雷诺数和弗罗德数的演化规律, 图中也展示了 $ReFr^2$ 随时间的变化. 图 3 结果表明 3 种浮力湍流发展后期的雷诺数(以泰勒微尺度为特征长度)都达到 10^3 , 接近高雷诺数浮力湍流. 此时弗罗德数都在 10^{-1} 量级, 而 $ReFr^2$ 在 5~10 之间, 没有达到 Brethouwer 等人^[1]提出的 $ReFr^2 \gg 1$ 条件, 但是下面将看到, 算例 A1, B1, C1 都具有或者接近于充分发展的浮力湍流特性.

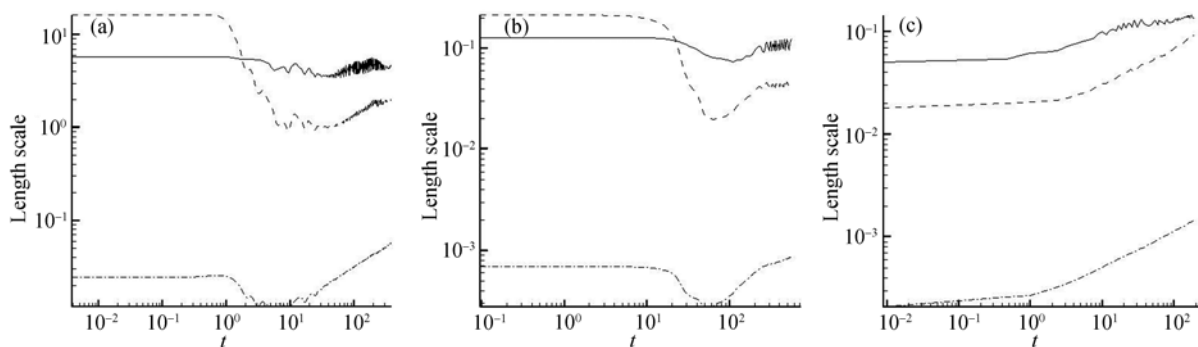


图 1 算例 A1, B1, C1 的惯性尺度(实线)、泰勒微分尺度(虚线)和科氏尺度(点划线)

(a) 初始内波; (b) 初始泰勒-格林涡; (c) 初始各向同性湍流

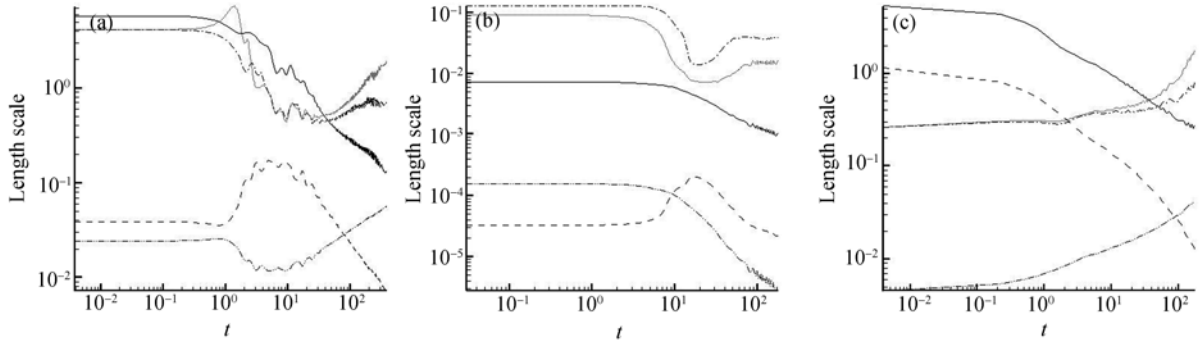


图2 算例 A1, B1, C1 的浮力尺度演化

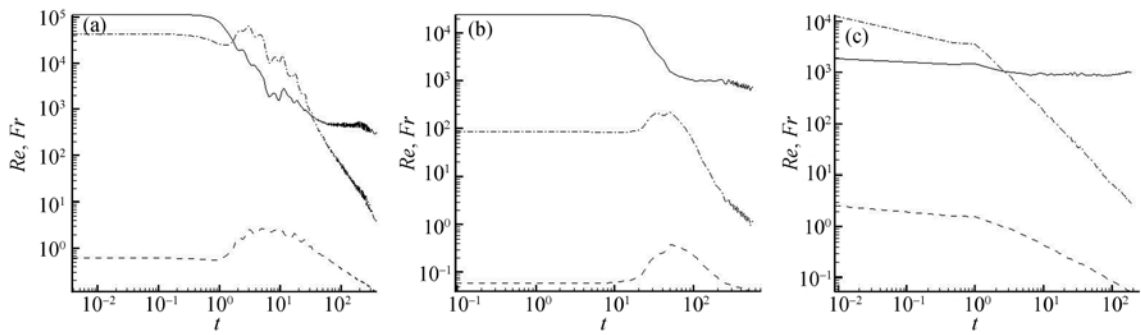
 (a) 初始内波; (b) 初始泰勒-格林涡; (c) 初始各向同性湍流. 实线: L_c , 虚线: L_o , 点线: L_z , 点划线: L_H , 双点划线: η


图3 算例 A1, B1, C1 的雷诺数和弗罗德数

 (a) 初始内波; (b) 初始泰勒-格林涡; (c) 初始各向同性湍流. 实线: Re , 虚线: Fr , 点划线: $ReFr^2$

2.3 算例结果 2: 位涡和内波能量

稳定分层流动中湍流的产生归因于内波破碎^[10]或位涡的剪切不稳定^[3], 或两者兼而有之. 为此需要在脉动速度中将内波和位涡分解出来.

在物理空间中, 将脉动速度分解为无旋的内波和准二维位涡如下:

$$u = [\nabla_h \phi + w e_z] + e_z \times \nabla_h \psi, \quad (40)$$

上式右端中第 1 项是内波, 它是无旋的; 第 2 项是位涡, 它是有旋的, 公式中 $\nabla_h = e_x \partial/\partial x + e_y \partial/\partial y$ 是水平梯度算符. 可以将物理空间的分解投影到谱空间, 在谱空间中速度向量和波数向量垂直(23)式, 同时注意到位涡速度和重力方向垂直(40)式, 根据以上特性, 在谱空间可用Craya-Herring坐标系^[2]分解内波和位涡速度:

$$e^1 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{n}|}, \quad (41)$$

$$e^2 = \frac{\mathbf{k} \times e^1}{|\mathbf{k} \times e^1|}, \quad (42)$$

(41)式中 $\mathbf{n}$ 是垂直方向单位向量. 脉动速度在 e^1 上的投影是位涡分量; 在 e^2 上的投影是内波分量, 即

$$\hat{u}_i^{pv}(\mathbf{k}) = [\hat{u}(\mathbf{k}) \cdot e^1(\mathbf{k})] e_i^1(\mathbf{k}), \quad (43)$$

$$\hat{u}_i^{iw}(\mathbf{k}) = [\hat{u}(\mathbf{k}) \cdot e^2(\mathbf{k})] e_i^2(\mathbf{k}), \quad (44)$$

在谱空间解出脉动速度后, 用公式(43), (44)可以计算位涡和内波能量:

$$E_{pv} = \frac{1}{2} \iiint \hat{u}_i^{pv}(\mathbf{k}) \hat{u}_i^{pv}(\mathbf{k}) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (45)$$

$$E_{iw} = \frac{1}{2} \iiint \hat{u}_i^{iw}(\mathbf{k}) \hat{u}_i^{iw}(\mathbf{k}) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (46)$$

图 4 给出 3 种初始条件下, 湍动能、内波能量、位涡能量的演化过程. 我们发现不论初始扰动是什么形式, 在衰减过程的后期, 均出现内波成分为主的特性. 初始扰动为简单内波的算例(图 4(a)), 内波能

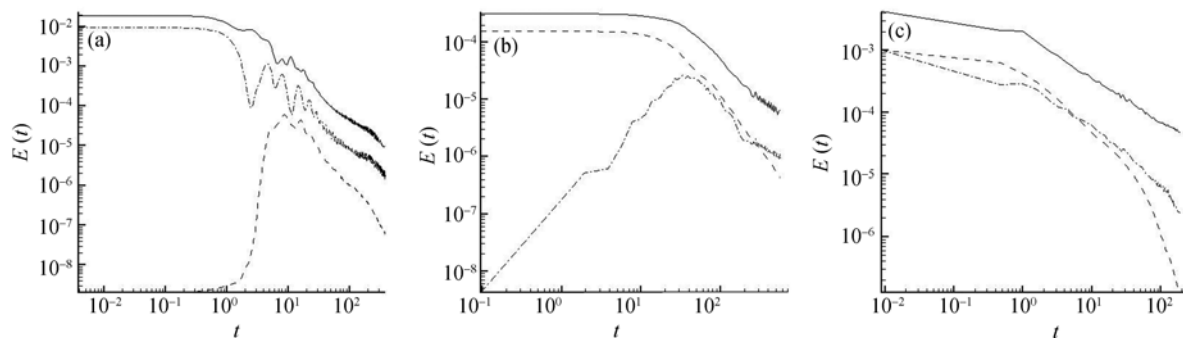


图 4 算例 A1, B1, C1 的湍动能的衰减过程

(a) 初始内波; (b) 初始泰勒-格林涡; (c) 初始各向同性湍流. 实线: 总湍动能, 虚线: 位涡动能, 点划线: 内波动能

量在衰减过程中一部分转移到泰勒-格林涡中, 当泰勒-格林涡能量达到最大值后, 泰勒-格林涡能量随内波能量一起衰减, 但是内波能量始终大于泰勒-格林涡能量一个量级. 在初始为泰勒-格林涡的算例(图 4(b)), 泰勒-格林涡能量衰减过程中, 一部分能量转移到内波能量上, 当内波能量达到最大值后, 内波能量随泰勒-格林涡能量一起衰减, 而在衰减后期, 内波能量的衰减率远远小于泰勒-格林涡, 从而达到内波能量占优的状态. 在各向同性湍流的初始条件下(图 4(c)), 内波和泰勒-格林涡的初始能量相同, 两者同时衰减, 但是内波能量的衰减远远小于泰勒-格林涡, 在衰减后期, 内波能量大于泰勒-格林涡能量一个量级以上.

衰减的浮力湍流中内波占主导的现象值得注意, 以往衰减浮力湍流数值模拟的作者并没有对此进行分析, 认为由位涡初始场演化的浮力湍流属于位涡不稳定产生的湍流; 由内波初始场演化的浮力湍流是内波破碎产生的湍流. 事实上, 初始位涡、初始内波或初始各向同性湍流演化的浮力湍流都是以内波为主的浮力湍流. 关于内波占优的性质可解释如下: 由于非线性相互作用, 初始的简单内波在衰减过程能激发高频内波, 即大尺度内波能量向小尺度内波传输, 而这种传输过程是非耗散性的. 位涡的能量从初始大尺度向小尺度传输是通过剪切不稳定过程, 而高剪切层同时具有高能量耗散. 因此, 衰减过程中位涡的衰减比内波快.

2.4 算例结果 3: 三维能谱

三维湍动能能谱是湍动能在谱空间的球面积分

值, 即

$$E(k) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \hat{u}_i^*(\mathbf{k}) \hat{u}_i(\mathbf{k}) k^2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad (47)$$

利用公式(43), (44)可计算位涡脉动的能谱和内波脉动的能谱:

$$E_{pv}(k) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \hat{u}_i^{pv*}(\mathbf{k}) \hat{u}_i^{pv}(\mathbf{k}) k^2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad (48)$$

$$E_{iw}(k) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \hat{u}_i^{iw*}(\mathbf{k}) \hat{u}_i^{iw}(\mathbf{k}) k^2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad (49)$$

图 5 是衰减浮力湍流初始能谱. 图中能谱是推进很短时间的湍动能能谱、内波能谱和位涡能谱, 对于初始简单内波, 从图 5(a)明显看到在高波数段已激发位涡能量和内波; 对于初始位涡, 图 5(b)可明显看到泰勒-格林涡的能量峰值, 同样在高波数段开始诱发内波能量. 对于各向同性初始场, 图 5(c), 初始能量在内波和位涡间均分, 在补偿谱(即 $E(k)$ 上乘以 $k^{5/3}$)的高波数段($k > 2$)呈现一平台, 说明初始场有较宽的惯性子区能谱.

图 6 展示已发展的浮力湍流的三维能谱. 简单内波诱发的浮力内波中, 图 6(a)显示位涡能量很小, 几乎可略去不计. 位涡诱发的浮力内波在发展的浮力内波中, 在低波数段位涡能量占优, 这是初始能量的影响(图 6(b)), 在 $k > 1$ 的波段中仍然是内波能量为主. 从各向同性湍流开始的浮力湍流中, 也是以内波能量为主. 在图 6(a)~(c)中附加了 $E(k) \sim k^{-5/3}$ 的惯性谱(对数坐标中的直线), 可以看到在 $k \sim 2$ 的低波数段, 有接近 $k^{-5/3}$ 的能谱. 从能谱来看, 算例 A1, B1, C1 计算的浮力湍流的能谱基本符合实测大气中浮力湍流的能谱.

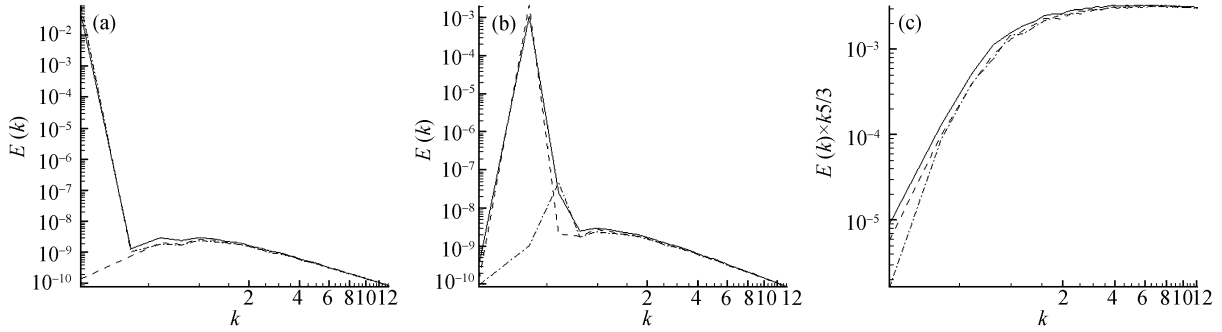


图5 算例 A1, B1, C1 的初始场能谱

(a) 算例 A1, $t=0.0038$; (b) 算例 B1, $t=0.094$; (c) 算例 C1, $t=0.0085$. 实线: 总湍动能谱, 虚线: 位涡能谱, 点划线: 内波能谱

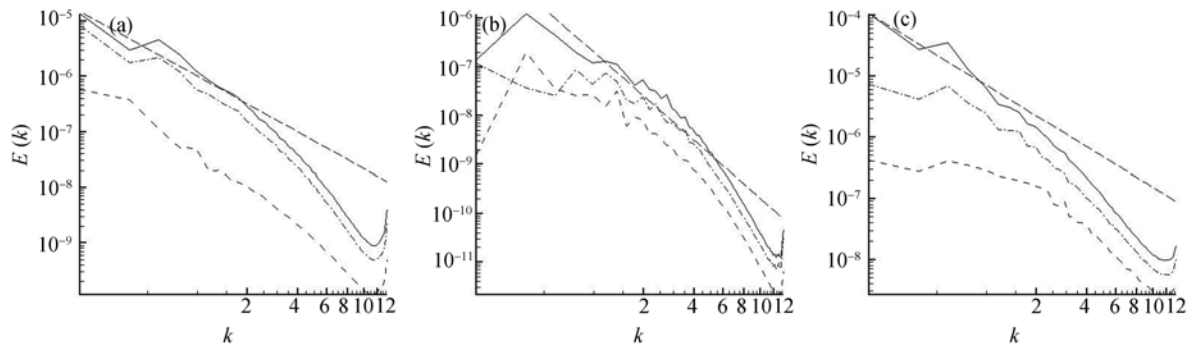


图6 算例 A1, B1, C1 发展后期(发展浮力湍流阶段)三维能谱

(a) 算例 A1, $t=166$; (b) 算例 B1, $t=258$; (c) 算例 C1, $t=118$. 实线: 总湍动能谱, 虚线: 位涡能谱, 点划线: 内波能谱, 长划线: $E(k) \propto k^{-5/3}$

2.5 算例结果 4: 水平和垂直能谱

浮力湍流是各向异性的, 它在垂直方向和水平方向的湍动能谱有明显差别, 在大气和海洋中测得的垂直方向能谱中小波数段(大尺度)具有 k_z^{-3} 规律, 而水平方向能谱小波数段(大尺度)则有 $k_h^{-5/3}$ 规律. 实验室和数值模拟结果能否符合实测能谱是判断其结果正确性的依据.

垂直能谱是脉动能量在一维波数 k_z 上的分布, 水平方向能谱是脉动能量在谱空间平面径向波数上的分布, 即

$$E_h(k_h) = \frac{1}{2} \int_0^{k_{\max}} \int_0^{2\pi} \hat{u}_i(\mathbf{k}) \hat{u}_i^*(\mathbf{k}) k_h d\theta dk_z, \quad (50)$$

上式中 $k_h = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

从图 7(a)可以看出, 初始简单内波衰减过程产生的浮力湍流中水平能谱的低波数段具有 $k^{-5/3}$ 谱型, 而垂直能谱在低波数段有 k^{-3} 谱型. 图 7(b)显示初始位涡衰减过程产生的浮力湍流中水平能谱的低波数段

也有明显的 $k^{-5/3}$ 谱型, 但是垂直能谱的 k^{-3} 谱型的波段较窄. 初始各向同性湍流衰减过程中产生的浮力湍流中(图 7(c)), 水平能谱在低波数段有 $k^{-5/3}$ 谱型, 垂直能谱有较窄的 k^{-3} 谱型.

能谱是检验数值模拟结果是否可靠的重要标志, 以上结果表明, 大涡模拟能够获得和大气、海洋实测相一致的能谱, 特别是在低波数段水平能谱的 $-5/3$ 谱型和垂直能谱的 -3 谱型. 需要说明的是本文算例中, 在浮力湍流阶段, 雷诺数并未达到大气或海洋中那么高的雷诺数和那么低的弗罗德数, 但是雷诺数已达到 10^3 , 弗罗德数低达 10^{-1} . 最重要的是组合参数 $ReFr^2$ 已达到 10 的量级, 它接近 Brethouwer 等人^[4] 建议的 $ReFr^2 \gg 1$ 的条件.

3 讨论和结论

(i) 讨论雷诺数和弗罗德数对浮力湍流数值模拟结果的影响. 图 8 是算例 A2 的结果. 算例 A2 的初始速度是和算例 A1 相同的简单内波, 但速度较小和

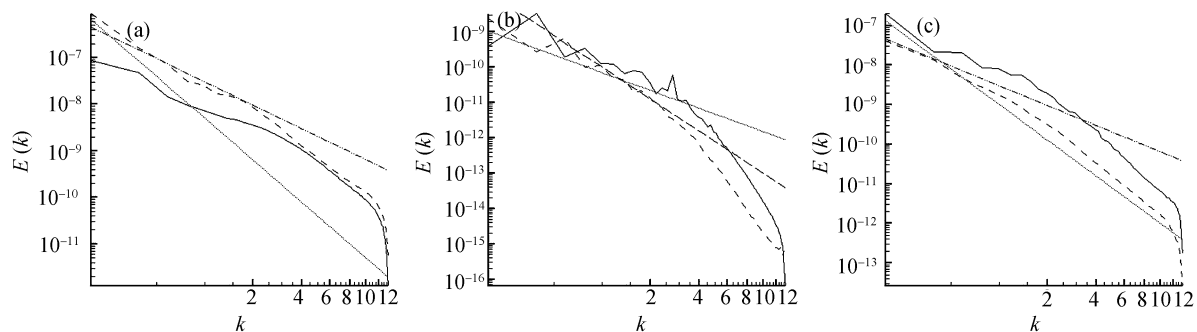


图 7 算例 A1, B1, C1 后期(发展浮力湍流阶段)水平能谱和垂直能谱

(a) 算例 A1, $t=166$; (b) 算例 B1, $t=258$; (c) 算例 C1, $t=118$. 实线: 垂直能谱, 虚线: 水平能谱, 点划线: $E(k) \propto k^{-5/3}$, 点线: $E(k) \propto k^{-3}$

平均温度梯度较大, 计算网格是 128^3 . 图 8(a)的内波能量衰减和位涡能量的增加趋势与算例 A1 基本相同, 只是由于温度梯度较大, 内波能量震荡较大. 雷诺数和弗罗德数的演化示于图 8(b), 在发展浮力湍流阶段, Re 在 10^2 量级, Fr 降至 10^{-1} 以下量级, 还可属于高雷诺数、低弗罗德数湍流; 但是组合参数 $ReFr^2$ 减小到 1 以下. 图 9 展示该算例的水平和垂直能谱. 在 $t=386$ 时, 水平能谱有 $k^{-5/3}$ 谱型, 垂直能谱有较窄的 k^{-3} 谱型. 当衰减湍流继续发展到 $t=849$ 时, 水平能谱仍有 $k^{-5/3}$ 谱型, 而垂直能谱和 k^{-3} 谱型相差很大. 需要指出在 $t=386$ 时, $ReFr^2$ 约为 0.7; 而在 $t=849$ 时组合参数已降低到 0.1, 这表明组合参数不符合真实大气、海洋中的参数量级, 因而不能获得和实际相一致的垂直能谱.

图 10 是算例 B2 的结果. 算例 B2 的初始场是泰勒-格林涡, 它的初始速度和算例 B1 相等, 但是密度梯度低于算例 B1, 计算网格是 128^3 . 图 10(a)是湍动能衰减过程, 它和算例 B1 基本相同. 衰减后期的特征

参数示于图 10(b), 当雷诺数为 10^2 时, Fr 降至 10^{-1} 级时, $ReFr^2$ 为 10^0 量级. 这时水平能谱和垂直能谱的低波数段都是 $k^{-5/3}$ 的能谱(图 10(c)), 在垂直能谱的低波数段没有 k^{-3} 谱型.

以上结果说明, 组合参数 $ReFr^2$ 确实是数值模拟真实浮力湍流的重要参数, 算例 A1, B2 的雷诺数都大于 10^2 , 但是组合参数小于 1, 因此数值模拟不能得到垂直能谱的 k^{-3} 谱型.

(ii) 讨论数值模拟浮力湍流对网格分辨率的要求. 一般来说, 均匀湍流数值模拟的网格数和算例的雷诺数有关, 即有经典的估计: 网格数正比于雷诺数的 $9/4$ 次方. 对于浮力湍流来说, 不仅要从模拟的雷诺数来考虑网格数, 而且还应当满足考虑组合参数 $ReFr^2 \gg 1$ 的要求. 当网格数减少时, 不仅能模拟的湍流雷诺数要降低, 而且会导致组合参数 $ReFr^2$ 的减小, 因而不能模拟真实浮力湍流. 前面的算例 A2 和 B2 的网格数为 128^3 , 发展湍流的雷诺数达到 10^2 量级,

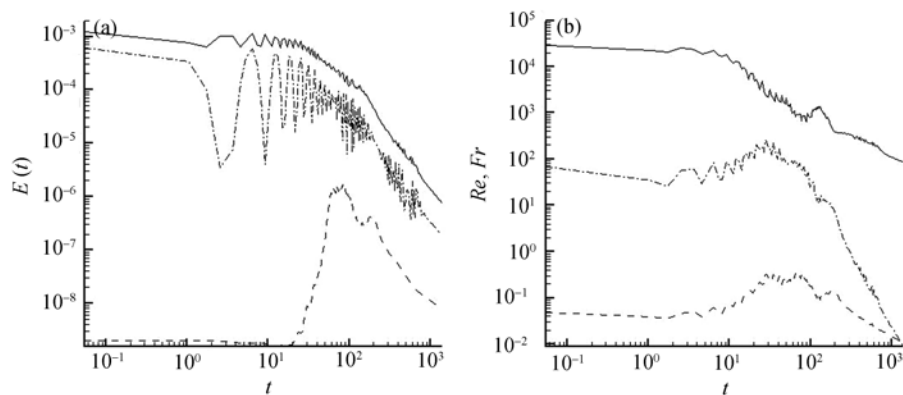


图 8 算例 A2

(a) 湍动能衰减, 实线: 总湍动能, 虚线: 位涡动能, 点划线: 内波动能; (b) 特征参数, 实线: Re , 虚线: Fr , 点划线: $ReFr^2$

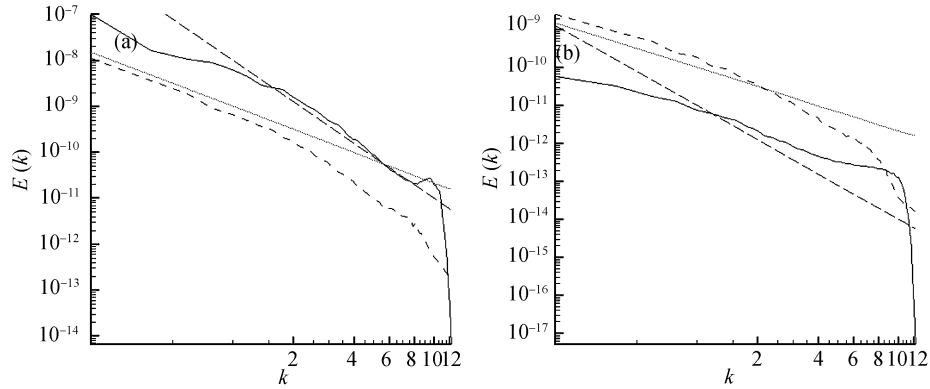


图9 算例 A2 的水平和垂直能谱

(a) $t=386$, $ReFr^2 \sim 1$; (b) $t=849$, $ReFr^2 < 1$. 实线: 垂直能谱, 虚线: 水平能谱, 点线: $E(k) \propto k^{-5/3}$, 长划线: $E(k) \propto k^{-3}$

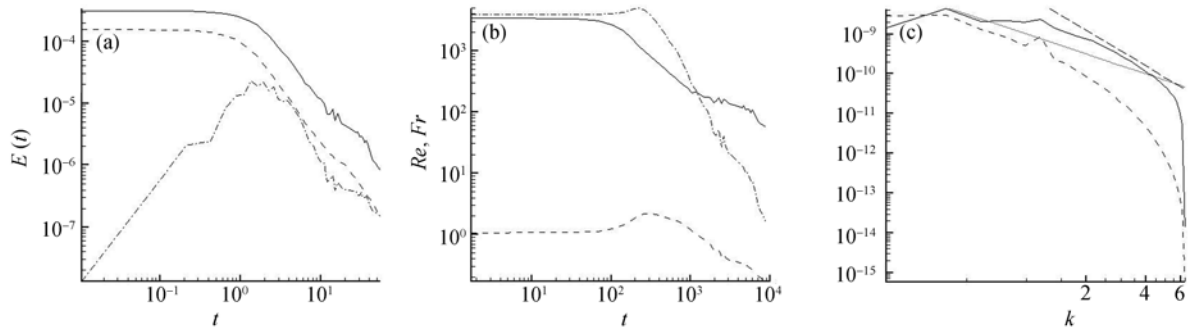


图10 算例 B2

(a) 湍动能衰减, 实线: 总湍动能, 虚线: 位涡动能, 点划线: 内波动能; (b) 特征参数, 实线: Re_λ , 虚线: Fr , 点划线: $ReFr^2$; (c) 水平和垂直能谱($t=44$), 实线: 垂直能谱, 虚线: 水平能谱, 点线: $E(k) \propto k^{-5/3}$, 长划线: $E(k) \propto k^{-3}$

不算低, 所以在三维能谱和水平能谱中都有惯性谱 $k^{-5/3}$ 谱型; 但是组合参数只有 1 的数量级, 因此在垂直能谱中没有浮力湍流的 k^{-3} 谱型. 就是说, 浮力湍流数值模拟的网格数不仅要考虑到惯性子区的要求, 还需要考虑浮力效应.

(iii) 简要地比较强迫平稳和衰减浮力湍流数值模拟. 算例 C2 是初始场为各向同性的强迫浮力湍流, 在计算过程中, 令最低的两个波数的能谱值不变, 这就相当于输入大尺度脉动能量. 初始各向同性湍流要经历一段衰减过程进入到平稳状态. 从计算时间上来说, 强迫浮力湍流的计算时间和衰减湍流相当. 图 11 是趋向稳定状态的湍动能和特征参数的演化, 从图 11(a)可以看到大约推进到无量纲时间 50 时, 浮力湍流进入到平稳状态, 这时和衰减浮力湍流类似, 湍动能以内波占优. 图 11(b)表示特征参数的演化, 趋向稳定的雷诺数达到 10^3 量级, 弗罗德数为 10^0 量级,

$ReFr^2$ 为 10^4 量级. 虽然算例 C2 的 $Re \gg 1$ 和 $ReFr^2 \gg 1$, 但是 $Fr > 1$, 没有达到低弗罗德数的浮力湍流条件. 从趋向平稳状态的能谱也可以看到, 能谱和实测大气或海洋的浮力湍动能谱有差别.

图 12(a)展示三维能谱低波数段有 $k^{-5/3}$ 的谱型, 图 12(b)显示水平能谱在低波数段有 $k^{-5/3}$ 的谱型, 而垂直能谱的低波数段没有 k^{-3} 谱型. 其原因是弗罗德数不够小, 浮力效应较弱.

概括本文的结果, 大涡模拟方法可以用较少网格数值计算浮力湍流, 获得了和实测一致的浮力湍流特性. 数值模拟结果说明正确数值模拟浮力湍流的条件是: 足够高的雷诺数、远小于 1 的弗罗德数以及组合参数 $ReFr^2$ 远大于 1; 算例结果表明 $Re > 102$, $Fr < 0.1$ 和 $ReFr^2 > 10$ 可以模拟真实浮力湍流. 不同初始条件的数值模拟结果表明, 浮力湍流浮中内波占优, 这是已有浮力湍流的实验和数值模拟研究中没

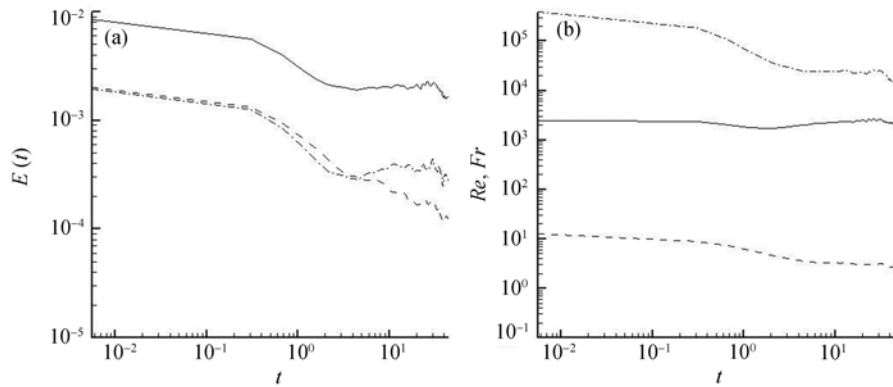


图 11 算例 C2

(a) 湍动能演化, 实线: 总湍动能, 虚线: 位涡动能, 点划线: 内波动能; (b) 特征参数, 实线: Re_λ , 虚线: Fr , 点划线: $ReFr^2$

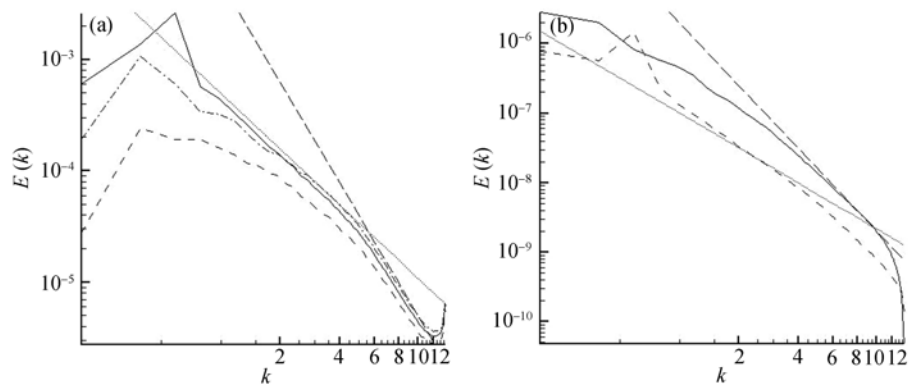


图 12 算例 C2 的能谱

(a) 三维能谱($t=45$), 实线: 总湍动能, 虚线: 位涡, 点划线: 内波, 点线: $E(k) \propto k^{-5/3}$, 长划线: $E(k) \propto k^{-3}$; (b) 水平和垂直能谱($t=45$), 实线: 垂直能谱, 虚线: 水平能谱, 点线: $E(k) \propto k^{-5/3}$, 长划线: $E(k) \propto k^{-3}$

有注意的问题。作者认为这是深入研究浮力湍流特性和数值模拟的重要问题, 认识该问题的关键是正

确模拟浮力湍流中内波和位涡间非线性的能量输运, 这是本文作者继续研究的问题。

参考文献

- Brethouwer G, Billant P, Lindborg E, et al. Scaling analysis and simulation of strongly stratified turbulent flows. *J Fluid Mech*, 2007, 585: 343—368 [\[DOI\]](#)
- Godeferd F S, Cambon C. Detailed investigation of energy transfer in homogenous stratified turbulence. *Phys Fluids*, 1994, 6(6): 2084—2100 [\[DOI\]](#)
- Riley J J, Lelong M. Fluid motion in the presence of strong stable stratification. *Annu Rev Fluid Mech*, 2000, 32: 613—657 [\[DOI\]](#)
- Garrett C, Munk W. Internal waves in the ocean. *Annu Rev Fluid Mech*, 1979, 11: 339—369 [\[DOI\]](#)
- Nastrom G D, Gage K S, Jasperson W H, et al. Kinetic energy spectrum of large and mesoscale atmospheric process. *Nature*, 1984, 310: 36—38 [\[DOI\]](#)
- Lindborg E. The energy cascade in a strongly stratified fluid. *J Fluid Mech*, 2006, 550: 207—242 [\[DOI\]](#)
- Canuto C, Quarteroni A, Hussaini M Y, et al. *Spectral Method in Fluid Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1987
- 张兆顺, 崔桂香, 许春晓. 湍流理论与模拟. 北京: 清华大学出版社, 2005
- Riley J J, deBruynKops S M. Dynamics of turbulence strongly influenced by buoyancy. *Phys Fluids*, 2003, 15: 2047—2059 [\[DOI\]](#)
- Staquet C, Sommeria J. Internal gravity waves: From instability to turbulence. *Annu Rev Fluid Mech*, 2002, 34: 559—593 [\[DOI\]](#)
- Rogallo R S. Numerical experiment in homogeneous turbulence. NASA, 1981, TM81315