中　國　科　學
第1卷第2—4期，273—294頁，1950年11月

一個$\aleph_0$值命題演算的構造*

胡　世　華

(北京大學)

§1. **序言**　本文除了序言及文中與演繹無關的解釋部份之外，是自足的；除了一般的數學（如集合論的初等知識）之外，不假定任何其他專門的邏輯知識。

本節用盧卡山微琪 (Jan Lukasiewicz) 的符號，以

Cpq　,　Nq

表示如果 p 那末 q 及非 q．本節中還以 'P^m' 表示一個 m 值的命題演算，以 'P' 表示一個$\aleph_0$值的命題演算。

設 $m-1$ 與 $n-1$ 是相異的兩個正整數，前者又是後者的倍數，盧卡山微琪曾證明 P^m 是 P^n 的眞子系統，換言之，凡是 P^m 中的定理都是 P^n 中的定理，而 P^n 中的定理不全是 P^m 中的定理；又證明，P 中的定理恰恰是 P^2, P^3, P^4,………各命題演算的公共的定理（見[8]）①。這樣，P 成爲各命題演算的核心部份了，它是各命題演算 P^n 的公共的子系統；n 越大時，P^n 的內容就越貧乏，而 P 的內容又最最貧乏。由於一切命題演算 P^n（任何 n）及 P 都是 P^2 的子系統，所以一切對於多值命題演算的研究似乎都可以還原於對於 P^2 的研究，不出乎 P^2 的範圍。這或者會給人一種印象，多值邏輯的研究沒有什麼意義了。

這一種印象是根本錯誤的。

我們要從另一方面來考慮這問題，我們說，要從命題演算的內在聯繫中去考察，這樣，情形就大不相同了。

我們先來舉一個例子。例如，

(1)　　CCpNpNp

在二值的命題演算中是一個定理，可是它在三值的命題演算中並不是定理。我們說，它不是三值命題演算中的定理，是說，當 'C' 與 'N' 表示三值命題演算中的某某

* 1950年8月28日收到

① [n]表示篇末所列參考文獻中的第 n 篇文章。

基本的（我們只能這樣說‘某某基本的’）‘如果……那末……’與‘非……’時不是定理，我們不能由之而說，在三值命題演算中沒有與二值的命題演算中的相同性質的結合辭，我們不能不加附言地說(1)不是三值命題演算中的定理。

作者於[3]曾設法普遍地在任何一個完全的 P^{m+n} 中給出一組定義，用這些定義構造出一個完全的 P^m 來，或說把 P^m 安置（像把一個拓撲空間安置在另一空間中那樣）在 P^{m+n} 中去。例如，在一個三值的 Wajsberg-Słupecki 系統① 中我們只要作以下兩個定義：

$$(d_1) \qquad \sim p =_{df} CTpNp,$$

$$(d_2) \quad (p \supset q) =_{df} C{\sim}q{\sim}p,$$

我們即得到一個完全的，基於‘～’與‘⊃’的普通的二值命題演算：一個用‘～’與‘⊃’構造起來的公式，它是這 Wajsberg-Słupecki 系統中的定理的必要與充分條件——它是一個普通二值命題演算中的定理②。例如，相當於上面的(1)的公式是

$$(2) \qquad (p \supset {\sim}p) \supset {\sim}p,$$

它是二值命題演算中的定理，可也是三值演算中的定理，在三值命題演算中也有與二值演算中相同性質的‘～’與‘⊃’。我們只要給‘m 值命題演算’以嚴格的意義，我們可以得到這樣的結論：P^m 在一定意義下是 P^{m+n} 的眞正的子系統；當 m 越大時 P^m 的內容是越趨豐富。我們要說，多值命題演算的發明與研究，是邏輯文化上的飛躍的進步。蘇聯數學家包式華（Д. А. Бочвар）即是一個曾寫過關於三值命題演算的傑出論文的邏輯學者（見他的論文[1]與[2]。）

對於任何 m，我們有完全的公理化的 P^m（見[9]），有了這樣的 P^m，任何完全的 P^n，只要 $n \leq m$，P^n 卽可以被安置於 P^m 中而成爲 P^m 的子系統；我們可以說，

① Wajsberg-Słupecki 的系統是指以下的系統：

公　理：1．CpCqp

2．CCpqCCqrCpr

3．CCCpNppp

4．CCNqNpCpq

5．CTpNTp

6．CNTpTp

推理規則：　如果 p 及 Cpq，那末 q。

其中 T 是所謂第三值結合辭，或第三値函數（the tertium function），Tp 有這樣的性質：不論 p 的眞假值如何，Tp的眞假值永遠是眞假以外的第三值（見[9]）。

② 在一個演繹理論中引入一個定義的嚴格的語法的意義是這樣的：一個演繹理論在引入某一定義之後與未引入之前的改變有三：1.擴充原來的原始符號，使在定義中引入的符號也算是原始符號；2.擴充原來的組成規則，使一個包含在定義中引入的符號的公式能夠說它是不是一個命題；3.擴充原來的推理規則，使一個包含在定義中引入的符號的命題能夠經‘替入’而得到一個不包含這符號的命題。見[3]的註。

我們已把

$$P^2,\ P^3\cdots\cdots,\ P^m$$

統一於一個 P^m 中了。可是，我們未曾把所有的

$$P^2,\ P^3,\ P^4,\cdots\cdots$$

統一於一個演算中。我們因之想到來構造一個$\aleph_0$值的命題演算P，使任何一個完全的 P^m 都是P的子系統①。$\aleph_0$值的命題演算的公理化問題似乎是開始得相當早的，可是至今尚沒有得到解決②，在通常的語法的假定之下，它又是缺乏一種所謂函數的完全性的③。

在本文中我們將建立起一個$\aleph_0$值的命題演算的語法，規定它的組成規則 (formation rules)與變形規則(transformation rules)(即推理規則)。我們即將構造的$\aleph_0$值命題演算，將稱之為$\mathfrak{P}$；關於$\mathfrak{P}$的種種問題將於本文的續篇中提出，而本文乃是這些續篇的準備。$\mathfrak{P}$是一個嚴格的公理化的系統，在續篇中我們還可以看到它也有某一種的函數的完全性。

以下共分四節：**§2.組成規則**，規定$\mathfrak{P}$中的'命題'的意義。**§3.置換對**，規定在$\mathfrak{P}$中怎樣兩個命題是可以互相置換的。**§4.$\mathfrak{P}$中的定理**，規定$\mathfrak{P}$中的'公理'及'推理規則'。**§5.關於置換對的基本定理**，陳述一些於以後推理中(在續篇中)時時用到的，關於置換對的規律。

在本文中我們不作$\mathfrak{P}$的發展。$\mathfrak{P}$的發展將於續篇中着手進行。

§2. 組成規則

2.1. 初步解釋

2.11. 以下將構造起來的$\aleph_0$值命題演算系統，稱之為$\mathfrak{P}$系統，或簡稱為$\mathfrak{P}$。

2.12. 符號的應用

2.121. 拉丁小寫字母——'i'，'j'，'k'，或加添數如'i_1'，'i_2'，……，等表示任何$\geqq 0$的整數。'm'，'n'，或加添數如'm_1'，'m_2'，……，'m_i'，'m_j'，'m_{i_1}'，'m_{i_2}'，……等表示>0的整數。'v'與'v_0'，'v_1'，……有特殊意義，將於2.2中解釋。'p'，'q'，'r'，

---

① 這裏我們假定了 P^m 是完全的m值命題演算，不但是演繹的完全，而且是函數的完全(functionally complete)的。見[9]。

② 根據到1949年秋的數學及邏輯雜誌的報道。

③ 所謂'通常'的語法的假定是設命題是由有限個字母(或符號)所組成的。在這假定之下，我們只要用對角法(diagonal method)即可以證明其函數的不完全性。

's','p_i','q_i',……亦有特殊用法,見 2.131.

2.122. 拉丁大寫字母——在本文中以 'F' 表示一個特殊的結合辭,將於 2.2 及 2.3 中解釋。其他大寫的拉丁字母將於續篇中作爲特殊的命題結合辭應用,以後再解釋。

2.123. 德文大寫字母——最後三個德文大寫字母 '$\mathfrak{X}$', '$\mathfrak{Y}$', '$\mathfrak{Z}$' 表示任何集合。'$\mathfrak{A}$', '$\mathfrak{F}$', '$\mathfrak{C}$', '$\mathfrak{S}$', '$\mathfrak{N}$' 在本文中有特殊的意義,以後隨文解釋。

2.13. 其他規約

2.131. 以 '$\cdots\cdots =_{df} -\cdot-\cdot-\cdot-$' 表示 '……' 是 '$-\cdot-\cdot-\cdot-$' 的縮寫,或 '……' 定義爲,或解釋爲 '$-\cdot-\cdot-\cdot-$'。

2.132. '$\cup$', '$\cap$', '$-$', '$\subseteq$', '$\supseteq$', '$\in$' 等符號即按**集合論**中的普通意義運用之: '$\mathfrak{X}\cup\mathfrak{Y}$' 表示由 $\mathfrak{X}$ 與 $\mathfrak{Y}$ 二集合中的分子造成的集合(二集合的**邏輯和**), '$\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}$' 表示由 $\mathfrak{X}$ 與 $\mathfrak{Y}$ 二集合的公共分子造成的集合(二集合的**邏輯積**)。'$\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}$' 表示在 $\mathfrak{X}$ 然不在 $\mathfrak{Y}$ 中的分子造成的集合。'$\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{Y}$' 或 '$\mathfrak{Y}\supseteq\mathfrak{X}$' 表示 $\mathfrak{X}$ **包含**在 $\mathfrak{Y}$ 裏。'$x\in\mathfrak{X}$' 表示分子 x **屬於** $\mathfrak{X}$. 除此之外,假如

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots\cdots$$

都是集合,我們以

$$\bigcup_n f(n)$$

表示它們的**邏輯和**,即所有屬於任何一個 $f(n)$ 中的分子造成的集合,並以

$$\bigcup_i f(i)$$

表示

$$\bigcup_n f(n)\cup f(o),$$

類此

$$\bigcap_n f(n)\ 與\ \bigcap_i f(i)$$

表示相當的**邏輯積**。我們還以 '$x\,\widetilde{\in}\,\mathfrak{X}$' 表示 x 不屬於 $\mathfrak{X}$,以 '$\{x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n\}$' 表示以 $x_1,\cdots\cdots,x_n$ 爲其僅有的分子的集合,以 '[illegible]' 表示**空集合**,以 '(x,y)' 表示**對**,或云**有次序的集合**: $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ 的充分必要條件是 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

2.133. 其他算術的符號如 '$+$', '$-$', '$\leqq$', '$<$', 'Σ' 等都按照習慣的用法去用。

其他符號,在用的時候再加以解釋。

2.2. **構造所需要的概念**　爲了構造 $\mathfrak{P}$,我們需要以下(2.21.22.23)的概念:

2.21. **字母**——字母有以下(2.211.212.213.214)四種:

2.211. 一個固定的真命題: t.

2.212.　一個命題結合辭：F. (校註1.)

2.213.　一個無窮序列，稱爲$*$(讀如星)：$*_1$，$*_2$，$*_3$，……. (添數自 1 開始。)

2.214.　一個無窮序列，稱爲**命題變辭**：v_0，v_1，v_2，……. (添數自 0 開始。)

2.2141.　$\mathfrak{V}=_{df}$ 所有命題變辭造成的集合。'$x\in\mathfrak{V}$'即說 x 是某一個 v_i.

2.215.　$\mathfrak{A}=_{df}\{t,F\}\cup(\bigcup_n\{*_n\})\cup\mathfrak{V}$. '$x\in\mathfrak{A}$' 讀作 'x 是一個字母'，即說 x 是 t 或 F，或是某一$*_n$ 或某一 v_i.

2.22.　一個稱爲公式的集合：$\mathfrak{F}$. '$x\in\mathfrak{F}$' 可以讀作 'x 是一個 $\mathfrak{P}$ 中的公式'或 'x 是一個公式'。

2.23.　一個**運算**(operation)，以 '$x\circ y$' 表示。 如果 x，y 是公式($x,y\in\mathfrak{F}$)，那末，$x\circ y$ 即是由 x 與 y 兩個公式並列所造成的公式。

2.3.　**構造所需要的假定**　關於 t，F，$*_n$，v_i，$\mathfrak{F}$，$\circ$ 我們假定它們適合以下(2.31.32.33.34.35.36)各條件①.

2.31.　$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{F}$.

2.32.　序列

$$t, F, *_1, *_2, \cdots\cdots, v_0, v_1, v_2, \cdots\cdots$$

中各分子都是各不相同的，換言之，$t\neq F$，$t\neq *_1$，$t\neq *_2$，……，$t\neq v_0$，$t\neq v_1$，……，$F\neq *_1$，$F\neq *_2$，……，$F\neq v_0$，…….

2.33.　$x\circ y\tilde{\in}\mathfrak{A}$.

2.34.　$x\circ y\in\mathfrak{F}$ 的必要與充分條件是 $x,y\in\mathfrak{F}$.

2.35.　設 $w,x,y,z\in\mathfrak{F}$.　$w\circ x=y\circ z$ 的必要與充分條件是：

(1)　$w=y, x=z$ 或

有一 u 使

(2)　$x=u\circ z$，$y=w\circ u$ 或

(3)　$w=y\circ u$，$z=u\circ x$.

2.36.　設 $\mathfrak{X}$ 是任何一個集合。 假定，

校註1.　根據中國科學院編譯局的意見作補充解釋：F 是一個有以下性質的結合辭：設 p 是任何一個命題，那末

$$p, Fp, FFp, FFFp, FFFFp, \cdots\cdots$$

的眞僞値都是不相同的。

① 關於爲構造所需作假定有種種方法，見 Hermes[4] 及 Schröter[6]。

(1)　$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{X}$,

(2)　任何 x, y, 如果 $x, y\in\mathfrak{X}$, 那末 $x\circ y\in\mathfrak{X}$; 在這(1)(2)兩假定之下, 有

$$\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}.$$

以上 2.36 可以稱爲**歸納原則**。有了它, 我們若要證明所有的公式都有什麼性質, 我們只要能夠證(1)所有 $\mathfrak{A}$ 都有這性質, (2)如果 x, y 有這性質, 那末 $x\circ y$ 也有。

由 2.35 顯然有

2.37.　$x, y, z\in\mathfrak{F}$, 則 $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$.

2.371.　$x_1x_2=_{df}x_1\circ x_2$,

$$x_1\cdots\cdots x_nx_{n+1}=_{df}(x_1\cdots\cdots x_n)\circ x_{n+1}.$$

2.38.　設　　$x\in\mathfrak{F}$,

那末有 $x_1, \cdots\cdots, x_n$ 適合以下兩條件:

(1)　$x=x_1\cdots\cdots x_n$, $x_1, \cdots\cdots, x_n\in\mathfrak{A}$;

(2)　如果: $x=y_1\cdots\cdots y_m$, $y_1, \cdots\cdots, y_m\in\mathfrak{A}$,

那末: $m=n$, $x_i=y_i$　$(i=1, \cdots\cdots, n)$.

證明從略。

假如當 $x=x_1\cdots\cdots x_n$ 時我們說 x 被**分解**成 $x_1, \cdots\cdots, x_n$, 那末 2.38 即是說: 任何一個公式都可以, 而且只能以一種方法被分解成字母。

以後當我們說 x 的第幾個字母如何如何, 即是說把 x 分解成字母之後的第幾個字母如何如何。

由於每一個公式可以這樣被**分解**成字母, 我們很容易解釋若干種在直覺上很清楚的說法。我們可以解釋某一公式 x 是由幾個字母組成的, x 中第幾個字母與第幾個字母相同或不相同, 某一字母在 x 中出現過幾次, x 中有幾個 F, 幾個 $※_1$, 幾個 $※_2$, 幾個 $※_3$, ……, 幾個 v_0, 幾個 v_1 等, 也可以解釋 x 中有幾個 ※, 幾個命題變辭。例如

$$x=F※_2v_1v_0※_2v_1v_0v_1v_1※_1v_1v_1※_2v_1v_0v_2Fv_2$$

時, x 是由十八個字母組成的, x 中的第一個字母與第十七個字母相同而與第十八個字母不同, F 在 x 中出現過兩次, $※_2$ 在 x 中出現過三次, $※_1$ 在 x 中出現過一次, v_0 在 x 中出現過三次, v_1 七次, x 中有四個 ※, 十二個命題變辭等等。這種直

覺上清楚的說法，除了下面關於‘出現’的定義，我們不再加以定義。

2.39. 定義——設$x\in\mathfrak{F}$. x在y中**出現**即是說：$x=y$或有一z使$y=xz$或$y=zx$，或有z_1, z_2使$y=z_1xz_2$.

例如，上面的例子中，$*_2v_1v_0$, $*_1v_1v_1$等在x中出現。

2.4. **$\mathfrak{P}$中的命題及命題結合辭的組成規則**　在下面(2.43.44)我們要定義一個無窮序列

$$\mathfrak{C}(0),\ \mathfrak{C}(1),\ \mathfrak{C}(2),\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{C}(i)\subseteq\mathfrak{F}\qquad(i=0,1,2,\cdots\cdots),$$

$\mathfrak{C}$是一個自然數(0,1,2,……)的函數。每一個$\mathfrak{C}(i)$是一個集合。$\mathfrak{C}(0)$是$\mathfrak{P}$中的**命題**，$\mathfrak{C}(n)$是$\mathfrak{P}$中的n**項的命題結合辭**。為了定義$\mathfrak{C}$，我們要先作一些預備定義。

2.41. **公式的$*$序數，公式中的屬於$\{t\}\cup\mathfrak{V}$的字母數**　以下(2.411.412)設$x\in\mathfrak{F}$.

2.411. 設把x中的$*$之外的字母去掉（‘去掉’二字我們可以不再解釋，這也是屬於2.38中的所謂‘在直覺上很清楚的’）之後剩下的$*$，按其原來的次序作

$$*_{i_1},\cdots\cdots,*_{i_n},$$

那末，

$$*(x)=_{df}n+\sum_{k=1}^{n}i_k=n+i_1+\cdots\cdots+i_n,$$

稱為x的**$*$序數**。當x中沒有$*$時，那末$*(x)=0$.

例如設　$x=F*_2v_1v_0*_2v_1v_0v_1v_1*_1v_1v_1*_2v_1v_0v_2Fv_2$,

那末把其中$*$之外的字母去掉之後，剩下的$*$，按其原來的次序作

$$*_2,\ *_2,\ *_1,\ *_2.$$

所以　$$*(x)=4+(2+2+1+2)=11\ .$$

2.412. $v(x)=_{df}x$中的屬於$\{t\}\cup\mathfrak{V}$的字母的數目。

例如，2.411的例子中的x中的屬於$\{t\}\cup\mathfrak{V}$的字母的數目是12，所以

$$v(x)=12.$$

2.42. **正常出現**　設$y\in\mathfrak{F}$　我們說v_i在y中**第n個字母正常出現**，假如它們適合以下二條件：

（1）v_i是y中的第n個字母；

（2）　沒有 x_1，x_2 能够同時適合以下三條件：

　　(2.1)　$*_m x_1 x_2$ 是由 y 中的第 m_1 到第 m_2 個字母造成的，而

　　　　$m_1 \leqq n \leqq m_2$ ；

　　(2.2)　$v(x_1) = *(x_1) + 1$ ；

　　(2.3)　$v(x_2) = *(x_2) + 1$.

如果至少有一 n，v_i 在 y 中第 n 個字母正常出現，那末即說 v_i **在 y 中正常出現**。

2.43.　$\mathfrak{C}(0) =_{df}$ 所有適合以下三條件的 $\mathfrak{X}$ 的邏輯積：

（1）　$\mathfrak{V} \cup \{t\} \subseteq \mathfrak{X}$；　　（見2.2141.）

（2）　任何 y，如果 $y \in \mathfrak{X}$，那末 $Fy \in \mathfrak{X}$ ；

（3）　對於任何 n，如果

　　(3.1)　$x, y, x_1, \cdots\cdots, x_n \in \mathfrak{X}$ ，

　　(3.2)　v_0 不在 x 中正常出現，

　　(3.3)　任何 v_i，如果 v_i 在 x 中正常出現，那末 $i \leqq n-1$ ，

　　(3.4)　任何 v_i，如果 v_i 在 y 中正常出現，那末 $i \leqq n$ ，

那末：　　$*_n x y x_1 \cdots\cdots x_n \in \mathfrak{X}$.

如果 $x \in \mathfrak{C}(0)$，即說 x 是一個 $\mathfrak{P}$ **中的命題**，或**命題**。

2.431.　規約　以 'p'，'q'，'r'，'s'，'p_i'，'q_i'，……表示任何 $\mathfrak{P}$ 中的命題。

下面是若干個命題的例子：t，v_i，Ft，Fv_i，$*_1 t v_1 v_8$，$FFFFFv_1$，$*_2 *_1 t v_1 v_1 *_1 t v_1 v_0 *_1 t v_1 v_1 F v_i$.

2.44.　$x \in \mathfrak{C}(n) =_{df} n = 1$ 而 $x = F$ 或者有 p，q 適合 2.43 中的(3.2)，(3.3)，(3.4)三條件[1]，並且 $x = *_n pq$.　如果 $x \in \mathfrak{C}(n)$，即說 x **是一個 $\mathfrak{P}$ 中的 n 項的命題結合辭**，或**結合辭**。

2.5.　字　　$\mathfrak{W} =_{df} \{t\} \cup \mathfrak{V} \cup (\bigcup_n \mathfrak{C}(n))$.　　（見2.2141.）

當 $x \in \mathfrak{W}$ 時，我們說 x 是一個**字**；t，命題變辭，任何 n 項的命題結合辭都是字。 **任何一個命題可以，並且只有一種方法，分解成字。** 為了證明這一個定理，我們先證明一些其他的預備定理。

2.51.　$v(p) = *(p) + 1$.　　（見2.411.412.）

證：

① 這裏的 p 與 q 是 2.43 中的(3.2)，(3.3)，(3.4)中的 x 與 y .

（1） 設 $p \in \{t\} \cup \mathfrak{P}$,

那末 2.51 已經證明。

（2） 設 $v(q) = ※(q) + 1$,

$p = Fq$,

那末 2.51 也已經證明。

（3） 設 $p = ※_m p_1 p_2 \cdots\cdots p_{m+2}$,

$v(p_n) = ※(p_n) + 1 \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots, m+2)$,

那末 $$v(p) = [m + 1 + \sum_{n=1}^{m+2} ※(p_n)] + 1$$

$$= ※_m(p) + (1).$$

由（1），（2），（3），及命題的定義，2.51 得到證明①。

2.52. 任何命題 p，如果 $p = xy$，那末

(i) $v(x) \leqq ※(x)$,

(ii) $v(y) > ※(y)$.

證： 在 2.52 的前提之下，如果（i）已經證明，那末(ii)即可隨着證明了；因爲

$$v(y) = v(p) - v(x) = ※(p) + 1 - v(x),$$

由（i） $v(y) \geqq ※(y) + 1$,

所以(ii)。 所以，我們只要證明（i）。

（1） 假定 $p \in \mathfrak{P} \cup \{t\}$，那末（i）是對的。

（2） 假定 q 是 2.52 中的 p 時 2.52 是對的，那末，$p = Fq$ 時也顯然是對的。

（3） 假如 $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_{n+2}$ 是 2.52 中的 p 時都對，又設

$$p = ※_n q_1 q_2 \cdots\cdots q_{n+2} = xy,$$

在這假定之下可以假定 $x \neq ※_n$，否則（i）即已證明。 我們還可以假定，x 不作這樣的形式：

$$x = ※_n q_1 \cdots\cdots q_m, \qquad m < n+2,$$

因爲如果這樣的話，根據假定及2.51，（i）亦可證明，所以，我們可以設

$$q_m = x_m y_m, \qquad m = 1, \cdots\cdots, n+2;$$

$$x = ※_n q_1 \cdots\cdots q_i x_{i+1}, \qquad i \leqq n+1;$$

其中 i 可以是 0，如 $i = 0$，那末

① 一切證明都基於 2.3 的各假定，證明中都不徵引。

$$x = ※_n x_{i+1}.$$

現在我們有

$$v(x) = \left[\sum_{j=1}^{i} v(q_j)\right] + v(x_{i+1}) \qquad (\text{如 } i=0, \text{則 } \Sigma v(q_j)=0).$$

由 2.51 我們有

$$\sum_{i=1}^{i} v(q_j) = i + \sum_{j=1}^{i} ※(q_j),$$

由假定有 $\quad v(x_{i+1}) \leqq ※(x_{i+1}),$

所以 $\quad v(x) \leqq \left[i + \sum_{j=1}^{i} ※(q_j)\right] + ※(x_{i+1})$

$$\leqq \left[n + 1 + \sum_{j=1}^{i} ※(q_j)\right] + ※(x_{i+1}) = ※(x).$$

由以上的 (1),(2),(3),2.52 完全證明了①。

以下的 2.53.54 是 2.51.52 的推廣，它們可以從 2.51.52 及 $\mathfrak{C}(i)$ 的定義推理出來，證明留給讀者。

2.53. 設 $x \in \mathfrak{C}(i)$，則 $v(x) = ※(x) + 1 - i$.

2.54. 設 $x = yz \in \mathfrak{C}(i)$，則

(i) $\quad v(y) \leqq ※(y) + 1 - i;$

(ii) $\quad v(z) \leqq ※(z).$

當 $i=0$ 時 2.53.54 即成爲 2.51.52，所以 2.51.52 是 2.53.54 的特殊情形。

---

① 2.51.52 有一個逆定理，我們稱之謂 2.52c:

2.52c. 設 x 適合以下四條件:

(1) $x \in \mathfrak{F}$;

(2) $v(x) = *(x) + 1$;

(3) 任何 y，任何 z，假如 $x = yz$，那末 $v(y) \leqq *(y)$;

(4) 任何 x_1，x_2，如果 $*_n x_1 x_2$ 在 x 中出現，而 x_1 與 x_2 像(1)，(2)，(3)中的 x 那樣適合這三條件，那末

(i) v_0 不在 x_1 中正常出現，

(ii) 任何 v_i，如果 v_i 在 x_1 中正常出現，那末 $i \leqq n-1$,

(iii) 任何 v_i，如果 v_i 在 x_2 中正常出現，那末 $i \leqq n$.

假如 x 適合以上四條件，那末 $x \in \mathfrak{C}(0)$.

這一個定理我們將不給以證明，因爲它與我們以後所要從事的沒有關係。 亞斯考夫斯基 (Jaskowski) 在 1931 年對於以 N 與 C 兩結合辭爲其僅有的結合辭的命題演算證明了一個與 2.51.52.52c 相似的比較簡單的定理（見[7]），後來斯樓德於1943年曾加以進一步的一般化，見[5]。

由 2.53.54 顯然我們有:

2.541. 設 $xy=p_1\cdots\cdots p_n$,則 $v(x)<\divideontimes(x)+n$.

2.542. 設 $p_1\cdots\cdots p_m=q_1\cdots\cdots q_n$,則 $p_i=q_i$, $i=1,\cdots\cdots,m=n$.

證: 施歸納於 m.

(1) 設 $m=1$, $p_1=q_1\cdots\cdots q_n$.

在這假定之下我們有

$$v(p_1)=\sum_{i=1}^{n}v(q_i)=n+\sum_{i=1}^{n}\divideontimes(q_i)=\divideontimes(p_1)+n=\divideontimes(p_1)+1,$$

所以 $n=1$.

(2) 設 $m=k$ 時 2.542 已經證明. 又設

$$p_1\cdots\cdots p_kp_{k+1}=q_1\cdots\cdots q_n.$$

令 $r_i=p_{i+1}$, $i=1,\cdots\cdots,k$;

那末 $p_1r_1\cdots\cdots r_k=q_1\cdots\cdots q_n$.

顯然其中 $n\neq1$. 假如 $p_1\neq q_1$, 可設 $p_1=q_1x$ 或 $p_1x=q_1$. 設 $p_1=q_1x$, 那末根據 2.541 我們有

$$v(q_1)<\divideontimes(q_1)+1,$$

可是這是與 $q_1\in\mathfrak{C}(0)$及 2.51 相矛盾的;同理不能 $p_1x=q_1$;所以必須 $p_1=q_1$. 根據 2.3 中的假定我們有

$$r_1\cdots\cdots r_k=q_2\cdots\cdots q_n,$$

因之,從歸納的前提我們有

$$r_i=q_{i+1},\qquad i=1,\cdots\cdots,k=n-1.$$

所以 $p_i=q_i$, $i=1,\cdots\cdots,k+1=n$.

2.543. 設 $yp\in\mathfrak{C}(n)$, 則 $y\,\tilde{\in}\,\bigcup_m\mathfrak{C}(m)$.

證 根據假定我們有

$$v(yp)=\divideontimes(yp)+1-n=\divideontimes(y)+\divideontimes(p)+1-n=\divideontimes(y)+v(p)-n,$$

$$v(y)=v(yp)-v(p)=\divideontimes(y)-n.$$

假如 $y\in\mathfrak{C}(m)$,

那末由 $v(y)=\divideontimes(y)+1-m$

即有 (1) $m=n+1$.

根據假定, y 的第一個字母是 $\divideontimes_n$, 而 $y\in\mathfrak{C}(m)$時 y 的第一個字母是 $\divideontimes_m$,所以有

$m=n$.

這與(1)矛盾,所以不能有 m, $y \in \mathfrak{C}(m)$,即

$$y \tilde{\in} \bigcup_m \mathfrak{C}(m).$$

2.544. 設 $x \in \mathfrak{W}$,則 $xy \tilde{\in} \mathfrak{W}$.

證: 在 $x \in \mathfrak{W}$ 的前提之下設 $xy \in \mathfrak{W}$. 在這假定之下

$$xy \tilde{\in} \mathfrak{A},$$

所以 $xy \in \bigcup_m \mathfrak{C}(m)-\{F\}$, 因之, x 的第一個字母是某一 $*_m$, x 又是一個字,因之可以設

$$x = *_m p_1 p_2,$$

而又可設 $\quad xy = *_m q_1 q_2,$

所以有一 z: $\quad p_1 p_2 z = q_1 q_2$.

這樣,根據 2.541 我們有

$$v(p_1p_2) < *(p_1p_2)+2,$$

可是這是與假定相矛盾的,因爲 p_1, p_2 既是命題,我們由2.51就有

$$v(p_1p_2)=v(p_1)+v(p_2)=*(p_1p_2)+2,$$

所以 $\quad xy \tilde{\in} \mathfrak{W}$.

到現在我們已到達關於字的下面的主要定理,根據 2.544 及其他定理很容易證明:

2.55. 設 (i) $x_1, \cdots\cdots, x_m, y_1, \cdots\cdots, y_n \in \mathfrak{W}$,

(ii) $x_1 \cdots\cdots x_m = y_1, \cdots\cdots, y_n$,

則 $\quad x_i = y_i, \qquad i=1, \cdots\cdots, m=n$.

證明與 2.542 類似,從略。

2.56. 對於任何 p, 恒有一唯一的序列 $x_1, \cdots\cdots, x_n \in \mathfrak{W}$,

而 $\quad p = x_1 \cdots\cdots x_n$.

證: (1) 設 $p \in \mathfrak{V}\mathfrak{C}\{t\}$,不必再證了,2.56 顯然是對的。

(2) 設有 $x \in \mathfrak{C}(n)$,

$$p_i = x_1^i \cdots\cdots x_{n_i}^i, \qquad i=1, \cdots\cdots, n;$$

而 $\quad x_1^i \cdots\cdots, x_{n_i}^i \in \mathfrak{W}, \qquad i=1, \cdots\cdots, n;$

$$p = xp_1 \cdots\cdots p_n = xx_1^1 \cdots\cdots x_{n_1}^1 \cdots\cdots x_1^n \cdots\cdots x_{n_n}^n.$$

那末,由 2.55, 2.56 亦已證明。 由(1)與(2)顯然 2.56 得以證明。

2.57. 由 2.55 我們可以與處理字母同樣的方法來處理字。

設 $\qquad x_1, \cdots\cdots, x_n \in \mathfrak{W}$,

而 x 是由 $x_1, \cdots\cdots, x_n$ 所組成的：

$$x = x_1 \cdots\cdots x_n.$$

那末，若把 x 再分解成字時，又必然得到 $x_1, \cdots\cdots, x_n$. 一個由字組成的公式我們有一種方法，而且只有一種方法將它分解成字。對於一個公式我們可以說它第幾個字母如何如何(見2.38)，現在，對於一個由字組成的公式 x，我們也可以說 x 中的第幾個字如何如何了。例如

$$x = \text{※}_2 v_1 F v_0 \text{※}_1 t v_1 \text{※}_2 v_1 \text{※}_1 t v_1 v_0 v_3 v_2 \text{※}_2 v_1 \text{※}_1 t v_1 v_0 v_1 v_2$$

它是由八個字組成的，如果這八個字順序地是 $x_1, \cdots\cdots, x_8$，那末

$$x_1 = \text{※}_2 v_1 F v_0,\ x_2 = \text{※}_1 t v_1,\ x_3 = x_6 = \text{※}_2 v_1 \text{※}_1 t v_1 v_0,\ x_4 = v_3,$$

$$x_5 = x_8 = v_2,\ x_7 = v_1.$$

再有，每一個命題 x 有以下兩個情形之一：

（1） $x \in \mathfrak{V} \cup \{t\}$,

（2） 有一個 $x_1 \in \mathfrak{C}(n)$，而 $x = x_1 p_1 \cdots\cdots p_n = x_1 y$.

當(2)時，根據 2.5 中的定理，若把 x 分解成字，x 中的第一個字即是 x_1，而把 y 分解成 $p_1, \cdots\cdots, p_n$ 又是只有一種方法(2.542)。我們因之可以說：x 若不是 t 也不是任何一個 v_i，那末 x 一定可以，而且只有一種方法把它分解成一個 n 項的結合辭及 n 個命題，如(2)那樣。上面例子中的 x 就是一個適合(2)的命題，它可以這樣被分解成結合辭(二項的)及命題：

$$x = x_1 p_1 p_2,\ x_1 = \text{※}_2 v_1 F v_0 \in \mathfrak{C}(2),$$

$$p_1 = \text{※}_1 t v_1 \text{※}_2 v_1 \text{※}_1 t v_1 v_0 v_3 v_2,$$

$$p_2 = \text{※}_2 v_1 \text{※}_1 t v_1 v_0 v_1 v_2.$$

由字組成的公式既有上述的性質，而我們的命題又是由字所組成的 (2.56)，所以，我們可以改造我們的 $\mathfrak{P}$ 的結構，以使每一個字都只是一個字母。這一件事容易做到，因為 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{W}$ 的基數都是 $\aleph_0$，我們只要於 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{W}$ 之間建立一個一一對應關係就成了。不過，我們不打算這樣做。

§3 置換對

3.1. **替入** 設 $p, q, p_1, \cdots\cdots, p_m$ 各命題及 $v_{i_1}, \cdots\cdots, v_{i_n}$ 各命題變辭適合以下

五條件:

(i) $v_{i_1},\cdots\cdots,v_{i_m}$ 各各不同;

(ii) $p=x_1\cdots\cdots x_n$, $x_1,\cdots\cdots,x_n\in\mathfrak{W}$;

(iii) $q=y_1\cdots\cdots y_n$;

(iv) 如果 $x_i=v_{i_k}$, 那末 $y_i=p_k$, $i=1\cdots\cdots,n$, $k\leqq m$;

(v) 如果 $x_i\,\tilde{\in}\,\{v_{i_1},\cdots\cdots,v_{i_m}\}$, 那末 $x_i=y_i$, $i=1,\cdots\cdots,n$;

那末我們即說 q **是一個以 $p_k(k=1,\cdots\cdots,m)$ 替入 p 中的 v_{i_k} 而得的命題**,以

$$\mathfrak{S}^{v_{i_1},\cdots\cdots,v_{i_m}}_{p_1,\cdots\cdots,p_m}\,p\,\Big|$$

表示這樣的 q.

3.11. **命題在命題中的正常出現** p 與 q 如果適合以下二條件之一即說 **p 在 q 中正常出現**:

(i) $p=q$;

(ii) 有一 v_i 在某一命題 r 中正常出現而 $q=\mathfrak{S}^{v_i}_{p}r\,|$.

設 p 在 q 中正常出現, p 在 q 中佔 q 的第 n 至 n+i 各字母,我們可以說: **p 在 q 中第 n 至 n+i 位上正常出現**;在這情形下, 第 n 至 n+i 位一定不在 q 中的某一個結合辭中。

3.2. **基本置換對** 設

$$x=\divideontimes_m pq\in\mathfrak{C}(m),$$

那末像下面那種由命題造成的對,稱爲**基本置換對**:

(i) $(xv_1\cdots\cdots v_{m-1}t,\ p)$,

(ii) $(xv_1\cdots\cdots v_{m-1}Fv_m,\ \mathfrak{S}^{v_0}_{xv_1\cdots\cdots v_m}q\,|)$.

(當 m=1 時(i)即是(xt,p)而(ii)即是$(xFv_1,\mathfrak{S}^{v_0}_{xv_1}q\,|)$了。)所有這種基本置換對造成的集合以 '$\mathfrak{R}_f$' 表示。

例: $(\divideontimes_1 tv_1t,t)$, $(\divideontimes_1 tv_1Fv_1,v_1)$, $(\divideontimes_2 t\divideontimes_1 tv_1v_0v_1t,t)$,

$(\divideontimes_2 t\divideontimes_1 tv_1v_0v_1Fv_2,\ \divideontimes_1 tv_1\divideontimes_2 t\divideontimes_1 tv_1v_0v_1v_2)\in\mathfrak{R}_f$.

例中第一、第三個對是有(i)形式的,而第二、第四是有(ii)形式的。(校註2.)

3.3. **命題對的直接置換手續** 以下我們將解釋什麼叫作一個**命題的對** (p,q) **是一個直接置換手續的結果**。

3.31. 設有命題 r_1,r_2,而命題對(p,q),(p_1q_1),(p_2,q_2)適合以下條件:

$$p_1=\mathfrak{S}^{v_i}_{p_2} r_1 |, \qquad p=\mathfrak{S}^{v_i}_{q_2} r_1 |,$$

$$q_1=\mathfrak{S}^{v_i}_{p_2} r_2 |, \qquad q=\mathfrak{S}^{v_i}_{q_2} r_2 |,$$

那末，即稱：(p,q)**是由**(p_1,q_1)**經**(p_2,q_2)**置換而得**。

3.311. 設

S: $(p_1,q_1),(p_2,q_2),\cdots\cdots,(p_n,q_n)$

是一個命題對的序列，$\mathfrak{X}$ 是一個命題對的集合，S 中的每一個對 $(p_m,q_m)(m\leqq n)$ 適合以下二條件之一：

(i) $(p_m,q_m)\in\mathfrak{X}$；

(ii) 有 m_1,m_2: $m_1<m, m_2<m$，而(p_m,q_m)是由(p_{m_1},q_{m_1})經(p_{m_2},q_{m_2})置換而得。

那末，我們說：

(1) S **是一個單純置換手續**；

(2) S **是一個從 $\mathfrak{X}$ 出發的單純置換手續**；

(3) (p_n,q_n)**是單純置換手續** S **的結果**，或簡稱 S **的結果**。

合起來我們可以說(p_n,q_n)**是一個從 $\mathfrak{X}$ 出發的單純置換手續** S **的結果**。

3.32. 設 v_i 在 p_1,q_1 二命題中，或在二命題之一中正常出現，而

$$(p,q)=(\mathfrak{S}^{v_i}_{r} p_1 |, \mathfrak{S}^{v_i}_{r} q_1 |).$$

那末稱(p,q)**由**(p_1,q_1)**經替入而得**，或更詳細地說，(p,q)**是由**(p_1,q_1)**經以** r **替入** v_i **而得**。

3.33. 設 $\mathfrak{X}$ 及(p,q)適合以下四條件：

(i) v_i 至少在 p,q二命題中的一個命題中正常出現，

校註2. 根據中國科學院編譯局的意見作補充解釋：除了 F 之外，每一個結合辭 x，即有3.2中的(i)(ii)那樣兩個基本置換對，這兩個基本置換對可以說是決定 x 的基本性質的；這與算術中的再現定義(recursive definition) 很相似。例中有兩個結合辭，我們可設它們是 X 與 Y：

$$X=*_1 t v_1$$
$$Y=*_2 t X v_0$$

那末 X 的兩個基本置換對是：

(1) (Xt,t),

(2) (XFv_1,v_1);

而 Y 的兩個是：

(3) $(Yv_1 t,t)$,

(4) $(Yv_1 Fv_2, XY v_1 v_2)$.

(1),(2),(3),(4)也就是例中的四個基本置換對。凡是基本置換對都是置換對(見3.5)；關於置換對的意義見4.3.

(ii) $(\mathfrak{S}_{l}^{v_i}p|, \mathfrak{S}_{l}^{v_i}q|) \in \mathfrak{X}$,

(iii) $(\mathfrak{S}_{Fv_i}^{v_i}p|, \mathfrak{S}_{Fv_i}^{v_i}q|)$是一個從 $\mathfrak{X} \cup \{(p,q)\}$出發的單純置換手續的結果；

那末，我們說：(p,q)**可以從 $\mathfrak{X}$ 經歸納置換手續而得到**。(校註3.)

3.34. **直接置換手續** 設 $\mathfrak{X}$，(p,q)適合以下三條件之一：

(i) 有(p_1,q_1)，$(p_2,q_2) \in \mathfrak{X}$ 而(p,q) 是由(p_1,q_1)經(p_2,q_2) 置換而得；

(ii) 有$(p_1,q_1) \in \mathfrak{X}$，(p,q)是由$(p_1,q_1)$經替入而得；

(iii) (p,q)可以從 $\mathfrak{X}$ 經歸納置換手續而得；

那末我們說：(p,q)**是從 $\mathfrak{X}$ 經直接置換手續而得的**。

3.4. **置換手續**. 設 $\mathfrak{X}$ 是命題對的集合，S 是由 m 個命題對

$$(p_1,q_1)\cdots\cdots,(p_m,q_m)$$

所造成的序列，S 中的任何一個$(p_n,q_n)$$(n \leqq m)$都適合以下兩個條件之一：

(i) $(p_n,q_n) \in \mathfrak{X}$；

(ii) (p_n,q_n)可以從$\{(p_1,q_1),\cdots\cdots,(p_{n-1},q_{n-1})\}$ 經直接置換手續而得的 (其中 $n > 1$)；

那末我們說

(1) **S 是一個從 $\mathfrak{X}$ 出發的置換手續**，

(2) (p_m,q_m)**是這個從 $\mathfrak{X}$ 出發的置換手續的結果**。

3.5. **置換對** 一個從 $\mathfrak{R}_f$(基本置換對，見3.2.)出發的置換手續的結果，稱爲一個**置換對**。以 '$\mathfrak{R}$' 表示所有置換對造成的集合。

由置換對的定義，顯然有以下的3.51.52.53.

3.51. $\mathfrak{R}_f \subseteq \mathfrak{R}$.

3.52. 從 $\mathfrak{R}$ 出發的置換手續的結果都屬於 $\mathfrak{R}$.

3.53. 設 $\mathfrak{Y}$ 適合以下二條件：

(i) $\mathfrak{R}_f \subseteq \mathfrak{Y}$；

(ii) 從 $\mathfrak{Y}$ 出發的置換手續的結果都屬於 $\mathfrak{Y}$；

那末， $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{Y}$.

校註3. 根據中國科學院編譯局的意見作補充解釋：歸納置換手續與算術中的完全歸納法很相似，可參看 5.3的例子。

§4. **$\mathfrak{P}$ 中的定理** **$\mathfrak{P}$ 中的定理**(或更清楚些：**$\mathfrak{P}$ 中的定理集合**)是一個命題的集合 $\mathfrak{T}\subseteq\mathfrak{C}(0)$;這裏的 '**定理**' 不可與我們在文章中所證明的定理相混(例如 2.55 是一個關於字 $\mathfrak{W}$ 的定理)。 我們在文章中所證明的定理是我們用中文寫出的眞的話(或命題),即是所謂 **語法定理**,而 $\mathfrak{P}$ 中的 **定理** 乃是一些 $\mathfrak{F}$ 中的分子,乃是我們研究的對象。

要決定一個演算中的 **定理**,通常,要決定:(一)什麽叫作它的 **公理**;(二)什麽叫作 **從某某命題可以推理出某某命題來**,也就是說要舉出它的 **推理規則**。 有了公理與推理規則,我們即說,能從公理推出的是定理。 $\mathfrak{P}$ 的公理與推理規則都很簡單,公理只有一個,推理規則只有一條。 我們作

$$\vdash p =_{df} p \in \mathfrak{T}.$$

4.1. **$\mathfrak{P}$ 的公理**: t ($\vdash t$, t是唯一的公理.)

4.2. **$\mathfrak{P}$ 的推理規則**: 如果 $\vdash q$, $(p, q)\in\mathfrak{R}$, 則 $\vdash p$.

由 4.1.2 我們可以說:

4.21 $\mathfrak{T}$ 包含於任何一個適合以下二條件的 $\mathfrak{X}$ 中,同時,它本身也是一個適合這兩條件的 $\mathfrak{X}$:

(i) $t\in\mathfrak{X}$;

(ii) 如 $q\in\mathfrak{X}$, $(p, q)\in\mathfrak{R}$, 則 $p\in\mathfrak{X}$.

4.3. **關於 '$(p, q)\in\mathfrak{R}$' 與 '$\vdash p$' 的解釋** '$(p,q)\in\mathfrak{R}$' 表示 p 與 q 的眞僞值相同。 在數學裏,當 '……的必要與充分條件是——' 是一個眞的命題的時候,'……' 與 '——' 的眞僞值相同,換言之,它們是同眞或同僞的;其中 '……' 與 '——' 是任何兩個命題。 在 $\mathfrak{P}$ 中,$(p, q)\in\mathfrak{R}$,即是說,p 與 q 的眞僞值相同。 $\vdash p$ 即是說 p 是眞的。 4.1 說: t 是眞的; 4.2 說: 如果 q 是眞的,p 與 q 的眞僞值相同,那末 p 也是眞的。 在 $\mathfrak{P}$ 中的 '必要與充分條件' 是一個有

$$E = ※_2 rs$$

形式的結合辭,E 將於本文的續篇中定義,定義出之後,我們將證明: $\vdash Epq$ 的必要與充分條件是 $(p, q)\in\mathfrak{R}$.

§5. **關於 $\mathfrak{R}$ 的基本定理** 這裏所謂 **定理** 也是所謂 **語法定理**。 以下各定理的證明極其容易,大部份僅作簡略的說明;它們都是很有用的。

5.1. **規約** 我們以

$$p(x_1, \cdots\cdots, x_n), q(x_1, \cdots\cdots, x_n), \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(或在 'p', 'q', …… 等號下加添數如 'p_1', 'q_1', ……等) 表示任何命題，其中 x_1, ……, x_n 是相異的命題變辭，然它們單獨在文中出現時無意義。 如於文中講到某一 p，現在設 p 是

$$p(x_1, \cdots\cdots, x_n),$$

則即以 (1) $p(p_1, \cdots\cdots, p_n)$

表示 $\mathfrak{S}^{x_1, \cdots\cdots, x_n}_{p_1, \cdots\cdots, p_n} p \mid.$

由這假定，當 x_1, ……, x_n 各命題變辭都不在 p 中正常出現時，那末(1) 即與 p 無異。

5.101. $\mathfrak{S}^{x_1, \cdots\cdots, x_n}_{y_1, \cdots\cdots, y_n}(p, q) =_{df} (\mathfrak{S}^{x_1, \cdots\cdots, x_n}_{y_1, \cdots\cdots, y_n} p \mid, \mathfrak{S}^{x_1, \cdots\cdots, x_n}_{y_1, \cdots\cdots, y_n} q \mid)$

5.11. 設 x_1, ……, x_n 是 n 個相異的命題變辭，

$$p = p(x_1, \cdots\cdots, x_n),$$

$$q = q(x_1, \cdots\cdots, x_n),$$

又 $(p, q) \in \mathfrak{R}$,

那末 $(p(r_1, \cdots\cdots, r_n), q(r_1, \cdots\cdots, r_n)) \in \mathfrak{R}.$

證: 設 y_1, ……, y_n 是 n 個相異的，不在任何一個 $r_m(m=1, \cdots\cdots, n)$，也不在 p，不在 q 中正常出現的命題變辭。 令

$$(p_1, q_1) =_{df} \mathfrak{S}^{x_1}_{y_1}(p, q), \cdots\cdots, (p_n, q_n) =_{df} \mathfrak{S}^{x_n}_{y_n}(p_{n-1}, q_{n-1}),$$

$$(p_{n+1}, q_{n+1}) =_{df} \mathfrak{S}^{y_1}_{r_1}(p_n, q_n), \cdots\cdots, (p_{2n}, q_{2n}) =_{df} \mathfrak{S}^{y_n}_{r_n}(p_{2n-1}, q_{2n-1}).$$

根據假設，顯然

$$(p, q), (p_1, q_1), \cdots\cdots, (p_{2n}, q_{2n})$$

是一個從 $\mathfrak{R}$ 出發的置換手續，而它的結果 (p_{2n}, q_{2n}) 又有

$$(p_{2n}, q_{2n}) = \mathfrak{S}^{x_1, \cdots\cdots, x_n}_{r_1, \cdots\cdots, r_n}(p, q)$$
$$= (p(r_1, \cdots\cdots, r_n), q(r_1, \cdots\cdots, r_n)).$$

所以 $(p(r_1, \cdots\cdots, r_n), q(r_1, \cdots\cdots, r_n)) \in \mathfrak{R}.$

5.12. 設 $p = p(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}),$

$$q = q(x_1, \cdots\cdots, x_{n+1}),$$

又設 v_0 不在 p 中正常出現，任何在 p 中正常出現的 v_i, $i \leqq n-1$, 任何在 q 中正常

出現的 v_i，$i \leqq n$；那末，有一 $X \in \mathfrak{C}(n)$，對於任何 p_1，……，p_n 恒有

$$(Xp_1 \cdots\cdots p_{n-1} t,\ p(p_1,\ \cdots\cdots,\ p_{n-1})),$$

$$(Xp_1 \cdots\cdots p_{n-1} Fp_n,\ q(Xp_1 \cdots\cdots p_n,\ p_1,\ \cdots\cdots,\ p_n)) \in \mathfrak{R}.$$

證：設 $X = *_n p(v_1,\ \cdots\cdots,\ v_{n-1})\, q(v_0,\ v_1,\ \cdots\cdots,\ v_n)$，

那末，顯然，由 5.11，X 是適合要求的。

在這定理中的 $n=1$ 時，那末 p 中即沒有正常出現的命題變辭，q 中至多只能有 v_0 正常出現，結論中的兩個命題對即成爲 $(Xt,\ p)$ 與 $(XFp_1,\ q(Xp_1,\ p_1))$.

5.13. 設 $p = p(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，又設 v_0 不在 p 中正常出現，任何在 p 中正常出現的 v_i 恒有 $i \leqq n$，那末有一 $X \in \mathfrak{C}(n)$ 對於任何 p_1，……，p_n 恒有

$$(Xp_1 \cdots\cdots p_n,\ p(p_1,\ \cdots\cdots,\ p_n)) \in \mathfrak{R}.$$

證：$X = *_n p(v_1,\ \cdots\cdots,\ v_{n-1},\ t)\, p(v_1,\ \cdots\cdots,\ v_{n-1},\ Fv_n)$.

以上的 5.12.13 **保證了**我們能够構造(因之也就是能够定義)所要的，如定理中所表示的那種命題結合辭。

5.21. $(p,\ p) \in \mathfrak{R}$.

證：設 $X = *_2 v_1 v_1$.

由 5.12 我們有 $(Xpt,\ p) \in \mathfrak{R}$.

Xpt 在 Xpt 中是正常出現（見 3.11）的，$(p,\ p)$ 是由 $(Xpt,\ p)$ 經 $(Xpt,\ p)$ 置換而得，所以

$$(p,\ p) \in \mathfrak{R}.$$

這一個定理可以解釋作 p 與 p 的眞僞值相同，是 $\mathfrak{P}$ 中的一種同一律，這是一個語法的定理。$\mathfrak{P}$ 系統中的同一律是

$$\vdash Epp$$

我們還沒有證明，'E' 也還未定義。

5.22. 設 $(p,\ q) \in \mathfrak{R}$，則 $(q,\ p) \in \mathfrak{R}$.

證：$(q,\ p)$ 可以由 $(p,\ p)$ 經 $(p,\ q)$ 置換而得。

5.23. 設 $(p,\ q)$，$(q,\ r) \in \mathfrak{R}$，則 $(p,\ r) \in \mathfrak{R}$.

證：$(p,\ r)$ 可以由 $(p,\ q)$ 經 $(q,\ r)$ 置換而得。

5.3. **關於置換對的證明舉例與規約** 於本文續篇中將作定義

$$\oplus =_{df} *_2 v_1 F v_0.$$

我們可以證明 $x = (\oplus\oplus v_1 v_2 v_3,\ \oplus v_1 \oplus v_2 v_3) \in \mathfrak{R}$.

要證明 $x \in \mathfrak{R}$，須舉出一個置換手續，並且要是一個以 x 爲結果的置換手續；下面就是這樣一個置換手續。我們知道，一個置換手續是一個命題對的序列，其中每一個命題對 (p, q) 或是一基本置換對，或是可以從它前面的經直接置換手續而得；這是一個置換手續形成的原則。爲了使我們淸楚看出一個置換手續，如何形成，我們把它寫作一定的形式如下:

〔證〕

(1)	$(\oplus v_1 t, v_1)$	$\mathfrak{Rt}$
(2)	$(\oplus\oplus v_1 v_2 t, \oplus v_1 v_2)$	(1)
(3)	$(\oplus v_2 t, v_2)$	(1)
(4)	(v_2, v_2)	(3)(3)
(5)	$(\oplus v_2 t, \oplus v_2 t)$	(4)
(6)	$(v_2, \oplus v_2 t)$	(5)(3)
(7)	$(\oplus\oplus v_1 v_2 t, \oplus\oplus v_1 v_2 t)$	(4)
(8)	$(\oplus v_1 v_2, \oplus\oplus v_1 v_2 t)$	(7)(2)
(9)	$(\oplus v_1 \oplus v_2 t, \oplus\oplus v_1 v_2 t)$	(8)(6)
(10)	$(\oplus v_1 \oplus v_2 t, \oplus v_1 \oplus v_2 t)$	(4)
(11)	$(\oplus\oplus v_1 v_2 t, \oplus v_1 \oplus v_2 t)$	(10)(9)
(12)	$(\oplus v_1 F v_2, F \oplus v_1 v_2)$	$\mathfrak{Rt}$
(13)	$(\oplus v_1 F v_3, F \oplus v_1 v_3)$	(12)
(14)	$(\oplus\oplus v_1 v_2 F v_3, F \oplus\oplus v_1 v_2 v_3)$	(13)
(15)	$(\oplus\oplus v_1 v_2 F v_3, \oplus\oplus v_1 v_2 F v_3)$	(4)
(16)	$(F \oplus\oplus v_1 v_2 v_3, \oplus\oplus v_1 v_2 F v_3)$	(15)(14)
(17)	$(F \oplus v_1 \oplus v_2 v_3, F \oplus v_1 \oplus v_2 v_3)$	(4)
(18)	$(\oplus v_1 F \oplus v_2 v_3, F \oplus v_1 \oplus v_2 v_3)$	(12)
(19)	$(\oplus v_1 F \oplus v_2 v_3, \oplus v_1 F \oplus v_2 v_3)$	(4)
(20)	$(F \oplus v_1 \oplus v_2 v_3, \oplus v_1 F \oplus v_2 v_3)$	(19)(18)
(21)	$(\oplus v_2 F v_3, F \oplus v_2 v_3)$	(13)
(22)	$(\oplus v_2 F v_3, \oplus v_2 F v_3)$	(4)
(23)	$(F \oplus v_2 v_3, \oplus v_2 F v_3)$	(22)(21)
(24)	$(\oplus v_1 \oplus v_2 F v_3, \oplus v_1 \oplus v_2 F v_3)$	(4)

(25)	$(\oplus\oplus v_1v_2v_3,\ \oplus v_1\oplus v_2v_3)$	
(26)	$(F\oplus v_1\oplus v_2v_3, \oplus\oplus v_1v_2Fv_3)$	(16) (25)
(27)	$(\oplus\oplus v_1v_2Fv_3,\ F\oplus v_1\oplus v_2v_3)$	(17) (26)
(28)	$(\oplus v_1F\oplus v_2v_3,\ \oplus\oplus v_1v_2Fv_3)$	(26) (20)
(29)	$(\oplus\oplus v_1v_2Fv_3,\ \oplus v_1F\oplus v_2v_3)$	(19) (28)
(30)	$(\oplus v_1\oplus v_2Fv_3,\ \oplus\oplus v_1v_2Fv_3)$	(28) (23)
(31)	$(\oplus\oplus v_1v_2Fv_3,\ \oplus v_1\oplus v_2Fv_3)$	(24) (30)
(32)	$(\oplus\oplus v_1v_2v_3,\ \oplus v_1\oplus v_2v_3)$	(11) (25) (31)

以上的

S: (1), (2), (3),…………, (24), (32)

即是一個置換手續，x 是它的結果。 其中 (1) 是一個基本置換對，(2) 是由 (1) 經以$\oplus v_1v_2$替入 v_1 而得（見 3.32) 的，(3) 也是由 (1) 經替入而得，(4) 是由 (3) 經 (3) 置換而得，(5) 是由 (4) 經替入而得，(6) 是由 (5) 經 (3) 置換而得，……以此類推，一直到 (24) 都是這樣，或是一基本置換對，或是從前面的經替入而得，或是從前面的經置換而得，而

(25), (26),…………, (31)

是一個從 {(1), ……, (25)} 出發的單純置換手續，這一單純置換手續保證了(32)的能從

(1), (2), …………, (24)

經歸納置換手續而得。 由此可見，S 即是一個置換手續，而 x 正是它的結果。

以上是一個置換對的證明的實例。

我們於證明一個置換對時用不到把那個置換手續完全寫出來，由於 5.11.21.22我們可以作初步的省略，像上面的證明，經過從新按排之後可以簡作：

(1)	$(\oplus\oplus v_1v_2t,\ \oplus v_1v_2)$	$\mathfrak{Rr}$
(2)	$(v_2,\ \oplus v_2t)$	$\mathfrak{Rr}$
(3)	$(\oplus\oplus v_1v_2t,\ \oplus v_1\oplus v_2t)$	(1) (2)
(4)	$(\oplus\oplus v_1v_2Fv_3,\ F\oplus\oplus v_1v_2v_3)$	$\mathfrak{Rr}$
(5)	$(F\oplus v_1\oplus v_2v_3,\ \oplus v_1F\oplus v_2v_3)$	$\mathfrak{Rr}$
(6)	$(F\oplus v_2v_3,\ \oplus v_2Fv_3)$	$\mathfrak{R}$

(7)	$(\oplus\oplus v_1v_2v_3,\ \oplus v_1\oplus v_2v_3)$	
(8)	$(\oplus\oplus v_1v_2Fv_3,\ F\oplus v_1\oplus v_2v_3)$	(4)(7)
(9)	$(\oplus\oplus v_1v_2Fv_3,\ \oplus v_1F\oplus v_2v_3)$	(7)(5)
(10)	$(\oplus\oplus v_1v_2Fv_3,\ \oplus v_1\oplus v_2Fv_3)$	(9)(6)
(11)	$(\oplus\oplus v_1v_2v_3,\ \oplus v_1\oplus v_2Fv_3)$	(3)(7)(10)

以上(1) (2) (3) (4) (5) (6)各對不是基本置換對，可是它們是從基本置換對經替入或由 (p, q) 轉換成 (q, p) 而得的，我們即註之以 '$\mathfrak{R}$'. 其他各步如何省略，讀者可以從與原來的證明的對照中看出。

參 考 文 獻

[1] Бочвар, Д. А., 1939: Об одном трехзначном исчислений и его применений к анализу парадоксов классического расширенного функчинального исчисления. Математический сборник, **4**, 287-308.

[2] ——————, 1943: К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления. 同上, **12**, (54), 353-369.

[3] Hoo, Tzu-Hua, 1949: m-valued sub-system of (m+n)-valued propositional calculus. The journal of symbolic logic, **14**, 177-181.

[4] Hermes, Hans, 1938: Semiotik. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, No. 5, S. Hirzel, Leipzig.

[5] Schröter, Karl, 1943: Axiomatisierung der Fregeschen Aussagenkalküle. 同上, No. 8.

[6] ——————, 1941: Ein allgemeiner Kalkülbegriff. 同上, No. 6.

[7] Lukasiewick, Jan, 1932: Ein vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls. c. r. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III, **24**, 153-183.

[8] ——————, and Tarski, Alfred, 1930: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. 同上, **23**, 1-21.

[9] Rosser, J. B., and Turquette, A. R., 1945: Axiom schemes for m-valued propositional calculi. The journal of symbolic logic, **10**, 61-82.