

无边界宇宙没有奇性

吴忠超

(中国科学技术大学天体物理研究中心, 合肥 230026; 北京师范大学物理系, 北京 100875)

摘要 在 Hartle-Hawking 无边界宇宙中, 宇宙的量子态必须只对非奇性的历史求和. 如果在对波包的解释中计及 Hamilton-Jacobi 方程的量子修正, 则所代表的所有经典轨迹必须是非奇性的. 在 Hawking 有质标量模型中, 当宇宙达到其最大尺度时, 其热力学时间箭头必须反向, 也就是热力学和宇宙学时间箭头必须一致. 人们无法将大爆炸和大挤压相区分. 讨论了时间反向对整个宇宙循环的含义. 一个有意识的生物最多只能经历宇宙的半个循环. $S^1 \times S^m$ 模型 ($m \geq 2$) 中的经典奇性的量子行为得到澄清. 宇宙应该从零动量态, 而不是从零体积态开始演化成三维几何态.

关键词 宇宙 量子态

宇宙是由 Einstein 的广义相对论所制约. 人们证明了, 在这个框架中, 在一定的条件下奇性的发生是不可避免的^[1]. 在奇点处, 时空度规、因果性以及物理定律都失效了. 在黑洞内存在有奇点, 在我们宇宙的开端也存在有奇点. 在第 1 种情形下奇性是躲藏在事件视界之内, 而外界的观察由所谓的宇宙监督猜测所保护; 而在第 2 种情形下奇性是裸的. 宇宙学家主要关心的正是第 2 种奇性, 也就是所谓的大爆炸奇性.

奇点是时空的边缘或边界. 由于在宇宙之外不存在任何东西, 所以宇宙学必须是一种自足的理论. 我们可以将这种观点重述为: “宇宙的边界条件是它没有边界.” 只有在量子宇宙学的框架中才能实现这个规划. Hartle 和 Hawking 提出, 宇宙的量子态由对所有紧致的规则的历史求和的路径积分所定义^[2,3].

本文的题目实际上是同语反复. 作者试图指出, 在无边界宇宙中不存在任何奇性, 这和他许多人的断言相抵触. 事实上, 甚至在 60 年代, 量子宇宙学的主要动机是要摆脱奇性, 和量子力学中用来避免氢原子坍缩的方法很类似. 量子宇宙论的 20 年之后的新版本的目的不仅在于避免奇性, 而且是为了预见宇宙中的一切, 至少在原则上是这样的.

本文第 1 节复述无边界宇宙学. 我们重点强调量子修正对宇宙的经典演化的效应. 第 2 节讨论 Hawking 有质标量模型. 给出了波包的另一种解释, 详尽研究它对时间箭头以及宇宙循环的含义. 第 3 节是用以澄清在其他模型中出现的奇性. 对于 $S^1 \times S^m$ 模型 ($m \geq 2$), 在无边界的条件下, 宇宙必须从零动量态向三维几何态演化. 因此, 奇性就被抹平了. 作者试图把奇性问题从量子宇宙论中排除掉.

1 无边界宇宙

在无边界宇宙学中宇宙的波函数处于基态,基态的定义为

$$\Psi(h_{ij}, \varphi) = \int_C d[g_{\mu\nu}] d[\varphi] \exp(-\bar{I}(g_{\mu\nu}, \varphi)), \quad (1)$$

此处的路径积分是对所有紧致的欧氏四度规和物质场位形的族 C 求和,这些四度规和给定的三度规 h_{ij} 以及它上面的物质场位形相符 $\bar{I}$ 表示欧氏作用量.

波函数 Ψ 服从 Wheeler-DeWitt 方程

$$H_0 \Psi = 0 \quad (2)$$

以及动量约束

$$H \Psi = 0, \quad (3)$$

此处 Hamiltonian 算符和动量约束算符 H_0 可由以下在其经典的对应量中对正则动量 $\Pi_{ij}(x)$ 和 $\Pi_\varphi(x)$ 的代换得到:

$$\Pi^{ij}(x) \longrightarrow -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)}, \quad \Pi_\varphi(x) \longrightarrow -i \frac{\delta}{\delta \varphi(x)}. \quad (4)$$

在不计较算符次序的情形下, Wheeler-DeWitt 方程可以写成如下形式^[4]

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + V\right)\Psi = 0, \quad (5)$$

此处 Δ 是位形空间的超度规中的拉格朗日算符, V 可以认为是势能项. 由于我们隐含地假定宇宙是闭合的,所以在 Wheeler-DeWitt 方程中时间不再显现. 因此,我们还可以把 Wheeler-DeWitt 方程看作零能量的 Schrödinger 方程.

对于某些非常简单的微超空间的宇宙模型,例如 de Sitter 模型^[3],只存在一个自由度,也就是宇宙三维球的半径 a . 除了正值的宇宙常数外没有其他物质场. 在这种情形下,位形空间依照波函数的行为可以非常清楚地被相应地分成振荡和指数区域. 波包在振荡区域可以解释成在实时间中的 Lorentzian 演化,而在指数区域,波函数被解释成在虚时间内的 Euclidean 演化. 从欧氏区域到洛氏区域的进展中产生相变.

如果位形空间的自由度的数目比一还多,事情就变得更加复杂. 一般来讲,人们不能得到纯粹振荡或指数的区域. 这里值得指出的是,波函数的行为不单由势能 V 的符号所决定,正如在只有一个自由度的情形,这是因为和 Δ 相关联的超度规不是正定的. 波函数通常采取 WKB 波包的某种叠加形式:

$$\Psi \approx C \exp(-S/\hbar), \quad (6)$$

在此我们把 $\hbar$ 明显地写出, C 是缓慢变化的前因子,而 $S \equiv S_r + iS_i$ 是复相位.

由于在波函数分解时形式(6)的波包不是独立的,所以还要附加上一个条件,也就是波包本身必须服从 Wheeler-DeWitt 方程. 在经典的层面上讲,由波包所代表的演化应满足附加上一些量子修正的 Einstein 方程,正如下面所要展示的那样.

把波包的形式代入 Wheeler-DeWitt 方程可得到

$$\left(-\frac{1}{2}(\nabla S)^2 + V\right)C + \left(\frac{1}{2}\Delta S + \nabla S \cdot \nabla\right)C\hbar - \frac{1}{2}\Delta C\hbar^2 = 0, \quad (7)$$

我们可以把它分成一个实的部分

$$\left(-\frac{1}{2}(\nabla S_r)^2 + \frac{1}{2}(\nabla S_i)^2 + V\right)C + \left(\frac{1}{2}\Delta S_r + \nabla S_r \cdot \nabla\right)C\hbar - \frac{1}{2}\Delta C\hbar^2 = 0 \quad (8)$$

和一个虚的部分

$$-C\nabla S_r \cdot \nabla S_i + \left(\frac{1}{2}C\Delta S_i + \nabla S_i \cdot \nabla C\right)\hbar = 0. \quad (9)$$

如果我们略去这些方程中和 $\hbar$ 的方次相关项所代表的量子效应, 则方程(8)和(9)成为

$$-\frac{1}{2}(\nabla S_r)^2 + \frac{1}{2}(\nabla S_i)^2 + V = 0, \quad (10)$$

以及

$$\nabla S_r \cdot \nabla S_i = 0. \quad (11)$$

方程(10)是洛氏(或欧氏)Hamilton-Jacobi 方程, S_i (或 S_r)以及 ∇S_i (或 ∇S_r)分别和经典作用量以及正则动量相等同. 人们可以沿着积分曲线 $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \nabla S_i \cdot \nabla$ (或 $\frac{\partial}{\partial \tau} \equiv \nabla S_r \cdot \nabla$)来定义洛氏(或欧氏)轨道. 波函数代表 1 个经典轨道的系综. 洛氏(或欧氏)轨道在势能场 $V - \frac{1}{2}(\nabla S_r)^2$ 或者 $(-V - \frac{1}{2}(\nabla S_i)^2)$ 中运行.

这里牵涉到两种量子修正: 一种是方程(8)中的 $\hbar$ 的高阶项, 另 1 种是由于 ∇S_r (或 ∇S_i)的非零值引起的. 在洛氏情形下, 如果这些修正不可忽略, 则演化就会和经典动力学偏离甚远. 我们将要指出, 这些对短范围行为很小效应的偏离, 对于宇宙全局的性质关系重大.

波包中的系数 $\exp(-2S_r)$ 可以解释成洛氏轨道的相对几率. 我们从方程(11)看出, 洛氏轨道和欧氏轨道是相互正交的, 或者说在 $\hbar$ 最低阶近似下, S_r 沿着洛氏轨道保持不变. 方程(9)中的 $\hbar$ 项代表在洛氏演化中的概率产生, 只有在第 1 项为零时, 概率才是守恒的. 方程(8)的 $\hbar$ 项代表由欧式演化引起的概率产生的动力学效应.

总之, 波函数包含 2 个动力学部分. S_i 代表在实时间中的洛氏演化, 而 S_r 代表在虚时间中的欧氏演化. 人们有时可以这么说, 从实时间的观点看, 第 2 部分的动力学被冻结了. 我们不必再为下面的事实担忧, 即只有在非常特殊的情形下, 欧氏时空在它的复化的流形中具有一个截面, 其度规是洛氏的. 这是因为该洛氏度规满足方程(8), 即修正的 Einstein 方程. 欧氏和洛氏流形没有必要像在 de Sitter 模型中那样, 是一个复流形的两个截面.

实时间中的演化是因果性的, 而虚时间中的演化是随机的. 人们甚至可以进一步猜测, 宇宙中的一切随机行为都是起因于与虚时间相关的行为.

2 Hawking 有质标量模型

人们投注了大量的心力来研究 Hawking 有质标量模型^[5]. 在这个模型中, 具有质量 m 的标量场中和 1 个各向同性的均匀的宇宙相耦合

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2. \quad (12)$$

此处 $d\Omega_3^2$ 代表 1 个单位三维球的度规, 宇宙的半径 a 单独代表了引力场. Wheeler-DeWitt 方程写成

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial}{a\partial a} - \frac{\partial^2}{a^2\partial\varphi^2} - a^2 + a^4 m^2 \varphi^2\right]\Psi = 0. \quad (13)$$

从对所有规则的欧氏度规求和的路径积分得到基态. 人们对于小的圆球度规和它上面的大的 φ_0 值可以得出欧氏场方程的解. 具有这种边界的解近似地为一个稍微变形的四维球以及几乎为常数的场 φ . 其 φ 起着—个正值的宇宙常数的作用. 这个鞍点的度规控制了位形空间中原点零锥附近的波函数行为. 在这儿波函数纯粹是指数的. 不存在振荡分量. 是存在有许多规则的复解, 但是由于路径积分是对所有的欧氏度规求和, 而不是对所有复度规求和, 只有这个欧氏度规被当作鞍点.

由于在该零锥处 $|\varphi|$ 的值无穷大. 所以没有任何规则的轨道可以到达那儿. 所以人们在同等的近似下, 可以天真地在该零锥上设下 $\Psi = 1$ 的边界条件.

当 a 比对给定的 φ_0 的四维球的半径更大时, 再也找不到规则的欧氏解, 所以在以最速降线法计算路径积分时, 人们必须使用一对复共轭的解. 波函数的相就变成复的了.

在 $|\varphi| \gg 1$ 复相区域, 波函数几乎纯粹是振荡型的, 在经典的框架中, 它代表了所谓 Planckian 暴涨阶段的系综. 所以在 Hawking 模型中, 无边界假设隐含了暴涨机制.

位形空间中 $|\varphi| < 1$ 区域的波函数对应于标量场振荡和宇宙像尘埃模型那样行为的阶段. 这个阶段的经典轨道应遵循附加一些量子修正的 Einstein 标量场方程, 其初始条件是 Planckian 暴涨机制所提供. 正如暴涨阶段, 在短时间内, 量子修正或许可以忽略不计. 然而, 它们的贡献在长时间里不可忽视, 更不用说对于宇宙的整体演化.

Hawking 曾经论断道^[5], 波包对应于某些非奇性的振荡解, 说得更具体些, 是分立的可数的在 $a = a_0$ 和 $\varphi = \varphi_0$ 处具有初始条件 $a = 0, \varphi = 0$ 的经典轨道的集合. 宇宙经历了 Planckian 暴涨, 然后以灰尘模型方式膨胀. 在宇宙到达最大尺度后将以时间对称的方式收缩, 然后坍塌到 1 个最小的尺度 a_0 , 此后它又会反弹回来. 这样, 宇宙就经历了无限多次的膨胀收缩循环. 人们在解不具有前述修正的 Einstein 标量场方程时, 很容易意识到, 为了得到时间对称的解, 他必须以不可思议的精度来细心选取分立的初始参数 a_0 或 φ_0 . 让 1 个人去选取正确的初始条件为了保证在发生在 100 多亿年之后的某一时刻的反弹条件, 实在是一桩奇迹. 另一方面, Page^[6]基于相同的方程发现, 还存在 1 个非奇性的、非周期的、永远反弹的轨道的不可数的集合. 然而, 除了这种具有零测度的轨道的集合之外, 所有轨道都要达到 $a = 0$, 因而是奇性的.

那些坚持使用没有量子修正的严格的经典动力学的人们也许会推论道, 奇性轨道也应对路径积分有所贡献, 并且以和规则轨道在通过路径积分来定义基态同样的方式. 在下面给出的解释中, 我们将指出波函数不代表任何奇性解, 所以在路径积分中不应该也不需要包括奇性历史.

更合理的解释似乎是, 宇宙在位形空间的波包区域的边缘以上述的初始条件, 沿着以 φ_0 为参数的洛氏轨道启航. 它们严格地服从 Hamilton-Jacobi 方程, 也就是具有量子修正的 Einstein 标量方程. 人们可以一开始选取任意的 $\varphi_0 (|\varphi_0| > 1)$.

宇宙在 Planck 暴涨后以尘埃模型方式膨胀, 它到达最大尺度后将要收缩. 只有对于 1 个分立的、可数的 φ_0 的集合, 人们在最大尺度的时刻才刚好得到 $\varphi = 0$ 或者 $\dot{\varphi} = 0$. 那么收缩相就会刚好是膨胀相的时间反演. 这种时间对称的行为定性地为 Hawking 的反弹解所描述, 但是由于量子修正这种描述不是定量的.

对于其余的参量 φ_0 , 在宇宙到达最大尺度时, 其标量场不满足时间对称条件. 尽管如此, 宇宙仍会收缩, 而标量振幅由于收缩而增大. 到某一时刻宇宙进入一个暴涨的时间反演阶段,

而标量的绝对值会快速增大. 在整个演化时间里的量子修正保证经典演化循环于最终条件 $a=0, \phi=0$ 处终结. 人们可以从波函数的行为容易看到这一点. 然而标量的终值 ϕ_1 和 ϕ_0 不同. 当然, ϕ_1 不能是前面提到的分立可数集的元素.

修正的动力学是不稳定的, 宇宙在大挤压一端进入暴涨阶段的时刻是不可预言的, 尽管是可确定的. 它是如此之不稳定, 对于初始值 ϕ_0 的任意小范围变化, 其终值 ϕ_1 都会弥散到大范围去. 标量场从振荡行为逃到暴涨行为的时刻选取具有随机形式, 正如在 Lorenz 吸引子的情形, 1 个简单的数学微分方程会导致混沌行为. 然而, 进入暴涨阶段后, 这种混沌就会退化. 由于波函数在 Planck 暴涨阶段中所采取的形式, 对于所有的 ϕ 值其暴涨时间反演的行为和大爆炸那一端相同. 然后轨道反弹回来, 标量场沿着同一轨道从 ϕ_1 回到 ϕ_0 , 这样无限地重复下去. 实际上, 除了在暴涨阶段, 膨胀相和收缩相看起来是时间对称的 (图 1).

正如 Page^[6]所描述的, 这个模型在经典宇宙学中的演化更加混沌得多, 所以人们可以说, 量子效应使宇宙的演化稳定到这种程度, 它排除了奇性.

Hawking 指出宇宙波函数是 CPT 不变的^[7]. 然而, Page^[8]正确地指出, 这并不排除时间非对称的解. 这是因为即便总波函数是 CPT 不变的, 每个单独的波包不必是 CPT 不变的. 在我们的解释中这的确如此. 除了 $\phi_0 = \pm \phi_1$ 的特殊情形, 所有的波包都是时间非对称的, 尽管在实际上它们显得是时间对称的.

Halliwell 和 Hawking 研究了模型的引力和标量场线性微扰模式. 他们利用无边界假设, 发现当 a 和 ϕ 在位形空间中非常接近振荡区域边界时, 这些模式处于 Heisenberg 不确定性原理允许的最小起伏状态. 这些也就是在经典轨道循环起始之处. 这些微扰模式的量子态不依赖于轨道, 正如路径积分定义所显示的, 它只依赖于在推广的位形空间中的位置. 他们利用半经典和绝热近似来获取模式的波函数, 纯粹是因为方便. 这些结果显然与这些手段无关. 这样, 在循环的开始和终结两端, 所有起伏都应处于基态, 也就是说, 宇宙必须是非常光滑并有序的.

随着宇宙膨胀, 当该模式尺度超出了宇宙视界, 其基态起伏就被放大. 在这一阶段, 绝热近似不再成立, 模式的波函数被凝固. 然后在物质主导阶段, 该模式以高度激发的状态又重新进入视界. Grishchuk^[10]采用量子光学中的挤压真空态理论来计算在量子宇宙学中的起伏模式的参数放大. 再一次值得指出, 其计算的结果应和轨道无关. 无论如何, 当宇宙变大时, 起伏模式应处于高度激发状态, 宇宙变成无序和非均匀. 其演化变成非线性的, 而且其粗粒熵在膨胀过程中会单调地增加.

熵是宇宙尺度的递增函数. 这种增加导致热力学时间箭头. 这样, 时间箭头在膨胀相指

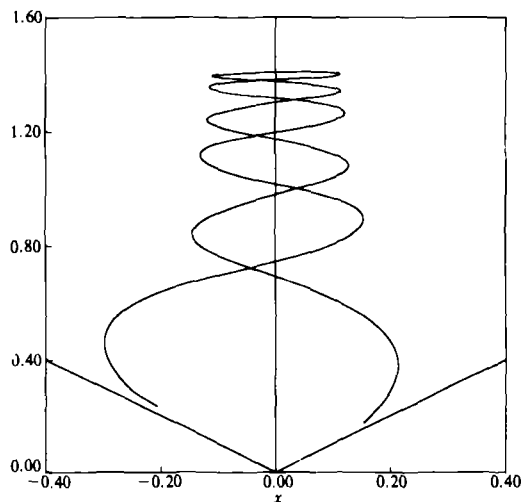


图 1 Hawking 模型中的 1 个典型的非对称演化
其坐标定义是: $x = a \sinh \phi$, $y = a \cosh \phi$

向将来方向,在宇宙开始收缩时反向.如果人们不想等待这么久去证实这一点,他可以跳进 1 个黑洞中去检验,局部的坍缩是否会使时间箭头反向,正如 Hawking 所提议的那样^[7].

人们只有在量子宇宙学中才明白,时间箭头是由宇宙的边界条件,也就是 Hartle-Hawking 无边界假设所隐含^[7].在发现这个关联之前,宇宙中时间箭头到处指向一致被认为是 1 个巨大的疑难.宇宙既不处于零温度也不处于热死状态,对于生命的存在攸关重大.只有在这熵增的过程中,非平衡态统计物理中的耗散结构才能形成.这些结构正是宇宙中的生命雏形.

即便时间箭头的确反向,人们也无法体验到这一点.其原因如下,心理学时间箭头是和以下事实相关联,人们能记住过去而不是将来,这种箭头和热力学箭头相一致.人们在收缩相会看到宇宙从大挤压向它的最大尺度膨胀.事实上,人们已无法区分大爆炸和大挤压.人们总是觉得它是生活在膨胀相中.所以,人们不必求助于人择原理去解释,为何我们是处在膨胀相中,这是由于在这种解释下根本不存在大挤压和收缩相.当然,在接近最大尺度的时刻,1 个人即便存活,也会失去他的许多时间方向感,这是因为宇宙是如此接近于它的热死,在这个时刻时间箭头变得很模糊.

这样,即便我们把波函数解释成经典演化的无限循环的系综,人们只能经历到以 φ 为参数的半个循环,也就是从大爆炸起到最大尺度止.由于在宇宙之外不存任何活体去监视这循环,对于每个轨道而言,每一循环都是完全等同的,人们可以简单地说对称轨道代表了半循环,非对称轨道代表了 2 个半循环.这个论断事实上也适合于经典宇宙学.因为在宇宙的不同循环中的事件被大爆炸或大挤压奇点所隔断.但是,我们这儿的论断更加有力得多.

3 经典奇性的量子行为

其他宇宙学模型对于澄清量子宇宙学中的奇性问题很有助益.我们首先讨论具有拓扑 $S^m \times S^n$ 的 Kaluza-Klein 模型^[11].其微超空间度规采取如下形式

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Omega_m^2 + b^2(t)d\Omega_n^2, \quad (14)$$

这儿 $d\Omega_m^2$ 和 $d\Omega_n^2$ 是 m 维和 n 维单位球的度规.

如果除了 1 个正值宇宙常数 Λ 外不存在物质,那么 Wheeler-DeWitt 方程可写成

$$\left[\frac{\partial}{\partial R} \frac{R \partial}{\partial R} - \frac{\partial^2}{R^2 \partial \rho^2} + V \right] \Psi(R, \rho) = 0, \quad (15)$$

此处

$$V = -(m+n-1)(m+n)R^{2m+2n-4} [m(m-1)e^{-2q\rho/m} + n(n-1)e^{2q\rho/n} - 2R^2\Lambda], \quad (16)$$

$$a = Re^{q\rho/m}, \quad b = Re^{-q\rho/n} \quad (17)$$

以及

$$q = [mn(m+n-1)]^{1/2} \quad (18)$$

基态是由对所有紧致规则度规求和的路径积分所定义.当 $m > 1$ 和 $n > 1$ 时,对于非常小的体积,也就是接近零锥 $R=0$ 的点,总存在一个欧氏解.由于在零锥处作用量趋于零,所以可以协调地在该处给出边界条件 $\Psi=1$.

随着 R 增大,波函数在零势面

$$\frac{m(m-1)}{a^2} + \frac{n(n-1)}{b^2} - 2\Lambda = 0 \quad (19)$$

的类空部分开始振荡.

当

$$\frac{(n-1)(q-n)}{(m-1)(q+m)} < \left(\frac{b}{a}\right)^2 < \frac{(n-1)(q+n)}{(m-1)(q-m)} \quad (20)$$

满足时, 表面(19)式的部分相对于超度规成为类空的.

值得注意的是, 振荡区域远离开零锥, 也就是说, 经典轨迹永远不会到达零体积的奇性.

上述的论证不适合于 $n=1$ 或 $m=1$ 的情形^[12]. 这儿零势面(19)式变成零性的了. 它将和位形空间的边界在 $b=0, a=\sqrt{m(m-1)/2\Lambda}$ 或 $a=0, b=\sqrt{n(n-1)/2\Lambda}$ 处相交. 这种现象的原因是 S^1 空间的曲率为零. 看来某些洛氏轨道会到达奇性. 下面来说明此论证有误.

采用 $n=1$ 以及 $m=3$ 的特殊情形作解释. 其结论对于任意 $m(m \geq 2)$ 都应成立. 事实上, 在 $n=1$ 时, S^1 是一个圆周, 其坐标为 $\omega (0 \leq \omega \leq 2\pi)$. 对于 $a < H^{-1} \equiv \sqrt{6/\Lambda}$, 总能找到 1 个变形的五维球解, 它以半径为 a 的三维球乘上半径为 b 的圆周为边界

$$dS^2 = d\tau^2 + H^{-2} \sin^2 H\tau d\Omega_3^2 + b_0^2 \cos^2 H\tau d\omega^2, \quad (21)$$

当 $a < H^{-1}$ 时, 波函数为

$$\Psi(a, b) = C \exp\left[\frac{1}{4} a^2 b (1 - H^2 a^2)^{1/2}\right]. \quad (22)$$

人们可以进行解析延拓得到当 $a > H^{-1}$ 时的波包

$$\Psi(a, b) = C \cos\left[\frac{1}{4} a^2 b (H^2 a^2 - 1)^{1/2}\right], \quad (23)$$

以及和它相关的洛氏轨道

$$dS^2 = -dt^2 + H^{-2} \cosh^2 Ht d\Omega_3^2 + b_0^2 \sinh^2 Ht d\omega^2. \quad (24)$$

正如我们早先预料到的, 度规(24)式在 $t=0$ 处有一个锥奇性. 这个解是五维 de Sitter 空间的一部分. 人们在 S^3 de Sitter 模型中可以用解析延拓的方法, 其原因是在一维量子力学中这个步骤已由 WKB 方法得到证实^[13]. 然而, 在高维情形, 该步骤没有得到认可.

如果人们在这个模型中进行解析延拓, 则等同于把像方程(24)的解包括到路径积分中去, 尽管该度规只是五维 de Sitter 度规的一部分. 这个步骤和无边界哲学相冲突.

同样的论证适合于四维模型. 人们可以用 S^2 和 S^1 去取代 S^3 和 S^n 以得到 $S^1 \times S^2$ 的模型. 其欧氏解是一个 S^4 空间. 当 $a < H^{-1} \equiv \sqrt{3/\Lambda}$ 时, 波函数为^[14]

$$\Psi = C \exp[ab(1 - H^2 a^2)^{1/2}]. \quad (25)$$

其欧氏解和方程(21)取相同形式, 只不过 H 重新定义. 如果我们采用解析延拓或者在 $ab=0$ 处采用边界条件 $\Psi=1$ ^[14], 那么当 $a > H^{-1}$ 时, 我们就得到波包, 它代表在方程(24)中表达的洛氏解. 该坐标只覆盖 de Sitter 空间的一部分, 并有因圆周周期等同引起的奇性. 该解具有和圆周相关的尺度的不变性. 所以本质上只存在一个轨道, 正如在通常的 de Sitter 模型中一样. de Sitter 时空有这么许多表达, 表明它的普适灵活性.

然而, 如果避免使用未被认可的解析延拓, 并为 Wheeler-DeWitt 方程立下正确的边界条件, 就不应该将方程(24)的奇异洛氏演化包括到路径积分中去. 四维球的部分满足边界条件 $b=b_0, \dot{b}=0, a=0$ 以及 $\dot{a}=1$, 这儿点表示对虚时间的微分. 所有这些欧氏解轨道都会收敛

到 $a = H^{-1}$, $b = 0$ 这一点. 仅有的具有边界条件 $b = 0$, $\dot{b} = 1$, $a = a_0$ 以及 $\dot{a} = 0$ 的规则欧氏解是紧致化的具有质量参数 m 的欧氏 Schwarzschild-de Sitter 空间.

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (26)$$

此处 $|r|$ 和 a 等同, 也就是和 S^2 的尺度等同, 而当 $\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)$ 变为正值时和 b^2 等同.

为了方便起见, 可作如下分解:

$$\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) = -\frac{\Lambda}{3r}(r - r_h)(r - r_c)(r - r_-), \quad (27)$$

此处 r_h, r_c 为黑洞和宇宙的视界, r_- 是负值 r 的视界. 如果 $0 \leq m \leq \Lambda^{-1/2}/3$, 则存在两个欧氏部分 $r_h \leq r \leq r_c$ 和 $r_- \leq r < 0$, 而且 $0 \leq r_h \leq r_c \leq H^{-1}$ 以及 $-2H^{-1}/\sqrt{3} \leq r_- \leq -H^{-1}$. 对于极端情形 $m = \Lambda^{-1/2}/3$, 第 1 部分退化成 $S^2 \times S^2$ 空间. 对于 $m > \Lambda^{-1/2}/3$, 只有第 2 部分仍然存在, 而且 $r_- < -2H^{-1}/\sqrt{3}$. 至于负值质量参数, 人们可以简单地改变 r 的符号, 并没有得到新解.

在我们模型中, 欧氏部分在它的视界进行规则化紧致后应对 Ψ 在 $b = 0$ 处的边界值有贡献. 然而, 没有想当然的理由使人相信当 $b = 0$ 时波函数应为常数. 在下面的计算中, 假定第 2 种欧氏部分不贡献. 其理由也许是这些解是不稳定的. 这样, 将边界条件设成 $\Psi = 1$ (当 $a = 0$ 或 $b = 0$ 并 $a < H^{-1}$ 时) 以及 $\Psi = 0$ (当 $b = 0$ 并 $a > H^{-1}$ 时), 而在转变处波函数作指数衰减.

利用坐标

$$x = R \sinh \rho, \quad y = R \cosh \rho, \quad (28)$$

可将方程(15)写成标准形式.

在物理上可以有意义的区域是由 $y > |x|$ 所限制的零锥的将来, 其零坐标表成

$$u = y - x, \quad v = y + x. \quad (29)$$

利用蛙跳方法在这个边界条件下进行数值积分, 得到了图 2 所示的波函数. 将波函数幅度的平方根画出, 为了看起来更明晰一些. 为了比较, 对同一模型在边界条件下也进行了积分, 图 3 是波函数. 在图 3 中我们隐含地假定, 第 1 类和第 2 类 Schwarzschild-de Sitter 空间的欧氏部分对波函数有同等贡献. 如果情形果真如此, 则我们应预料到在邻近边界 $b = 0$, $a > H^{-1}$ 处波函数应有指数分量. 然而, 我们只能在那儿找到纯粹振荡的行为. 这似乎认可了我们在图 2 中选取的边界条件.

图 3 的指数和振荡区域代表 S^4 空间和 de Sitter 时空的部分. 洛氏轨道(24)式撞到边界 $u = 0$, 也就是 $b = 0$ 以及 $a = H^{-1}$, 这一点是 1 个锥奇性. 正如所预料的, 图 2 中的波包幅度在 u 接近零时由于边界条件的零值而迅速变小, 即便除了在位形空间中 $u = 0$ 邻近处, 其波模式和图 3 相类似.

为了保证当 $u = 0$ 而且 $a \gg H^{-1}$ 时, $\Psi = 0$ 的边界条件, 波函数行为应满足 $S_r \approx -\ln \Psi \propto u^{-1}$. 梯度 ∇S_r 本质上是沿着零性方向, 其对 Hamilton-Jacobi 方程的贡献可忽略不计. 这表明, 当 $a \gg H^{-1}$ 时, 量子修正是不重要的, 经典方程可由方程(24)相当好地描述.

然而, 沿着线 $u = 0$, Ψ 的值在 $v = v_0$ 处指数地下降, 该处 $a = H^{-1}$. 和这种沿 $v = v_0$ 方

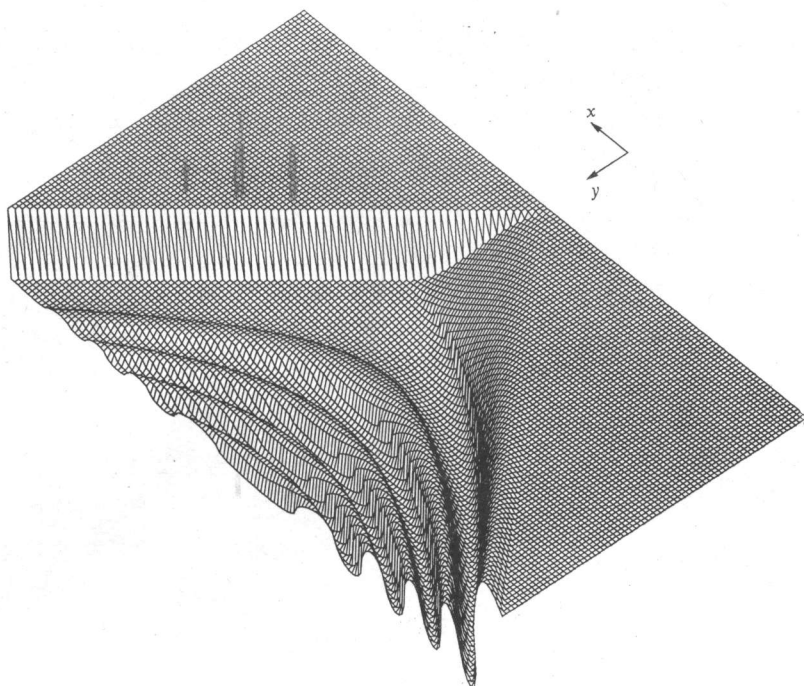


图 2 无边界条件下的 $S^1 \times S^2$ 模型的波函数
图中画出的是幅度的平方根

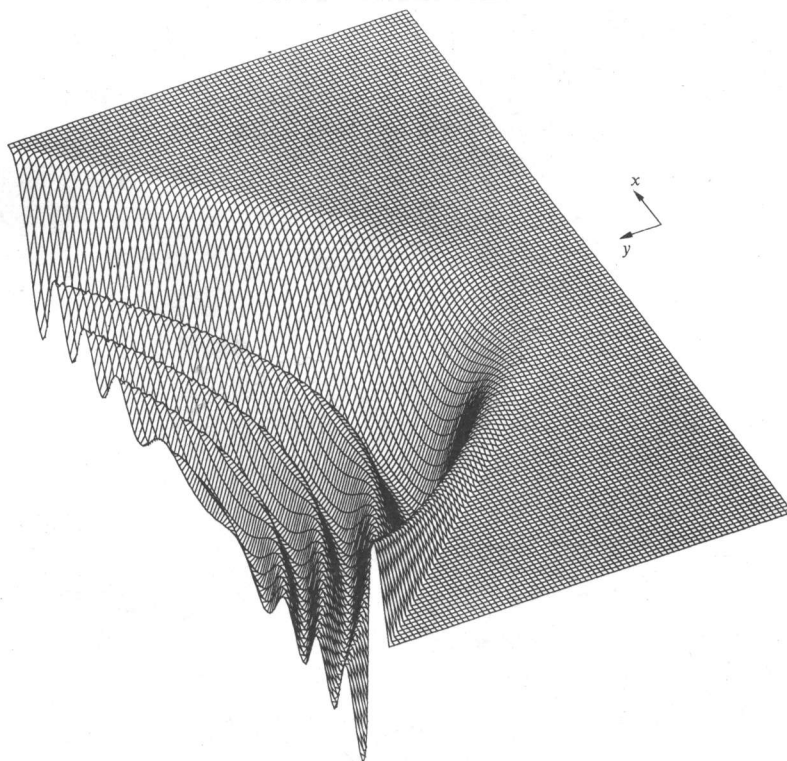


图 3 天真边界条件下的 $S^1 \times S^2$ 模型的波函数

向的衰减效应相结合,使得 ∇S_r 不再是零性的,应对势项有贡献.又由于附近波函数没有振荡行为,所以经典轨道不能穿过这一点.

波函数在邻近 $a = H^{-1}$ 处的行为可以更合理地作如下解释.当经典欧氏解的尺度 a 达到 H^{-1} 时,尺度 b 收缩.如果 $a = H^{-1}$ 则 $b = 0$ 严格成立.我们在这儿遭遇到了饼奇性.因此,人们找不到欧氏解去适合 $a = H^{-1}$ 和 $b \neq 0$ 的三维画.然而,人们总可以用1个三维短管去光滑地把欧氏解,或者四维球的部分接到该三维面上.事实上,人们只需要1个一维的管去连接 S^1 截面,因为那儿的 S^2 截面的膨胀率为零.虽然奇异的欧氏解必须从路径积分中排除掉,光滑的非奇性的四流形应该被包括进去.这个量子起伏正是在位形空间中 $a > H^{-1}$ 区域内波包或欧氏演化的起源.

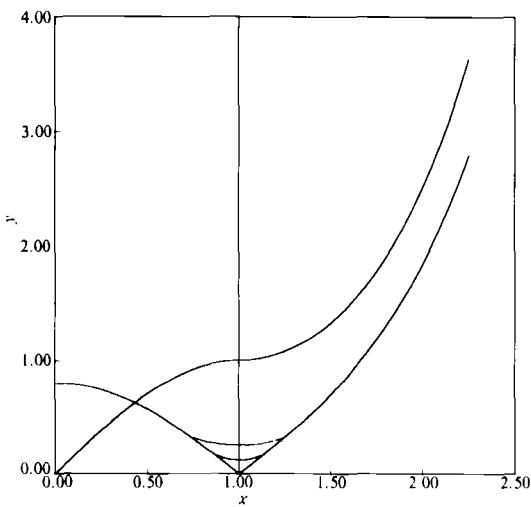


图 4 $S^1 \times S^2$ 模型中欧氏和洛氏的经典演化
奇性被零动量态所取代,零动量态可看成具有初始条件:
 $a = H^{-1}, \dot{a} = 0, b > 0, \dot{b} = 0$ 的光滑演化的叠加

从欧氏区域往洛氏区域发生一种过渡.在过渡截面宇宙在2个区域的膨胀率都为零.这样,在某种程度上说,对于洛氏演化的初始条件而言,初始零膨胀率比初始零尺度是更准确的描述.宇宙从1个零膨胀率的动量态演化到三维几何态(见图4).这是量子效应消除经典理论中奇性的方法.这个论证由以下事实来支持.在过渡截面波函数基本上为常数.这些论证也对于任何 $S^1 \times S^m$ 模型($m \geq 2$)都应成立.

如果我们研究 S^3 模型,则存在1个波包,并得到精确的 de Sitter 时空.然而,如果我们转到 $S^1 \times S^2$ 模型,只能实现 de Sitter 时间的一部分,而且初始的锥奇性被量子效应所抹平.这种对比可以看成时空的不同切片方式的后果.这两个模型中,时间坐标是不同的,它们的三维几何算符是不对易的.具有非紧

致三维平面截面的 de Sitter 模型不在现有的无边界宇宙学的框架之内.

图 5 是 $S^m \times S^n$ 模型($m > 1, n > 1$)的玩具波函数.波包区域和零锥 $R = 0$ 相互隔开.这种定性行为在更现实的模型中应该保留不变.这一点已用数值方法给予证实,但由于数值巨大不能在此画出.

$S^1 \times S^2$ 模型是具有有质标量场的 $S^1 \times S^2$ 模型的锥形^[15],正如 S^3 de Sitter 模型和 Hawking 模型的关系一样.如果我们使用延拓,那么在初始标量场 φ_0 的值相当大些,欧氏区域以及暴涨区域可用上面的模型来近似,而且取 $\Lambda = m^2 \cdot \varphi_0^2$.在暴涨之后,标量场减小并振荡,宇宙转入尘埃模型.然后宇宙会坍缩,解变成一个黑洞内部的一部分.其内部应由 ω 范围 $(-\infty, +\infty)$ 来覆盖.这儿黑洞内的类空的时间坐标和 ω 相等同.

由同样原因,如果坚持无边界哲学,则不能使用解析延拓,必须使用与具有宇宙常数的 $S \times S$ 模型类似边界条件.那样的话,洛氏演化的奇性就会被抹平,不再受奇性问题的折磨.

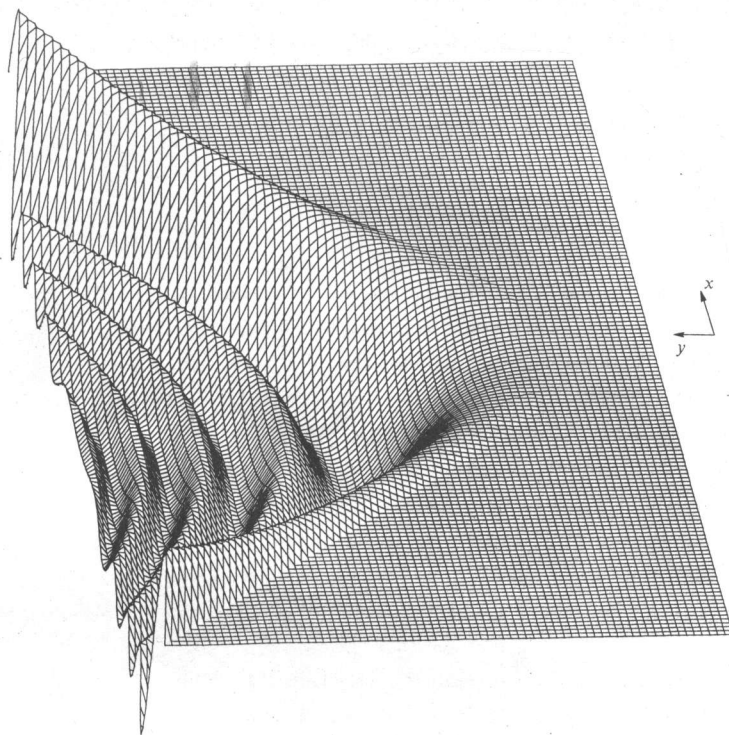


图 5 具有势 $V = -12a^2b^2(1/a^2 + 1/b^2 - \Lambda)$ 的玩具模型的波函数

4 结论

作为理论物理一个分支的量子宇宙学, 不仅必须是自洽的, 而且必须是自足的. 在这个含义上, 无边界宇宙是科学上的一种最漂亮的理论. 然而, 如果人们把奇性历史包括到路径积分中去, 那么理论就变成既不自洽也不自足了.

此文可以看作在文献[16]中提及的观点的详述. 它讨论了宇宙的奇性和时间箭头等问题. 人们也许不会存活那么久, 去证实在宇宙达到最大尺度时是否发生时间方向的反向. 即便真的发生反向而且某人存活, 他也不会觉察得到. 另一方面, 就奇性而言, 除非能保证, 同样的物理定律不仅制约发展而且制约初始条件, 正如在量子宇宙学中那样, 人们就不能从奇性的恶梦之中摆脱出来, 即使在日常生活的层面上来讲, 也是如此.

我们利用 Hartle-Hawking 基态假设来计算宇宙的波函数. 在缺少完备的量子引力的情形下, 所能做的是遵照无边界哲学, 并赋予 Wheeler-DeWitt 方程某种似乎合理的边界条件, 以冀获取经典奇性的更现实的行为. 考虑到量子效应, 我们指出, 经典奇性确实为量子效应所抹平.

我们的解释对于时间箭头以及整个宇宙的循环具有根本的含义. 自然中的周期现象是非常普遍的, 但是对于整个宇宙根本不存在循环. 人们至多只能体验到半循环. 由于宇宙是研

究的唯一对象,在宇宙学中许多物理定律都被超越了.例如,一个闭合宇宙的总能量为零.闭合宇宙的量子宇宙学表述中不显现时间坐标.波函数坍缩的哥本哈根解释不适用于宇宙量子态.所有这些之中最引人注目的最基本的事实是,宇宙没有边界.

致谢 刘辽教授和赵峥教授惠予作者许多帮助,特此致谢.

参 考 文 献

- 1 Hawking S W, Ellis G F R. The large scale structure of spacetime. Cambridge University Press, 1973
- 2 Hawking S W. The boundary condition of the universe in astrophysical cosmology. *Pointif Acad Sci Scr Varia*, 1982, 48
- 3 Hartle J B, Hawking S W. Wave function of the universe. *Phys Rev*, 1983, D28: 2 960
- 4 Hawking S W, Page D N. Operator ordering and the flatness of the universe. *Nucl Phys*, 1986, B264: 185
- 5 Hawking S W. The quantum state of the universe. *Nucl Phys*, 1984, B239: 257
- 6 Page D N. A fractal set of perpetually bouncing universes? *A Class. Quantum Gravit*, 1984, 1: 417
- 7 Hawking S W. The arrow of time in cosmology. *Phys Rev*, 1985, D32: 2 496
- 8 Page, D N. Will entropy decrease if the universe recollapses? *Phys Rev*, 1985, D32: 2 496
- 9 Halliwell J J, Hawking S W. Origin of structure in the universe. *Phys Rev*, 1985, D31: 1 777
- 10 Grishchuk L P. Quantum mechanics of primordial cosmological perturbations. *Proc 6th Marcel Grossman Meeting. Kyoto Japan*, 1991
- 11 Hu X M, Xu Z C. Quantum klein-kaluza cosmology (II). *Phys Lett*, 1984, B149: 87
- 12 Wu Z C. Quantum klein-kaluza cosmology (I). *Phys Lett* 1984, B149: 87
- 13 Landau L D, Lifshitz E M. *Quantum mechanics*. Pergamon Press, 1958
- 14 Laflamme R. The wave Function of a Black Hole interior. preprint, 1986
- 15 Laflamme R, Shellard E P S. Quantum cosmology and recollapse. *Phys Rev*, 1987, D35: 2 315
- 16 Wu Z C. No-boundary universe, Hunan Scientific Press, 1993