

球 对 称 静 态 杨 振 宁 场

陈 时 何 祚 庠 邹 振 隆

(中国科学院高能物理研究所) (中国科学院北京天文台)

郭 汉 英

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

最近,杨振宁提出了一种引力场方程. 这一理论可以解释广义相对论的观测检验,同时又具有不同的物理内容. 本文考查了杨振宁方程的球对称静态解以及这些解和爱因斯坦理论的关系.

在这种条件下,我们将杨振宁方程化为二阶方程,并求出三类严格解. 对于同时满足爱因斯坦方程和杨振宁方程的那些解,这三种类型分别对应于无源、压强各向同性物态和压强各向异性物态. 我们发现,在通常的物理条件下,压强各向同性物态的爱因斯坦场都不是杨振宁场;这表明引力崩溃理论的一大类模型都有可能从理论上予以排除. 同时,压强各向异性物态却有可能同时满足爱因斯坦方程和杨振宁方程. 而且,我们求出的一组解可以建立既非黑洞又无奇性的星体模型.

本文的结果表明,杨振宁方程和爱因斯坦理论之间的相互制约关系,有可能更深刻地反映重力过程的本质,对于克服广义相对论的某些困难会有所帮助.

—

杨振宁指出^[1], Utiyama^[2] 把广义相对论的爱因斯坦方程作为规范场方程的解释,是不太自然的. 这个批评不仅适用于资料[2], 同样适用于爱因斯坦-嘉当理论的规范场解释^[3]. 杨振宁认为引力场是“平行移动规范场”,他从通常规范场论的原则出发,建议了一组无源引力场方程:

$$R_{\mu\nu;\lambda} = R_{\mu\lambda;\nu}, \quad (1)$$

我们称这组方程为杨振宁方程,称由这组方程决定的场为杨振宁场.

我们容易得到杨振宁场如下的一般性质¹⁾:

1. 无源爱因斯坦场是杨振宁场;
2. 杨振宁场的标量曲率为常数. 因此,凡能量动量张量满足

$$T \equiv T_{\mu}^{\mu} = \text{常数}, \quad \text{和} \quad T_{\mu\nu;\lambda} = T_{\mu\lambda;\nu} \quad (2)$$

的爱因斯坦场是杨振宁场. 因此,杨振宁场可容有“宇宙学常数 Λ ”;

本文 1975 年 8 月 15 日收到.

1) 资料[4]中提出的重力规范理论自然包含了这些性质. 最近,我们见到资料[5]也指出了有关结论.

3. 最大对称空间是杨振宁场。

我们知道,广义相对论的观测检验在一定意义上只涉及到无源爱因斯坦场,而对于星体内部强重力过程的描述,却存在着奇性不可避免等问题。由于上述性质,杨振宁场不仅自然容有广义相对论的合理成分,而且具有新的物理内容。最近,有人(如资料[6])仅仅因为不能解释三大验证,就断定那些不满足无源爱因斯坦方程的杨振宁场没有物理意义。我们认为这是不全面的。杨振宁场无源的概念和广义相对论无源的概念并不相同,无源杨振宁场也可以描写星体内部结构。显然,进一步研究杨振宁场的性质以及它们与爱因斯坦场的关系,无疑具有一定意义。

本文探讨了球对称静态杨振宁场的问题。

我们在这种条件下通过一次积分把杨振宁场的三阶非线性方程化为二阶非线性方程;并求出了一些严格解,其中一类解以资料[6]中的一组解为特殊情形。

利用一次积分后的结果,我们进而讨论了球对称静态杨振宁场和爱因斯坦场的关系。我们发现,对于星体内部过程,由于物理条件的限制,压强各向同性物态的爱因斯坦场都不是杨振宁场;这明表,黑洞和引力崩溃理论的一大类模型都有可能从理论上予以排除^[7]。同时,压强各向异性的物态却有可能既满足爱因斯坦方程又满足杨振宁方程。本文求出的一大类解恰好具有这种性质,其中有一组解可以建立既非黑洞又无奇性的星体模型。

本文的结果表明,杨振宁方程和爱因斯坦理论之间的相互制约关系,有可能更深刻地反映重力过程的本质。

二

球对称静场的线元为:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3)$$

其中未知函数 $\nu(r)$ 及 $\lambda(r)$ 由场方程决定。

度规为(3)式的曲率张量只有四个独立分量,即

$$\begin{aligned} A &\equiv R^{01}_{01} = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{1}{2} \nu'^2 - \frac{1}{2} \nu' \lambda' \right), \\ B &\equiv R^{02}_{02} = R^{03}_{03} = -\frac{1}{2r} e^{-\lambda} \nu', \\ C &\equiv R^{12}_{12} = R^{13}_{13} = \frac{1}{2r} e^{-\lambda} \lambda', \\ D &\equiv R^{23}_{23} = \frac{1}{r^2} (1 - e^{-\lambda}). \end{aligned} \quad (4)$$

此时,杨振宁方程(1)只有两个联立方程:

$$A' + \frac{2}{r} (A - B) = 0, \quad (5a)$$

$$C' + \frac{1}{2} \nu' (C - B) + \frac{1}{r} (C - D) = 0. \quad (5b)$$

显然,(5a)式为三阶,(5b)式为二阶的非线性常微分方程。直接求解是相当复杂的。然而,可以利用标量曲率为常数的性质,对球对称杨振宁场进行一次积分,从而使问题大大简化。

对于球对称静场:

$$R = 2A + 4B + 4C + 2D = \text{常数}. \quad (6)$$

利用 (4)–(6) 式不难证明, $B + C$ 应满足方程:

$$[r(B + C)]' + 2(B + C) = \frac{R}{2}.$$

由此可得:

$$B + C = \frac{K}{r^3} + \frac{R}{6}, \quad (7a)$$

$$A + D = -\frac{2K}{r^3} + \frac{R}{6}, \quad (7b)$$

其中 K 为积分常数.

利用 (4) 式, 可将 (7) 式化为:

$$v' - \lambda' + \left(\frac{2K}{r^2} + \frac{R}{3}r\right)e^\lambda = 0, \quad (8a)$$

$$\lambda'' - \frac{3}{2}\left(\frac{2K}{r^2} + \frac{R}{3}r\right)e^\lambda\lambda' + \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{r^2} + \frac{R}{3}r\right)'e^{2\lambda} - \frac{2}{r^2}(e^\lambda - 1) = 0, \quad (8b)$$

(7) 或 (8) 式就是等价于 (5) 式积分一次以后的方程.

方程组 (7) 或 (8) 是二阶非线性常微分方程组, 特别 (8b) 式仅含一个未知函数. 利用常微分方程的理论, 完全可以定性地分析解的行为, 并进行数值积分.

这里, 我们给出 (7) 或 (8) 式的一些严格解.

1. 假定

$$v' = -\lambda', \quad (9)$$

此时有解:

$$v = -\lambda + c, \quad e^{-\lambda} = 1 + \frac{K}{r} - \frac{R}{12}r^2, \quad (10)$$

其中 c 为常数. 史瓦兹希德-德西特解是 (10) 式的特例.

2. 假定

$$v' = 0, \quad (11)$$

此时有解:

$$v = c', \quad e^{-\lambda} = 1 + \frac{2K}{r} - \frac{R}{6}r^2, \quad (12)$$

其中 c' 为常数. 爱因斯坦“宇宙解”是 (12) 式的特例.

3. 假定

$$v' = \lambda', \quad (13)$$

此时有 $K = R = 0$, 且方程 (8b) 化为:

$$\lambda'' - \frac{2}{r^2}(e^\lambda - 1) = 0,$$

积分此式得:

$$y' \pm y(c_1 + 4y)^{1/2} = 0, \quad y = \frac{1}{r^2}e^\lambda,$$

再积分. 最后得到解:

$$v = \lambda + c_3,$$

$$e^{\lambda} = \begin{cases} \left(1 + \frac{c_2}{r}\right)^{-1}, & c_1 = 0, \\ -\frac{1}{4} c_1 r^2 \operatorname{sch}^2\left(\frac{\sqrt{c_1}}{2} r + c_2\right), & c_1 > 0, \\ -\frac{1}{4} c_1 r^2 \operatorname{sec}^2\left(\frac{\sqrt{-c_1}}{2} r + c_2\right), & c_1 < 0, \end{cases} \quad (14)$$

其中 c_1, c_2, c_3 是积分常数. $c_1 = 0$ 的情形, 即资料 [6] 得到的一组解.

三

为了考查杨振宁场的物理内容及其与爱因斯坦理论的关系, 我们来分析同时满足爱因斯坦方程和杨振宁方程的爱因斯坦-杨振宁场的行为.

爱因斯坦方程及守恒方程为:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{1}{2\chi} T_{\mu\nu}, \quad (15)$$

$$T_{\mu\nu};{}^\nu = 0, \quad (16)$$

球对称静态的能量动量张量最一般的形式为:

$$(T_{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(\rho(r), -p_1(r), -p_2(r), -p_2(r)), \quad (17)$$

此时, 方程 (15) 及 (16) 式化为:

$$B - C = -\frac{1}{4\chi}(\rho + p_1),$$

$$A - D = -\frac{1}{4\chi}(\rho - p_1 + 2p_2), \quad (15')$$

$$R = 2A + 4B + 4C + 2D = \frac{1}{2\chi}(\rho - p_1 - 2p_2),$$

$$p_1' + \frac{\nu'}{2}(\rho + p_1) + \frac{2}{r}(p_1 - p_2) = 0. \quad (16')$$

利用杨振宁方程积分一次的结果(7)式, 可以得到爱因斯坦-杨振宁场曲率张量和物态的关系:

$$A = -\frac{p_2}{2\chi} - \frac{K}{r^3} - \frac{R}{6},$$

$$B = -\frac{1}{4\chi}(p_1 + p_2) + \frac{K}{2r^3} - \frac{R}{6},$$

$$C = \frac{1}{4\chi}(p_1 + p_2) + \frac{K}{2r^3} + \frac{R}{3}, \quad (18)$$

$$D = \frac{p_2}{2\chi} - \frac{K}{r^3} + \frac{R}{3},$$

$$R = \frac{1}{2\chi}(\rho - p_1 - 2p_2) = \text{常数},$$

以及当 $\nu' \neq 0$ 时与杨振宁方程 (5) 等价的对物态的限制

$$p_1' - \frac{1}{r}(p_1 - p_2) = 0. \quad (19a)$$

而当 $v' = 0$ 时, 由 (16') 式可得:

$$p'_1 + \frac{2}{r}(p_1 - p_2) = 0. \quad (19b)$$

显然, 并不是任何物态都能同时满足爱因斯坦方程和杨振宁方程的要求. 下面讨论几种情形, 它们分别与前面得到的三类严格解对应.

1. 无源爱因斯坦-杨振宁场.

此时 $T_{\mu\nu} = 0$, 显然, 只有史瓦兹希德场是无源爱因斯坦-杨振宁场.

2. 压强各向同性物态.

此时 $p_1 = p_2$, 由 (18), (19) 式可得:

$$p \equiv p_1 = p_2 = \text{常数}, \quad \rho = 3p + 2\chi R, \quad (20)$$

守恒方程 (16') 变为 $v'(\rho + p) = 0$, 即

$$v' = 0, \quad \text{或} \quad \rho + p = 0, \quad (21)$$

对于 $v' = 0$ 的情形, 由上一节知有解 (12) 式. 但此时 $A = B = 0$, 由 (18) 式必有

$$p = -\frac{1}{3}\chi R, \quad \rho = \chi R. \quad (22)$$

这表明, 除非 $\rho = p = 0$, ρ 或 p 总为负值. 对于 $\rho + p = 0$ 的情形也是如此.

显然, 如果 ρ 或 p 不能总为负值的物理要求成立, 那么就得到: 在球对称静态的条件下, 压强各向同性物态的爱因斯坦场都不可能是杨振宁场. 因此, 只要能够建立引力场在某种条件下同时由爱因斯坦方程和杨振宁方程描述的理论, 那么, 黑洞和引力崩溃理论的一大类模型就有可能从理论上予以排除. 我们在另一文中指出¹⁾, 从资料 [4] 中提出的重力规范理论来看, 这是完全可能的.

3. 一种特殊的压强非各向同性物态.

假定 (13) 式成立, 此时杨振宁方程有解 (14) 式. 显然, 只要物态满足一定的条件, 这种杨振宁场就可以同时是爱因斯坦场.

特别值得指出的是, 若对 (14) 式 $c_1 < 0$ 的情形取

$$c_2 = (2n + 1)\pi/2, \quad (23)$$

则得

$$e^{\lambda} = x^2 \sin^{-2} x, \quad x = \frac{1}{2} \sqrt{-c_1} r. \quad (24)$$

此时, 如果密度和压强满足

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{2} c_1 \chi x^{-4} (\sin^2 x - x \sin 2x + x^2), \\ p_1 &= -\frac{1}{2} c_1 \chi x^{-4} (3 \sin^2 x - x \sin 2x - x^2), \\ p_2 &= -\frac{1}{2} c_1 \chi x^{-4} (x^2 - \sin^2 x), \end{aligned} \quad (25)$$

则 (24) 式就是爱因斯坦场. 要求 (24) 式在度规连续的条件下与史瓦兹希德场衔接, 则有可能建立一个既非黑洞又无奇点的星体模型. 在这个模型中, 星体半径永远在史瓦兹希德半径

1) 陈时、何祚庥、邹振隆、郭汉英, 重力规范理论的球对称星体模型, 尚未发表.

之外,因而没有黑洞;同时星体内部没有零点和奇点. 对于这个模型的细节,我们将在上述另一文中讨论.

不难将上述讨论推广至包含“宇宙学项 Λ ”的爱因斯坦-杨振宁场. 除了添加有关 Λ 项的宇宙学性质之外,我们得到的结果仍然成立.

四

我们的分析表明,杨振宁场的确有相当丰富的物理内容. 它包含着广义相对论经过检验的合理成分,可以描述星体外部的重力过程. 同时,它又可以描述星体的内部结构,而且对于排除广义相对论描述的不合理因素会有所帮助. 然而,杨振宁方程也存在一些不确定的因素. 例如,仅仅从杨振宁方程本身并不能判断那些场可以描述星体外部,那些场可以描述星体的内部,那些解是非物理的,应该如何排除,等等. 这些问题的解决,在一定意义上又要借助于爱因斯坦方程. 这些情况意味着杨振宁方程和爱因斯坦方程之间可能存在某种相互制约的关系. 可以期待,这种关系能够更深刻地反映重力过程的某些性质.

最近提出的重力规范理论^[4]为这个问题的解决提供了一种途径. 在一定条件下,资料 [4] 中的一组新的重力场方程,可以化为爱因斯坦方程和杨振宁方程的联立方程,这就很自然地得到了它们之间的制约关系. 显然,本文得到的有关爱因斯坦-杨振宁场的全部结论,也都自然包含在这种重力规范理论之中. 我们将在另一文中详细讨论这些问题.

参 考 资 料

- { 1 } 杨振宁, 1972 年 7 月在北京大学的学术报告.
Yang, C. N., *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 445.
- { 2 } Utiyama, R., *Phys. Rev.*, **101** (1956), 1597.
- { 3 } Kibble, T.W.B., *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 212.
Sciama, D. W., in *Recent Developments in G. R.*, 1962, 415.
Trautman, A., in *The Physicist's Conception of Nature* (ed. J. Mehra), 1973, 179.
- { 4 } 郭汉英、吴咏时、张元仲, 科学通报, **18** (1973), 2, 72.
吴咏时、邹振隆、陈时, 科学通报, **18** (1973), 3, 119.
张元仲、郭汉英, 科学通报, **18** (1973), 3, 122.
吴咏时、李根道、郭汉英, 科学通报, **19** (1974) 11, 509.
黄 珊、郭汉英, 科学通报, **19** (1974) 11, 512.
- { 5 } 谷超豪、杨振宁, 中国科学, 1975, 5, 471.
- { 6 } Pavelle, R., *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 1461; *ibid.*, **34** (1975), 1114; Thompson, A. H., *ibid.*, **34** (1975), 507.