

二能级原子理论新探讨*

黄 湘 友

(中国理论物理中心,北京大学物理系,北京 100871;

中国科学院理论物理研究所,北京 100080)

摘 要

本文详细考察了二能级原子理论和相应的经典理论之间的相似性。当我们联系状态计算物理量值的时候,在 Heisenberg 表象中表现出的这一熟知的相似性将受到损害。这一损害与状态的定义有关。用一对矢量定义状态可保持这一相似性不受损害。

关键词: 二能级原子, 旋转波近似, 矢量对

一、引 言

旋转波近似(RWA)的二能级原子理论,在物质与辐射相互作用的研究中广泛应用^[1,2]。Allen 和 Eberly 对这一近似下二能级原子的半经典理论、量子电动力学理论以及相应的经典理论都作了详细介绍^[3]。这些理论都是在 Heisenberg 表象中叙述的。在这一表象中,算符的运动方程常常相似于与这些算符相对应的物理量的经典运动方程。但是,当我们联系状态计算由算符表示的物理量的数值时,这种相似性就要受到损害(例如, Ehrenfest 定理 $\frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx}$ 与 Newton 第二定律相似)。当我们应用这一等式到状态 $|\phi\rangle$ 时,则 $\frac{d}{dt}\langle\phi|\hat{p}|\phi\rangle$ 和 $\langle\phi|(-\frac{dV}{dx})|\phi\rangle$ 对任何定态、任何奇的或偶的波函数态 $\langle x|\phi\rangle$ 都总是恒为零。定态和奇、偶宇称态都是些重要的态,这就使 Ehrenfest 定理仅具形式上的价值而大大限制了它的实用价值。这种情况即使在经典极限下也依然存在,其原因将在本文结尾阐明。

自然,在 Heisenberg 表象中叙述的二能级原子理论也具有这种形式上的特点。当我们把这一理论用到具体的状态上时,这一理论和相应的经典理论之间的相似性也将受到损害。本文详细考察了量子理论和相应的经典理论之间的相似性和差别。我们看到:状态的定义对这一差别有重要影响。如果我们用一对矢量定义一个二能级原子的状态,则 Heisenberg 表象中物理量的形式解可转换为一个原子的实际解。

本文 1989 年 12 月 25 日收到,1990 年 7 月 6 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

二、受驱动的经典谐振子

考虑一个处在驱动电场 E 中的简谐振子, 它的 Hamilton 量为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 - exE(t, x), \quad (1)$$

描述这体系的 Newton 第二定律为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E(t, x). \quad (2)$$

本文中考虑的驱动场形式为

$$E(t) = s[e^{i\omega t} + c.c.], \quad (3)$$

式中 s 为常数且失谐频差 $\Delta = \omega_0 - \omega$ 为小量.

设开始时这谐振子的能量为 $\frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2$, 它的初始运动可写为

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (4)$$

在驱动场中这谐振子的能量增加率为

$$\frac{dW}{dt} = eE(t) \frac{dx}{dt}. \quad (5)$$

为了便于比较经典力学和量子力学的描述, 我们选择 $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ 使之 $\frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0$, 这一能量相当于量子力学中谐振子的基态能量.

令

$$K = \frac{2(ex_0)}{\hbar} \quad (6)$$

并引进记法

$$\langle S_1(t) \rangle_{cl} = \frac{x(t)}{x_0}, \quad \langle S_2(t) \rangle_{cl} = -\frac{\dot{x}(t)}{\omega_0 x_0}, \quad \langle S_3(t) \rangle_{cl} = (W(t) - \hbar\omega_0) / \frac{1}{2} \hbar\omega_0. \quad (7)$$

由(7),(2)和(5)式得

$$\frac{d\langle S_1(t) \rangle_{cl}}{dt} = -\omega_0 \langle S_2(t) \rangle_{cl}, \quad (8a)$$

$$\frac{d\langle S_2(t) \rangle_{cl}}{dt} = \omega_0 \langle S_1(t) \rangle_{cl} + KE(t) \langle S_3(0) \rangle_{cl}, \quad (8b)$$

$$\frac{d\langle S_3(t) \rangle_{cl}}{dt} = -KE(t) \langle S_2(t) \rangle_{cl}, \quad (8c)$$

式中 $\langle S_3(0) \rangle_{cl} = -1$.

现在, 把 x 分解成两部分: 一部分近似地与外场 E 同相, 另一部分与之相正交.

$$x(t) = x_0[u(t) \cos \omega t - v(t) \sin \omega t]. \quad (9)$$

当驱动场为弱场时, u 和 v 应当是较之 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 为缓慢变化的包络函数, 在计算中可使用不等式

$$\dot{u} \ll \omega u, \quad \ddot{u} \ll \omega^2 u, \quad \dot{v} \ll \omega v, \quad \ddot{v} \ll \omega^2 v. \quad (10)$$

在这条件下偶极矩方程(2)可化为 u 和 v 的联立方程^[3]

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)v, \quad (11)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)u - \left(\frac{e}{m\omega x_0}\right)\varepsilon. \quad (12)$$

令 $w(t) = \langle S_3(t) \rangle_{cl}$, 由方程(5),(6),(11)和(12)得

$$\dot{u} = -\Delta v, \quad (13a)$$

$$\dot{v} = \Delta u + K\varepsilon w_0, \quad (13b)$$

$$\dot{w} = -K\varepsilon v. \quad (13c)$$

方程 (13a)–(13c) 等价于方程 (8a)和(8c)。方程的解为

$$u = u_0 \cos \Delta t - v_0 \sin \Delta t - \frac{K\varepsilon}{\Delta} w_0 (1 - \cos \Delta t), \quad (14a)$$

$$v = u_0 \sin \Delta t + v_0 \cos \Delta t + \frac{K\varepsilon}{\Delta} w_0 \sin \Delta t, \quad (14b)$$

$$w = -\frac{K\varepsilon}{\Delta} u_0 (1 - \cos \Delta t) - \frac{K\varepsilon}{\Delta} v_0 \sin \Delta t - \left(\frac{K\varepsilon}{\Delta}\right)^2 w_0 (1 - \cos \Delta t) + w_0. \quad (14c)$$

由(6),(9)和(14)式得到受驱动谐振子的电偶极矩

$$\begin{aligned} \mu(t) = ex(t) = \frac{K\hbar}{2} \left\{ u_0 (\cos \Delta t \cos \omega_0 t - \sin \Delta t \sin \omega_0 t) - v_0 (\sin \Delta t \cos \omega_0 t \right. \\ \left. + \cos \Delta t \sin \omega_0 t) - w_0 \frac{K\varepsilon}{\Delta} [(1 - \cos \Delta t) \cos \omega_0 t + \sin \Delta t \sin \omega_0 t] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

计算中我们略去了辐射能量损失。解(14)和(15)式在比谐振子自然寿命为短的时间内有效。

三、受驱动的二能级原子

考虑一个处在驱动电场 E 中的二能级原子, 这体系的 Hamilton 算符为^[3]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(W_+ + W_-)\hat{I} + \frac{1}{2}(W_+ - W_-)\hat{\sigma}_3 - (d_r \hat{E})\hat{\sigma}_1 + (d_i \hat{E})\hat{\sigma}_2, \quad (16)$$

式中 W_+ 和 W_- 是这两个能级的能量, $\hat{I} = d_r \hat{\sigma}_1 - d_i \hat{\sigma}_2$ 是这原子的偶极矩算符。

适当选择与基矢相关的相位可使 d_i 为零。使用记法

$$\omega_0 = \frac{1}{\hbar}(W_+ - W_-), \quad K = \frac{2d_r}{\hbar}. \quad (17)$$

在 Heisenberg 表象中我们得到 3 个 Pauli 矩阵算符的期望值的运动方程^[3]

$$\frac{d\langle \hat{S}_1(t) \rangle_{qm}}{dt} = -\omega_0 \langle \hat{S}_2(t) \rangle_{qm}, \quad (18a)$$

$$\frac{d\langle \hat{S}_2(t) \rangle_{qm}}{dt} = \omega_0 \langle \hat{S}_1(t) \rangle_{qm} + KE(t) \langle \hat{S}_3(t) \rangle_{qm}, \quad (18b)$$

$$\frac{d\langle \hat{S}_3(t) \rangle_{qm}}{dt} = -KE(t) \langle \hat{S}_2(t) \rangle_{qm}, \quad (18c)$$

式中 $\langle \hat{S}_i(t) \rangle_{qm} = \langle \phi(0) | \hat{S}_i(t) | \phi(0) \rangle$ ($i = 1, 2, 3$)。

本文关心的驱动电场仍取形式

$$E(t) = \varepsilon [e^{i\omega t} + c. c.], \quad (19)$$

式中 ε 为常量且失谐频率 $\Delta = \omega_0 - \omega$ 为小量.

使用旋转变换

$$\begin{pmatrix} \langle \bar{S}_1 \rangle_{qm} \\ \langle \bar{S}_2 \rangle_{qm} \\ \langle \bar{S}_3 \rangle_{qm} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{v}(t) \\ \bar{w}(t) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

方程 (18a)–(18c) 可简化为 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 和 $\bar{w}$ 的运动方程

$$\bar{u} = -\Delta \bar{v}, \quad (21a)$$

$$\bar{v} = \Delta \bar{u} + K\varepsilon \bar{w}, \quad (21b)$$

$$\bar{w} = -K\varepsilon \bar{v}. \quad (21c)$$

方程(18)和(21)很类似于经典方程(8)和(13). 这一相似性来源于这一事实,即简谐振子的基态在偶极近似下是个二能级原子态.

方程(21)的精确解为^[3]

$$\begin{pmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{v}(t) \\ \bar{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{(K\varepsilon)^2 + \Delta^2 \cos Q t}{Q^2} & -\frac{\Delta}{Q} \sin Q t & -\frac{\Delta K\varepsilon}{Q^2} (1 - \cos Q t) \\ \frac{\Delta}{Q} \sin Q t & \cos Q t & \frac{K\varepsilon}{Q} \sin Q t \\ -\frac{\Delta K\varepsilon}{Q^2} (1 - \cos Q t) & -\frac{K\varepsilon}{Q} \sin Q t & \frac{\Delta^2 + (K\varepsilon)^2 \cos Q t}{Q^2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{v}_0 \\ \bar{w}_0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

式中 $Q = \sqrt{\Delta^2 + (K\varepsilon)^2}$ 是广义 Rabi 频率.

这原子的电偶极矩可由(20)和(22)式得出

$$\begin{aligned} \mu(t) = \frac{K\hbar}{2} \langle \bar{S}_1 \rangle_{qm} = \frac{K\hbar}{2} \left\{ \bar{u}_0 \left[\frac{(K\varepsilon)^2 + \Delta^2 \cos Q t}{Q^2} \cos \omega t - \frac{\Delta}{Q} \sin Q t \sin \omega t \right] \right. \\ \left. - \bar{v}_0 \left[\frac{\Delta}{Q} \sin Q t \cos \omega t + \cos Q t \sin \omega t \right] - \bar{w}_0 \left[\frac{\Delta K\varepsilon}{Q^2} (1 - \cos Q t) \cos \omega t \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{K\varepsilon}{Q} \sin Q t \sin \omega t \right] \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

借助这电偶极矩我们可由 Maxwell 理论计算场能的增加速率^[4]

$$\frac{d}{dt} W_{em} = -E(t) \frac{d\mu}{dt} = -2\varepsilon \cos \omega t \frac{d\mu}{dt}, \quad (24)$$

在旋转波近似下,这速率为

$$\frac{d}{dt} W_{em} = \frac{K\varepsilon}{2} \hbar \omega \left(\bar{u}_0 \frac{\Delta}{Q} \sin Q t + \bar{v}_0 \cos Q t + \bar{w}_0 \frac{K\varepsilon}{Q} \sin Q t \right). \quad (25)$$

另一方面,我们可由(22)式写出这原子的能量增加速率

$$\hbar \omega \frac{d\bar{w}(t)}{dt} = -\frac{K\varepsilon}{2} \hbar \omega \left(\bar{u}_0 \frac{\Delta}{Q} \sin Q t + \bar{u}_0 \cos Q t + \bar{w}_0 \frac{K\varepsilon}{Q} \sin Q t \right). \quad (26)$$

计算式(25)和(26)表明,场能的增加来源于原子能量的减少.

当 $\bar{w}_0 = -1$ 及 $K\varepsilon \ll \Delta$ 时,二能级原子的量子力学解和谐振子的经典力学解一致。这表明,当原子偏离基态不很远时,二能级原子的性质类似于经典简谐振子。

四、状态的新定义

虽然传统上的二能级原子描述在基态时显示出与简谐振子的经典描述之间有着良好的形式上的类比性,但它们之间有一个重要差别。在传统的二能级原子理论中,基态时有 $\bar{u}_0 = \langle -1 | \hat{\sigma}_1(0) | -1 \rangle = 0$, $\bar{v}_0 = \langle -1 | \hat{\sigma}_2(0) | -1 \rangle = 0$ 。相反,经典简谐振子却没有这种限制。经典简谐振子的初始运动(4)式可写为

$$x(t) = x_0(\cos \theta_0 \cos \omega_0 t - \sin \theta_0 \sin \omega_0 t) = x_0(u_0 \cos \omega_0 t - v_0 \sin \omega_0 t). \quad (27)$$

在经典描述中 u_0 和 v_0 不可能同时为零。下面我们试图对这一差别作些分析。这分析与状态的新定义有关。

状态的新定义是作为一种设想提出来的。按照这一设想,一个二能级原子的状态在 Heisenberg 表象中由下面一对矢量表示^[5,6]

$$|\phi_j\rangle = |j\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_j t_0} \quad j = -1 \text{ 或 } 1, |\varphi\rangle = \sum_{j'=-1}^1 |j'\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_{j'} t_0}, \quad (28)$$

式中 $|j\rangle$ 是通常的二能级原子的本征矢, t_0 是本理论中引近的实参数。

每一个物理量 f 仍由一个 Hermitian 算符 $\hat{f}(t)$ 表示, $\hat{f}(t)$ 满足运动方程

$$\frac{d}{dt} \hat{f}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}(t), \hat{H}]. \quad (29)$$

在这态中力学量 f 的测量值由下一公式给出:

$$\langle f \rangle_{qm} = \text{Re} \langle \varphi | \hat{f}(t) | \phi_j \rangle. \quad (30)$$

这公式已成功地应用到定态体系,散射以及物质与辐射的相互作用上^[7-12]

我们首先用这公式计算基态时 3 个 Pauli 矩阵算符的初值

$$\langle S_1(0) \rangle_{qm} = \text{Re} \langle \varphi | \hat{\sigma}_1(0) | \phi_{-1} \rangle = \cos \omega_0 t_0 = u_0, \quad (31a)$$

$$\langle S_2(0) \rangle_{qm} = \text{Re} \langle \varphi | \hat{\sigma}_2(0) | \phi_{-1} \rangle = \sin \omega_0 t_0 = v_0, \quad (31b)$$

$$\langle S_3(0) \rangle_{qm} = \text{Re} \langle \varphi | \hat{\sigma}_3(0) | \phi_{-1} \rangle = -1 = w_0. \quad (31c)$$

其次,如果我们把这原子置于驱动电场 E 中,由于有方程(29),对于由(30)式表示的 $\langle S_i(t) \rangle_{qm} = \text{Re} \langle \varphi | \hat{\sigma}_i(t) | \phi_{-1} \rangle$, 我们仍然有方程组 (18a)–(18c)。因此,在新状态的描述中我们仍然有解式(20)–(23),只是初值 u_0 和 v_0 再也不能同时为零。 u_0 和 v_0 同时为零是本理论的平均结果。

考虑由下式定义的物理量的平均值

$$\langle \bar{f} \rangle_{qm} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle f \rangle_{qm} dt_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f \rangle_{qm} d(\omega_0 t_0). \quad (32)$$

把(30)式代入(32)式得到

$$\langle \bar{f} \rangle_{qm} = \langle \phi_j | \hat{f}(t) | \phi_j \rangle, \quad (33)$$

这式子对所有物理量均成立。这式子意味着通常的量子力学期望值公式适用于一个系综。这系综由一些二能级原子组成,这些原子有相同的初始能量 E_j 但初始相位 $\omega_0 t_0$ 呈均匀分布。

显然, $\langle \bar{S}_i(t) \rangle_{qm} = \langle \phi_j | \hat{\sigma}_i(t) | \phi_j \rangle (i = 1, 2, 3)$, 仍然满足方程 (18a)–(18c)。解得的 $\langle \bar{S}_i(t) \rangle_{qm}$, 仍由(20)–(22)式表示,但初值由 $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$ 和 $\bar{w}_0$ 取代 u_0 , v_0 和 w_0 。由 (31a) 式可知

$$\bar{u}_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega_0 t_0 dt_0 = 0. \quad (34)$$

同理 $\bar{v}_0$ 也为零, 但基态时 $\bar{w}_0$ 仍为 -1 .

至于引言中提到的 Ehrenfest 定理, 它与 Newton 第二定律之间的相似性在新状态的描述中已不再是形式上而是实质性的. 把方程(29)用在新状态的描述上得出

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle_{qm} = \text{Re} \left\langle \varphi | x \right\rangle \left(- \frac{dV}{dx} \right) \langle x | \varphi_i \rangle dx, \quad (35)$$

上式对任何状态都不会给出恒为零的结果. 由(35)式知二能级原子中电子动量的增加速率等于作用在它上面的总力.

五、讨 论

一种力学包含两个基本要素: 状态的定义和运动方程. 依赖于状态的定义同样的方程可适用于单个粒子或一个系综. 对于在第二节中讨论过的经典简谐振子, 变数 $u(t)$, $v(t)$ 以及在(7)式中定义的 $\langle S_i(t) \rangle_{cl}$ 都与相位的初值 θ_0 有关. 我们定义这些变数的平均值. 由定义式

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) d\theta_0 \quad (36)$$

及(6),(7)和(9)式可见, 这定义式也可用来计算 $u(t)$, $v(t)$ 及 $\langle S_i(t) \rangle_{cl}$ 的平均值 $\overline{u(t)}$, $\overline{v(t)}$ 及 $\langle \overline{S_i(t)} \rangle_{cl}$ ($i = 1, 2, 3$).

显然, $\langle \overline{S_i(t)} \rangle_{cl}$ 仍然满足运动方程 (8a)–(8c). 有关的解 $\overline{u(t)}$, $\overline{v(t)}$ 和 $\overline{w(t)}$ 仍然由 (14a)–(14c) 式表示, 但它们的初值中 $\bar{u}_0$ 和 $\bar{v}_0$ 都同时为零. $\langle \overline{S_i(t)} \rangle_{cl}$ 描述一个经典谐振子组成的系综, 系综中的谐振子有相同的初始能量, 但相位的初值呈均匀分布. 我们看到, 在第三节中由 $\langle \overline{S_i(t)} \rangle_{qm}$ 描述的体系类似于由 $\langle \overline{S_i(t)} \rangle_{cl}$ 描述的经典系综; 而由(30)式中 $\langle S_i(t) \rangle_{qm}$ 描述的体系才类似于第二节中描述的单个简谐振子. 已经证明, 由一个波函数定义的状态在经典极限下只能描述一个系综^[13–15]. 用一对波函数按(28)式定义的状态在经典极限下描述单个粒子^[6, 16].

我们的分析重点是对基态进行的. 可能有看法认为, 二能级原子的实际态应当是 $|1\rangle$ 和 $|-1\rangle$ 的某种叠加态, 为此我们考虑一个一般的态

$$|\eta\rangle = |a| e^{i\alpha} |1\rangle + \sqrt{1 - |a|^2} e^{i\alpha'} |-1\rangle, \quad (37)$$

$$\text{令 } |\eta\rangle = \hat{U} |-1\rangle = \hat{U} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{U} = \begin{vmatrix} -\sqrt{1 - |a|^2} e^{i\alpha} & |a| e^{i\alpha} \\ |a| e^{i\alpha'} & \sqrt{1 - |a|^2} e^{i\alpha'} \end{vmatrix}, \quad (38)$$

$\hat{U}$ 是个么正算符.

令 $\hat{f}(t) = \hat{U}^{-1} \hat{f}(t) \hat{U}$, 则 $\hat{f}$ 在态 $|\eta\rangle$ 中的期望值可写为

$$\langle \eta | \hat{f}(t) | \eta \rangle = \langle -1 | \hat{f}(t) | -1 \rangle, \quad (39)$$

而且 $\hat{f}(t)$ 满足运动方程 $\frac{d}{dt} \hat{f}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}(t), \hat{H}']$. 状态矢量 $|\eta\rangle$ 像矢量 $|-1\rangle$ 一样等价地描

述一个类似于经典谐振子系综的体系。

二能级原子的量子电动力学解也具有某种形式上的性质。例如,描述电偶极矩的两个量 $\langle \sigma_1(t) \rangle$ 和 $\langle \sigma_2(t) \rangle$ 有形式解^[3]

$$\langle \sigma_{i'}(t) \rangle = \langle \hat{\sigma}_{i'}(0) \rangle e^{i(\omega_0 + \delta)t} e^{-t/2\tau} \quad (i' = 1, 2), \quad (40)$$

作为自发辐射的初值 $\langle \hat{\sigma}_1(0) \rangle$ 和 $\langle \hat{\sigma}_2(0) \rangle$ 在上能级态 $|1\rangle$ 中都为零,因此解式 (40) 与经典解的相似性只是形式上的。因为单个矢量 $|1\rangle$ 描述一个系综,在这系综中电偶极矩的平均值当然为零。不难看出,使用一对矢量定义状态的 (30) 式可避免这一困难。

二能级原子是一个简单的量子体系。两种量子状态的描述与经典谐振子的单体描述和系综描述的对比有助于我们对量子力学的理解。

本工作是作者在意大利国际理论物理中心进行短期访问时酝酿而成的。在访问期间,曾与原子分子物理会议主席 Persico 教授以及特邀学者 Barton 教授就原子物理的基本问题进行了有益的讨论。借此机会,对国际理论物理中心和这两位教授特致谢意。

参 考 文 献

- [1] Ruyten, W. M., *Phys. Rev. A*, **40**(1989), 1447.
- [2] Seke, J. & Herfort, W., *ibid.*, **40**(1989), 1926.
- [3] Allen, L. & Eberly, J. H., *Optical Resonance and Two-level Atoms*, John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [4] Nesbet, R. K., *Phys. Rev. A*, **4**(1971), 259.
- [5] Huang, X. Y., *Phys. Lett. A*, **115**(1986), 310.
- [6] ———, *Chinese Phys. Lett.*, **4**(1987), 153.
- [7] ———, *Phys. Lett. A*, **21**(1987), 54.
- [8] Qian, S. W. et al., *Jour. Phys. A*, **19**(1986), L849.
- [9] Huang, X. Y., *Scientia Sinica (Science of China) A*, **29**(1988), 9:1141.
- [10] Huang, X. Y. & Peng, J. S., *Chinese Phys. Lett.*, **6**(1989), 351.
- [11] 黄湘友、彭金生,科学通报, **34**(1989), 10: 796.
- [12] 刘全慧,科学通报, **34**(1989), 8: 635.
- [13] Qian, S. W. & Huang, X. Y., *Phys. Lett. A*, **115**(1986), 319.
- [14] ———, *ibid.*, **117**(1986), 156.
- [15] ———, *ibid.*, **121**(1987), 211.
- [16] 黄湘友,量子力学新探,四川科技出版社,1989 年.