中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 1 期: 37 ∼ 52
SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综 述

若干平面微分系统的中心等时性

献给张芷芬教授 90 华诞

王朝霞[1], 陈兴武[2], 张伟年[2*]

1. 电子科技大学数学科学学院, 成都 611731;
2. 四川大学数学学院, 成都 610064
E-mail: wzx_0909@163.com, scuxchen@163.com, matzwn@163.com

收稿日期: 2016-06-12; 接受日期: 2016-09-13; 网络出版日期: 2016-09-28; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11501083, 11471228, 11231001 和 11221101) 资助项目

摘要 平面微分系统的中心等时性是中心平衡点附近周期轨族局部临界周期问题的极端情形, 关系到平衡点附近周期振荡是否同步. 如同判断平衡点是否是中心一样, 判断中心是否等时也是十分困难的. 本文介绍齐次系统、可反系统和 Hamilton 系统等关于等时中心的一些结果和判定方法.

关键词 平面向量场 中心 等时性 解析线性化 横截交换

MSC (2010) 主题分类 34A25, 34C25

1 引言

考虑平面解析系统

$$\dot{x} = -y + P(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = x + Q(x, y, \lambda), \tag{1.1}$$

其中 $P(x, y, \lambda) = O(x^2 + y^2)$, $P(x, y, \lambda) = O(x^2 + y^2)$. 它具有平衡点 O: $(0, 0)$. 如果 O 的某个邻域内全部都是周期轨, 那么 O 称为中心. 因为系统 (1.1) 的线性部分以 O 为一个中心, 有时我们也称 (1.1) 为线性中心型系统. 如果我们把 x 正半轴作为极坐标轴, 那么中心 O 附近的任意一个周期轨和极坐标轴交于唯一一点, 记为 $(r, 0)$. 因此, O 附近的周期轨的周期值函数可以表示为 $T(r, \lambda)$, $r \in J$, 其中 J 是一个极坐标轴上包含原点的一个开区间. O 称为是等时中心 (isochronous center), 如果 O 是中心而且周期值函数 $T(\cdot, \lambda)$ 是常值函数, 即围绕中心的周期轨具有相同周期, 它们在物理上呈同步振荡 (synchronous oscillation).

从 16 世纪 Galileo (1564–1642) 考虑单摆问题起, 人们就开始研究等时中心. 当时的所谓 “单摆问题” 是在长时间航海中遇到时钟发条松弛下时钟越摆越快的现象. 为了保持时钟的准确性, 1673 年, Huygens (1629–1695) 利用摆线规律设计了世界上第一个等时摆时钟, 其摆弧 s 随时间 t 的变化满足以下微分方程:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0,$$

英文引用格式: Wang Z X, Chen X W, Zhang W N. Isochronicity of centers in some planar differential systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 37–52, doi: 10.1360/N012016-00111

其中 $\omega > 0$ 是一个常数. 该方程具有通解 $s(t) = C_1\omega^2(\cos(\omega t + C_2))$, 它们对任意常数 C_1 和 C_2 来说都具有同样的周期 $2\pi/\omega$. 比该方程稍一般的形式为

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g(s) = 0. \tag{1.2}$$

当 g 满足 $g(0) = 0$ 和 $g'(0) > 0$ 时, (1.2) 在原点也具有中心. 然而, 如何判断方程 (1.2) 的中心是否等时, 则需要深入研究.

自 1964 年 Loud [1] 研究二次系统的等时中心问题以来, 平面微分系统的等时中心问题越来越受到关注. 尤其是多项式代数理论及算法的发展, 极大地推动了多项式微分系统等时中心的研究. 本文将围绕平面多项式微分系统, 包括齐次系统、类齐次系统、可反系统、Hamilton 系统、Liénard 系统、Kukles 系统和 Kolmogrov 系统等, 介绍等时中心问题的若干结果和方法.

2 齐次系统

如果 $P(x, y, \lambda)$ 和 $Q(x, y, \lambda)$ 是齐 n 次多项式, 即满足

$$P(\xi x, \xi y, \lambda) = \xi^n P(x, y, \lambda), \quad Q(\xi x, \xi y, \lambda) = \xi^n Q(x, y, \lambda), \quad \forall\, x, y, \xi \in \mathbb{R},$$

则称系统 (1.1) 为具有齐 n 次非线性项的线性中心型系统, 简称齐 n 次系统. 该系统可一般地表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + P(x, y, \lambda) = -y + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i,j} x^{n-i} y^i, \\ \dot{y} &= x + Q(x, y, \lambda) = x + \sum_{i=0}^{n} b_{n-i,j} x^{n-i} y^i, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\lambda = (a_{n,0}, a_{n-1,1}, \ldots, a_{0,n}, b_{n,0}, b_{n-1,1}, \ldots, b_{0,n})$.

关于齐次系统最早的等时性结果是 1964 年 Loud [1] (或参见文献 [2, 定理 4.1]) 对 $n = 2$ 给出的: 系统 (2.1) 是等时的, 当且仅当它可通过一个线性变换 $X = ax - by$, $Y = bx + ay$ 或 $X = ax + by$, $Y = bx - ay$, $\tau = -t$ ($a, b \in \mathbb{R}$ 且不全为 0) 化为以下形式之一:

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \dot{X} = -Y + X^2 - Y^2, \quad \dot{Y} = X + 2XY; \\ &\text{(ii) } \dot{X} = -Y + X^2, \quad \dot{Y} = X + XY; \\ &\text{(iii) } \dot{X} = -Y - \frac{4}{3}X^2, \quad \dot{Y} = X - \frac{16}{3}XY; \\ &\text{(iv) } \dot{X} = -Y + \frac{16}{3}X^2 - \frac{4}{3}Y^2, \quad \dot{Y} = X + \frac{8}{3}XY. \end{aligned} \tag{2.2}$$

当 $n = 2$ 时, $X = ax - by$, $Y = bx + ay$ 将系统 (2.1) 化为

$$\dot{X} = -Y + \tilde{a}_{20}X^2 + \tilde{a}_{11}XY + \tilde{a}_{02}Y^2, \quad \dot{Y} = X + \tilde{b}_{20}X^2 + \tilde{b}_{11}XY + \tilde{b}_{02}Y^2, \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{20} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(a^3a_{20} - a^2ba_{11} + ab^2a_{02} - a^2bb_{20} + ab^2b_{11} - b^3b_{02}), \\ \tilde{a}_{11} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(2a^2ba_{20} + (a^3 - ab^2)a_{11} - 2a^2ba_{02} - 2ab^2b_{20} + (b^3 - a^2b)b_{11} + 2ab^2b_{02}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{02} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(ab^2a_{20}+a^2ba_{11}+a^3a_{02}-b^3b_{20}-ab^2b_{11}-a^2bb_{02}),\\
\tilde{b}_{20} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(a^2ba_{20}-ab^2a_{11}+b^3a_{02}+a^3b_{20}-a^2bb_{11}+ab^2b_{02}),\\
\tilde{b}_{11} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(2ab^2a_{20}+(a^2b-b^3)a_{11}-2ab^2a_{02}+2a^2bb_{20}+(a^3-ab^2)b_{11}-2a^2bb_{02}),\\
\tilde{b}_{02} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(b^3a_{20}+ab^2a_{11}+a^2ba_{02}+ab^2b_{20}+a^2bb_{11}+a^3b_{02}).
\end{aligned}
$$

因为

$$\tilde{b}_{20}+\tilde{b}_{02}=(a^2+b^2)((b_{20}+b_{02})a+(a_{20}+a_{02})b), \tag{2.4}$$

所以容易找到不全为 0 的唯一一组 (a,b) 使得 $\tilde{b}_{20}+\tilde{b}_{02}=0$ 且 $\sum_{i+j=2}\tilde{a}_{i,j}+\sum_{i+j=2}\tilde{b}_{i,j}=0$ 或 1 成立. 同样, 在 $X=ax+by$, $Y=bx-ay$, $\tau=-t$ 下也可以找到不全为 0 的唯一一组 (a,b). 因此, 我们不妨设 $n=2$ 时 (2.1) 中系数满足 $b_{20}+b_{02}=0$ 且 $\sum_{i+j=2}a_{i,j}+\sum_{i+j=2}b_{i,j}=0$ 或 1. 在此前提下, 我们将 Loud 的结果表达成以下关于系数的代数结果.

定理 2.1 当 $n=2$, $b_{20}+b_{02}=0$ 且 $\sum_{i+j=2}a_{i,j}+\sum_{i+j=2}b_{i,j}=0$ 时, 系统 (2.1) 在原点处具有等时中心当且仅当 (2.1) 是线性系统. 当 $n=2$, $b_{20}+b_{02}=0$ 且 $\sum_{i+j=2}a_{i,j}+\sum_{i+j=2}b_{i,j}=1$ 时, 系统 (2.1) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(H_1^2) $a_{20}-1/2=a_{11}=a_{02}+1/2=b_{20}=b_{11}-1=b_{02}=0$;

(H_2^2) $a_{20}-1/2=a_{11}=a_{02}=b_{20}=b_{11}-1/2=b_{02}=0$;

(H_3^2) $a_{20}=a_{11}-1/5=a_{02}=b_{20}=b_{11}-4/5=b_{02}=0$;

(H_4^2) $a_{20}-4/5=a_{11}=a_{02}+1/5=b_{20}=b_{11}-2/5=b_{02}=0$.

证明 首先证明必要性. 假设当 $n=2$ 时系统 (2.1) 在原点处具有等时中心, 根据 Loud 的结果 (或文献 [2, 定理 4.1]), 存在一个线性变换 $X=ax-by$, $Y=bx+ay$ 或 $X=ax+by$, $Y=bx-ay$, $\tau=-t$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 且不全为 0, 使得系统 (2.1) 被化为 (2.2) 中的一个. 由于 $X=ax-by$, $Y=bx+ay$ 将系统 (2.1) 化为 (2.3), 则 (i)–(iv) 四种形式分别要求下列等式组中的一组成立:

$$
\text{(I)}:\begin{cases}\tilde{a}_{20}=1,\\ \tilde{a}_{11}=0,\\ \tilde{a}_{02}=-1,\\ \tilde{b}_{20}=0,\\ \tilde{b}_{11}=2,\\ \tilde{b}_{02}=0,\end{cases}\quad
\text{(II)}:\begin{cases}\tilde{a}_{20}=1,\\ \tilde{a}_{11}=0,\\ \tilde{a}_{02}=0,\\ \tilde{b}_{20}=0,\\ \tilde{b}_{11}=1,\\ \tilde{b}_{02}=0,\end{cases}\quad
\text{(III)}:\begin{cases}\tilde{a}_{20}=-\dfrac{4}{3},\\ \tilde{a}_{11}=0,\\ \tilde{a}_{02}=0,\\ \tilde{b}_{20}=0,\\ \tilde{b}_{11}=-\dfrac{16}{3},\\ \tilde{b}_{02}=0,\end{cases}\quad
\text{(IV)}:\begin{cases}\tilde{a}_{20}=\dfrac{16}{3},\\ \tilde{a}_{11}=0,\\ \tilde{a}_{02}=-\dfrac{4}{3},\\ \tilde{b}_{20}=0,\\ \tilde{b}_{11}=\dfrac{8}{3},\\ \tilde{b}_{02}=0.\end{cases}
$$

注意到 (2.2) 中四个系统都满足 $\tilde{b}_{20}+\tilde{b}_{02}=0$. 根据前提条件 $b_{20}+b_{02}=0$ 和 (2.4), 可得 $b=0$. 若 $\sum_{i+j=2}a_{i,j}+\sum_{i+j=2}b_{i,j}=0$, 则从 (I)–(IV) 中可解出 $a_{20},a_{11},a_{02},b_{20},b_{11},b_{02}$ 全为 0. 若 $\sum_{i+j=2}a_{i,j}+\sum_{i+j=2}b_{i,j}=1$, 则 (I)–(IV) 的解就是条件 ($\mathrm{H}_1^2$)–($\mathrm{H}_4^2$). 另一方面, $X=ax+by$, $Y=bx-ay$, $\tau=-t$ 将系统 (2.1) 化为

$$\dot{X}=-Y+\hat{a}_{20}X^2+\hat{a}_{11}XY+\hat{a}_{02}Y^2,\quad \dot{Y}=X+\hat{b}_{20}X^2+\hat{b}_{11}XY+\hat{b}_{02}Y^2,$$

其中

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_{20} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(-a^3a_{20} - a^2ba_{11} - ab^2a_{02} - a^2bb_{20} - ab^2b_{11} - b^3b_{02}),\\
\hat{a}_{11} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(-2a^2ba_{20} + (a^3-ab^2)a_{11} + 2a^2ba_{02} - 2ab^2b_{20} - (b^3-a^2b)b_{11} + 2ab^2b_{02}),\\
\hat{a}_{02} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(-ab^2a_{20} + a^2ba_{11} - a^3a_{02} - b^3b_{20} + ab^2b_{11} - a^2bb_{02}),\\
\hat{b}_{20} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(-a^2ba_{20} - ab^2a_{11} - b^3a_{02} + a^3b_{20} + a^2bb_{11} + ab^2b_{02}),\\
\hat{b}_{11} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(-2ab^2a_{20} + (a^2b-b^3)a_{11} + 2ab^2a_{02} + 2a^2bb_{20} - (a^3-ab^2)b_{11} - 2a^2bb_{02}),\\
\hat{b}_{02} &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(-b^3a_{20} + ab^2a_{11} - a^2ba_{02} + ab^2b_{20} - a^2bb_{11} + a^3b_{02}).
\end{aligned}
$$

则 (i)–(iv) 四种形式要求 $\hat{a}_{i,j}$ 和 $\hat{b}_{i,j}$ $(i+j=2)$ 满足与 (I)–(IV) 一样的等式组. 因此, 当 $\sum_{i+j=2} a_{i,j} + \sum_{i+j=2} b_{i,j} = 0$ 时, 从 (I)–(IV) 中解出的 $a_{20}, a_{11}, a_{02}, b_{20}, b_{11}, b_{02}$ 全为 0. 当 $\sum_{i+j=2} a_{i,j} + \sum_{i+j=2} b_{i,j} = 1$ 时, (I)–(IV) 的解就是条件 (H_1^2)–(H_4^2).

反过来, 如果 (H_1^2)–(H_4^2) 之一成立, 则利用线性变换 $X = ax, Y = ay$ (分别取 $a = 1/2, 1/2, -3/20, 3/20$) 可以将满足 (H_1^2)–(H_4^2) 的系统 (2.1) 分别化为 (2.2) 的四种形式 (i)–(iv). 证毕. □

当 $n=3$ 时, Pleshkan [3] (或参见文献 [2, 定理 4.3]) 在 1969 年也给出等时中心判据. 如同 $n=2$ 时的处理方式, 不妨设 $a_{30} - b_{03} = 0$ 且 $\sum_{i+j=3} a_{i,j} + \sum_{i+j=3} b_{i,j} = 0$ 或 1. 在此前提下系数的代数条件如下.

定理 2.2 当 $n=3$, $a_{30} - b_{03} = 0$ 且 $\sum_{i+j=3} a_{i,j} + \sum_{i+j=3} b_{i,j} = 0$ 时, 系统 (2.1) 在原点处具有等时中心当且仅当 (2.1) 是线性系统. 当 $n=3$, $a_{30} - b_{03} = 0$ 且 $\sum_{i+j=3} a_{i,j} + \sum_{i+j=3} b_{i,j} = 1$ 时, 系统 (2.1) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(H_1^3) $a_{30} = a_{21} - 3/4 = a_{12} = a_{03} + 1/4 = b_{30} + 1/4 = b_{21} - 3 = b_{12} - 3/4 = b_{03} = 0$;

(H_2^3) $a_{30} = a_{21} - 1/2 = a_{12} = a_{03} = b_{30} = b_{21} = b_{12} - 1/2 = b_{03} = 0$;

(H_3^3) $a_{30} = a_{21} - 3/10 = a_{12} = a_{03} = b_{30} + 1/5 = b_{21} = b_{12} - 9/10 = b_{03} = 0$;

(H_4^3) $a_{30} = a_{21} - 9/10 = a_{12} = a_{03} + 1/5 = b_{30} = b_{21} = b_{12} - 3/10 = b_{03} = 0$.

1999 年, Chavarriga 等 [4, 定理 1] 对 $n=4$ 的情形给出了 7 个必要条件, 但仅证明了其中 6 个是充分的. 如同 $n=2$ 时的处理方式, 不妨设 $3b_{40} + b_{22} + 3b_{04} = 0$ 且 $\sum_{i+j=4} a_{i,j} + \sum_{i+j=4} b_{i,j} = 0$ 或 1. 我们可以将他们的条件用系统的原始参数表达如下.

定理 2.3 当 $n=4$, $3b_{40} + b_{22} + 3b_{04} = 0$ 且 $\sum_{i+j=4} a_{i,j} + \sum_{i+j=4} b_{i,j} = 0$ 时, 系统 (2.1) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(H_{11}^4) $a_{40} - b_{31} = a_{31} = a_{22} + b_{31} = a_{13} = a_{04} = b_{40} = b_{22} = b_{13} + b_{31} = b_{04} = 0$;

(H_{25}^4) $a_{40} + a_{04} = a_{31} = a_{22} + 4a_{04} = a_{13} = b_{40} = b_{31} - 4a_{04} = b_{22} = b_{13} = b_{04} = 0$.

当 $n=4$, $3b_{40} + b_{22} + 3b_{04} = 0$ 且 $\sum_{i+j=4} a_{i,j} + \sum_{i+j=4} b_{i,j} = 1$ 时, 系统 (2.1) 在原点处具有等时中心, 则下面条件之一被满足:

(H_{21}^4) $a_{40} - b_{31} = a_{31} = a_{22} + b_{31} - 1/2 = a_{13} = a_{04} = b_{40} = b_{22} = b_{13} + b_{31} - 1/2 = b_{04} = 0$;

(H_{22}^4) $a_{40} - 1/10 = a_{31} = a_{22} - 1 = a_{13} = a_{04} + 3/10 = b_{40} = b_{31} + 1/2 = b_{22} = b_{13} - 7/10 = b_{04} = 0$;

(H_{23}^4) $a_{40} - 2/5 = a_{31} = a_{22} - 7/10 = a_{13} = a_{04} + 3/10 = b_{40} = b_{31} + 1/5 = b_{22} = b_{13} - 2/5 = b_{04} = 0$;

(H_{24}^4) $a_{40} - 1/10 = a_{31} = a_{22} + 1/2 = a_{13} = a_{04} = b_{40} = b_{31} - 1 = b_{22} = b_{13} - 2/5 = b_{04} = 0$;

(H_{25}^4) $a_{40}+a_{04}-1/2=a_{31}=a_{22}-4a_{04}+5/2=a_{13}=b_{40}=b_{31}+4a_{04}-2=b_{22}=b_{13}-1=b_{04}=0$;

(H_{26}^4) $a_{40}=a_{31}=a_{22}=a_{13}=a_{04}=b_{40}=b_{31}-1/2=b_{22}=b_{13}-1/2=b_{04}=0$;

(H_{27}^4) $a_{40}-(5k-9)^2/(4(25k^2+30k+2313))=a_{31}=a_{22}+5(k+3)(5k-201)/(2(25k^2+30k+2313))$ $=a_{13}=a_{04}+75(k+3)^2/(4(25k^2+30k+2313))=b_{40}=b_{31}-(5k-81)(5k-9)/(25k^2+30k+2313)$ $=b_{22}=b_{13}-25(k+3)^2/(25k^2+30k+2313)=b_{04}=0$,

其中 (H_{27}^4) 中的 k 是某个实数. 反之, 当系统 (2.1) 满足 (H_{21}^4)–(H_{26}^4) 之一时, 原点是一个等时中心.

定理 2.3 中 7 个条件的必要性是由计算等时常数给出的, 而充分性的证明要用到解析线性化及寻找横截交换系统的方法.

证明 由文献 [2] 可知, 系统 (2.1) 的原点是等时中心, 则存在解析近似恒同变换

$$U=x+O(x^2+y^2),\quad V=y+O(x^2+y^2) \tag{2.5}$$

使得系统 (2.1) 被化为线性系统

$$\dot{U}=-V,\quad \dot{V}=U. \tag{2.6}$$

作变换 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$, $n=4$ 时系统 (2.1) 可化为极坐标形式

$$\dot{r}=R(r,\theta):=\sum_{i=2}^{4}P_i(\theta)r^i,\quad \dot{\theta}=\Theta(r,\theta):=\sum_{i=1}^{4}Q_i(\theta)r^{i-1}.$$

将 (2.5) 的第一个等式写成极坐标的形式 $U=S(r,\theta)$, 则

$$S(r,\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}S_i(\theta)r^i,$$

其中 $S_1(\theta)=\cos\theta$, $S_i(\theta)$ $(i=2,3,\dots)$ 是 i 次齐次三角多项式. 另一方面, 由 (2.6) 可得 $\ddot{S}+S=0$. 把上述 $S(r,\theta)$ 的级数形式代入该方程并比较 r 的同次幂系数, 可得递归微分方程组

$$S_\ell''+S_\ell+\sum_{\substack{k=1\\ i+j+k=\ell+2}}^{\ell-1}\left\{Q_iQ_jS_k''+((j+2k-1)P_iQ_j+Q_iQ_j')S_k'+k\left(P_i'Q_j+\frac{(k+\ell)P_iP_j}{2}\right)S_k\right\}$$
$$=\begin{cases}\alpha_\ell\cos\theta+\beta_\ell\sin\theta, & \text{若 } \ell \text{ 是奇数},\\ 0, & \text{若 } \ell \text{ 是偶数},\end{cases}$$

其中 $\ell=2,3,\dots$, 符号 $''$ 和 $'$ 分别指对 θ 求二阶和一阶偏导. 故 $n=4$ 时系统 (2.1) 的原点是等时中心, 仅当所有的等时常数 α_ℓ 和 β_ℓ 都为 0. 计算 $\alpha_3,\alpha_5,\dots,\alpha_{25}$ 的公共零点表明, 当 $3b_{40}+b_{22}+3b_{04}=0$ 且 $\sum_{i+j=4}a_{i,j}+\sum_{i+j=4}b_{i,j}=0$ 时, 可得 (H_{11}^4) 或 (H_{12}^4). 当 $3b_{40}+b_{22}+3b_{04}=0$ 且 $\sum_{i+j=4}a_{i,j}+\sum_{i+j=4}b_{i,j}=1$ 时, 必有 (H_{21}^4)–(H_{27}^4) 条件之一成立.

下面证明充分性. 假设系统 (2.1) 满足 (H_{11}^4) 或 (H_{12}^4), 则系统 (2.1) 可化为下面形式中的 (i) 或者 (v). 假设系统 (2.1) 满足 (H_{21}^4)–(H_{26}^4) 之一. 经过线性变换 $X=ax$, $Y=ay$ (分别取 $a=1/(2a_{40}+2a_{22}),-9/40,-9/40,9/40,1/2(a_{40}+a_{04}),1/8$), 系统 (2.1) 可分别化为下列形式之一:

(i) $\dot{X}=-Y+a_{40}X^4+a_{22}X^2Y^2$, $\dot{Y}=X+a_{40}X^3Y+a_{22}XY^3$;

(ii) $\dot{X}=-Y-\frac{4}{9}X^4-\frac{40}{9}X^2Y^2+\frac{4}{3}Y^4$, $\dot{Y}=X+\frac{20}{9}X^3Y-\frac{28}{9}XY^3$;

(iii) $\dot{X}=-Y-\frac{16}{9}X^4-\frac{28}{9}X^2Y^2+\frac{4}{3}Y^4$, $\dot{Y}=X+\frac{8}{9}X^3Y-\frac{16}{9}XY^3$;

(iv) $\dot{X}=-Y+\frac{4}{9}X^4-\frac{20}{9}X^2Y^2$, $\dot{Y}=X+\frac{40}{9}X^3Y+\frac{16}{9}XY^3$;

(v) $\dot{X}=-Y+a_{40}X^4-(5a_{40}+a_{04})X^2Y^2+a_{04}Y^4$, $\dot{Y}=X+4a_{40}X^3Y+2(a_{40}+a_{04})XY^3$;

(vi) $\dot{X}=-Y$, $\dot{Y}=X+4X^3y+4XY^3$.

因为存在近似恒同变换

$$U=\frac{X}{(1+3a_{40}X^2Y+(2a_{22}+a_{40})Y^3)^{1/3}},\quad V=\frac{Y}{(1+3a_{40}X^2Y+(2a_{22}+a_{40})Y^3)^{1/3}}$$

把系统 (i) 化为线性系统 $\dot{U}=-V$, $\dot{V}=U$, 因此系统 (i) 的原点是等时中心. 对于系统 (ii), 用 $K_1(X,Y)$ 和 $K_2(X,Y)$ 分别表示其方程的右端函数. 考虑系统

$$\dot{X}=L_1(X,Y):=\frac{X(3-16Y^3)(W(X,Y)^{1/6}+\frac{64(X^2+Y^2)}{3}\int\frac{XdX}{W(X,Y)^{5/6}})}{W(X,Y)^{1/6}},$$
$$\dot{Y}=L_2(X,Y):=\frac{Y(3+12X^2Y-4Y^3)(W(X,Y)^{1/6}+\frac{64(X^2+Y^2)}{3}\int\frac{XdX}{W(X,Y)^{5/6}})}{W(X,Y)^{1/6}},$$

其中 $W(X,Y)=9+24X^2Y-24Y^3+16X^4Y^2+32X^2Y^4+16Y^6$. 容易验证

$$\left(K_1\frac{\partial L_1}{\partial X}-L_1\frac{\partial K_1}{\partial X}\right)+\left(K_2\frac{\partial L_1}{\partial Y}-L_2\frac{\partial K_1}{\partial Y}\right)\equiv 0,\quad \left(K_1\frac{\partial L_2}{\partial X}-L_1\frac{\partial K_2}{\partial X}\right)+\left(K_2\frac{\partial L_2}{\partial Y}-L_2\frac{\partial K_2}{\partial Y}\right)\equiv 0$$

且 $L_1K_2-L_2K_1\neq 0$.

这表明系统 (ii) 在原点处有与其横截交换的系统 (transversal commuting system [5,6]). 根据文献 [6, 定理 4.5], 系统 (ii) 的原点是等时中心. 同理, 系统 (iii) 和 (iv) 的原点都是等时中心, 因为它们在原点处分别有如下横截交换系统:

$$\begin{cases}\dot{X}=X(3-8X^2Y-8Y^3)(3-8X^2Y-16Y^3),\\ \dot{Y}=Y(3-8X^2Y-8Y^3)(3+4X^2Y-4Y^3),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{X}=X(3+8X^2Y)(9+24X^2Y+24Y^3+32X^6+64X^4Y^2+32X^2Y^4),\\ \dot{Y}=(3Y+12X^4-4X^2Y^2)(9+24X^2Y+24Y^3+32X^6+64X^4Y^2+32X^2Y^4).\end{cases}$$

系统 (v) 在极坐标 $(X,Y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 下的方程为

$$\dot{r}=r^4P(\theta),\quad \dot{\theta}=1+r^3Q(\theta),$$

其中

$$P(\theta)=\frac{3a_{40}+a_{04}}{4}\cos 3\theta+\frac{a_{40}-a_{04}}{4}\cos\theta,\quad Q(\theta)=\frac{3a_{40}+a_{04}}{4}\sin 3\theta+\frac{a_{40}-a_{04}}{4}\sin\theta.$$

可以找到其首次积分

$$H(r,\theta)=\frac{r^2}{(1+2Q(\theta)r^3)^{1/3}}.$$

对任意常数 C, 从 $H(r,\theta)=C^{1/3}$ 可以得到 $r^3=(Q(\theta)\pm\sqrt{Q(\theta)^4+C})/C$. 据此可以计算系统 (v) 的周期值函数

$$T(r)=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+r^3Q(\theta)}=\int_0^{2\pi}\left(1\mp\frac{Q(\theta)}{\sqrt{Q(\theta)^2+C}}\right)d\theta\equiv 2\pi.$$

系统 (vi) 在极坐标 $(X,Y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 下的方程为

$$\dot{r}=r^4(-\cos 3\theta+\cos\theta),\quad \dot{\theta}=1+r^3(\sin 3\theta+\sin\theta).$$

易证其解为

$$3\theta+4r^3\cos^3\theta=3t+C,$$

其中 C 是任意常数. 把 t 看作 r 和 θ 的函数, 则

$$t(2\pi)-t(0)=\left(2\pi+\frac{4}{3}r(2\pi)-\frac{C}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}r(0)-\frac{C}{3}\right)=2\pi.$$

故系统 (vi) 在原点是等时中心. 证毕. □

2000 年, Chavarriga 等 [7, 定理 9] 对 $n=5$ 的情形给出了 9 个必要条件, 并证明了其中 7 个是充分的. Romanovski 等[8] 在 2007 年证明剩下的 2 个必要条件也是充分的. 如同 $n=2$ 的处理方式, 不妨设 $a_{50}-b_{05}=0$ 且 $\sum_{i+j=4}a_{i,j}+\sum_{i+j=4}b_{i,j}=0$ 或 1. 我们可以将他们的条件用系统的原始参数表达如下.

定理 2.4 当 $n=5$, $a_{50}-b_{05}=0$ 且 $\sum_{i+j=4}a_{i,j}+\sum_{i+j=4}b_{i,j}=0$ 时, 系统 (2.1) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(H^5_{11}) $a_{50}=a_{41}-b_{32}=a_{32}=a_{23}+b_{32}=a_{14}=a_{05}=b_{50}=b_{41}+b_{32}=b_{23}=b_{14}=b_{05}=0$;

(H^5_{12}) $a_{50}=a_{41}-5k=a_{32}=a_{23}+10k=a_{14}=a_{05}-k=b_{50}+k=b_{41}=b_{32}-10k=b_{23}=b_{14}+5k=b_{05}=0$,

其中 (H^5_{12}) 中的 k 是某个实数. 当 $n=5$, $a_{50}-b_{05}=0$ 且 $\sum_{i+j=4}a_{i,j}+\sum_{i+j=4}b_{i,j}=1$ 时, 系统 (2.1) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(H^5_{21}) $a_{50}=a_{41}-b_{32}=a_{32}=a_{23}+b_{32}-1/2=a_{14}=a_{05}=b_{50}=b_{41}=b_{23}=b_{14}+b_{32}-1/2=b_{05}=0$;

(H^5_{22}) $a_{50}=a_{41}-1/4=a_{32}=a_{23}+3/20=a_{14}=a_{05}=b_{50}+1/5=b_{41}=b_{32}-13/20=b_{23}=b_{14}-9/20=b_{05}=0$;

(H^5_{23}) $a_{50}+1/8=a_{41}-5k=a_{32}-5/4=a_{23}+10k=a_{14}+5/8=a_{05}-k=b_{50}+k=b_{41}+5/8=b_{32}-10k=b_{23}-5/4=b_{14}+5k=b_{05}+1/8=0$;

(H^5_{24}) $a_{50}=a_{41}-1/2=a_{32}=a_{23}-1/4=a_{14}=a_{05}+1/4=b_{50}+1/4=b_{41}=b_{32}-1/4=b_{23}=b_{14}-1/2=b_{05}=0$;

(H^5_{25}) $a_{50}=a_{41}-5/26=a_{32}=a_{23}=a_{14}=a_{05}=b_{50}+2/13=b_{41}=b_{32}-25/26=b_{23}=b_{14}=b_{05}=0$;

(H^5_{26}) $a_{50}=a_{41}=a_{32}=a_{23}-25/26=a_{14}=a_{05}+2/13=b_{50}=b_{41}=b_{32}=b_{23}=b_{14}-5/26=b_{05}=0$;

(H^5_{27}) $a_{50}=a_{41}-1/8=a_{32}=a_{23}+1/8=a_{14}=a_{05}=b_{50}+1/4=b_{41}=b_{32}-1=b_{23}=b_{14}-1/4=b_{05}=0$;

(H^5_{28}) $a_{50}=a_{41}-2=a_{32}=a_{23}+3/2=a_{14}=a_{05}=b_{50}=b_{41}=b_{32}+4=b_{23}=b_{14}-9/2=b_{05}=0$;

(H^5_{29}) $a_{50}=a_{41}-9/2=a_{32}=a_{23}+4=a_{14}=a_{05}=b_{50}=b_{41}=b_{32}+3/2=b_{23}=b_{14}-2=b_{05}=0$,

其中 (H^5_{23}) 的 k 是某个实数.

值得一提的是, Romanovski 等[8] 对条件 (H^5_{29}) 充分性的证明采用了与 Chavarriga 等不同的方法, 不是给出与满足条件 (H^5_{29}) 的系统在原点处横截交换系统的具体形式, 而是证明了其横截交换系统的存在性.

(H^5_{29}) 充分性的证明 满足 (H^5_{29}) 的系统 (2.1) 经过线性变换

$$X=\frac{ax+by}{a^2+b^2},\quad Y=\frac{-bx+ay}{a^2+b^2}$$

可化为

$$\dot{x}=-y+12x^4y-\frac{32}{3}x^2y^3,\quad \dot{y}=x-4x^3y^2+\frac{16}{3}xy^4. \tag{2.7}$$

考虑系统 (2.7) 如下形式的横截交换系统:

$$\dot{x}=x+16x^3y^2L(x,y),\quad \dot{y}=y-\frac{16}{3}x^2y^3L(x,y),$$

其中

$$L(x,y)=1+\sum_{k=1}^{\infty}f_{2k}(y)x^{2k},\quad f_2(y)=-\frac{16}{3}y^2,\quad f_4(y)=\frac{64}{3}y^4-\frac{20}{3}$$

且 $f_{2k}(y)$ 对 $k\geqslant 3$ 是 y 的多项式. 利用横截交换性,

$$(3y-36x^4y+32x^2y^3)L_x(x,y)-(3x-12x^3y^2+16xy^4)L_y(x,y)+(48x^3y+32xy^3)L(x,y)=0.$$

从而得到 f_{2k} 的递推方程

$$6(k+1)yf_{2k+2}(y)+32(2k+1)y^3f_{2k}(y)-(16y^4+3)f'_{2k}(y)+24(5-3k)yf_{2k-2}(y)+12y^2f'_{2k-2}(y)=0.$$

易知 f_{2k+2} 对 $k\geqslant 2$ 是 y 的多项式且可由这个递推方程解出. 根据文献 [6, 定理 4.5], (2.7) 的原点是等时中心. 证毕. □

20 世纪 90 年代起, 人们也关注齐 n 次复平面微分系统的广义等时中心问题, 即通过 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=x-\mathrm{i}y$ 变换后的复系统

$$\dot{z}=z+\sum_{i=0}^{n}\alpha_{n-i,j}z^{n-i}w^i,\quad \dot{w}=-w-\sum_{i=0}^{n}\beta_{n-i,j}w^{n-i}z^i \tag{2.8}$$

能否被一个解析近似恒同变换线性化. 一个有代表性的工作是 1991 年林怡平和李继彬[9] 关于三次复系统的研究. 他们给出了下面的结果.

定理 2.5 [9] 当 $n=3$ 时, 系统 (2.8) 在原点处具有广义等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(H_1^{3C}) $\alpha_{21}=\beta_{21}=\alpha_{30}=\beta_{12}=\beta_{03}=3\beta_{30}-\alpha_{12}=0$;

(H_2^{3C}) $\alpha_{21}=\beta_{21}=\beta_{30}=\alpha_{12}=\beta_{03}=3\alpha_{30}-\beta_{12}=0$;

(H_3^{3C}) $\alpha_{21}=\beta_{21}=\alpha_{12}=\beta_{12}=\alpha_{03}=\beta_{03}=0$;

(H_4^{3C}) $\alpha_{21}=\beta_{21}=\alpha_{03}=\beta_{03}=\alpha_{30}+\beta_{12}=\beta_{30}+\alpha_{12}=0$;

(H_5^{3C}) $\alpha_{21}=\beta_{21}=3\alpha_{30}+7\beta_{12}=3\beta_{30}+7\alpha_{12}=16\alpha_{12}\beta_{12}-9\alpha_{03}\beta_{03}=\alpha_{30}^2\alpha_{03}-\beta_{30}^2\beta_{03}=\alpha_{30}\beta_{12}\alpha_{03}-\beta_{30}\alpha_{12}\beta_{03}=\beta_{12}^2\alpha_{03}-\alpha_{12}^2\beta_{03}=0$;

(H_6^{3C}) $\alpha_{21}=\beta_{21}=\alpha_{30}=\beta_{12}=\beta_{03}=\beta_{30}+3\alpha_{12}=0$;

(H_7^{3C}) $\alpha_{21}=\beta_{21}=\beta_{30}=\alpha_{12}=\alpha_{03}=\alpha_{30}+3\beta_{12}=0$;

(H_8^{3C}) $\alpha_{21}=\beta_{21}=\alpha_{30}=\beta_{12}=\alpha_{03}=\beta_{30}+3\alpha_{12}=0$;

(H_9^{3C}) $\alpha_{21}=\beta_{21}=\beta_{30}=\alpha_{12}=\beta_{03}=\alpha_{30}+3\beta_{12}=0$.

3 类齐次系统

如果 $P(x,y,\lambda)$ 和 $Q(x,y,\lambda)$ 是齐 n 次多项式与一个因子 $(x^2+y^2)^d$ 的乘积, 则称系统 (1.1) 为类齐 n 次系统. 该系统可一般地表示为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + (x^2+y^2)^d X_n(x,y,\lambda) = -y + (x^2+y^2)^d \sum_{i=0}^{n} A_{n-i,j} x^{n-i} y^i,\\ \dot{y} &= x + (x^2+y^2)^d Y_n(x,y,\lambda) = x + (x^2+y^2)^d \sum_{i=0}^{n} B_{n-i,j} x^{n-i} y^i,\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $d \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda = (d, A_{n,0}, A_{n-1,1}, \dots, A_{0,n}, B_{n,0}, B_{n-1,1}, \dots, B_{0,n})$.

关于类齐 2 次系统, Liu 和 Li [10] 考虑了 $d \neq \frac{1}{2}$ 时系统 (3.1) 在原点有等时中心的条件. 他们通过变换 $\tilde{x} = x(x^2+y^2)^{\frac{d-1}{3}}$, $\tilde{y} = y(x^2+y^2)^{\frac{d-1}{3}}$ 将系统 (3.1) 化为 (仍用 x 和 y 表示)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \frac{1}{3}\{((2d+1)x^2+3y^2)X_2(x,y) + 2(d-1)xyY_2(x,y)\},\\ \dot{y} &= x + \frac{1}{3}\{((2d+1)y^2+3x^2)Y_2(x,y) + 2(d-1)xyX_2(x,y)\},\end{aligned}\tag{3.2}$$

进而证明了以下结果.

定理 3.1 [10]　系统 (3.2) 在原点是中心当且仅当 $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{7} S_i$, 其中

$$\begin{aligned}
&S_1 = \{\lambda \mid A_{11} + 2B_{02} = 2A_{20} + B_{11} = 0\},\\
&S_2 = \{\lambda \mid d = A_{02} + A_{20} = B_{02} + B_{20} = 0\},\\
&S_3 = \{\lambda \mid d = A_{11} - 5B_{20} - 3B_{02} = 3A_{20} + 5A_{02} - B_{11} = (A_{02} + A_{20}) = A_{20}^2 + B_{02}B_{20} + 2B_{20}^2\},\\
&S_4 = \{\lambda \mid d = A_{11} - 5B_{20} - 3B_{02} = 3A_{20} + 5A_{02} - B_{11} = (B_{02} + B_{20}) = 2A_{02}^2 + A_{02}A_{20} - B_{20}^2\},\\
&S_5 = \{\lambda \mid A_{20} = A_{02} = B_{11}\},\\
&S_6 = \{\lambda \mid 2A_{20} + \sqrt{3}B_{20} - B_{11} + \sqrt{3}B_{02} = 3A_{11} - 3B_{20} + 2\sqrt{3}B_{11} + 3B_{02} = 2A_{02} + \sqrt{3}B_{20}\\
&\qquad + B_{11} + \sqrt{3}B_{02}\},\\
&S_7 = \{\lambda \mid 2A_{20} - \sqrt{3}B_{20} - B_{11} - \sqrt{3}B_{02} = 3A_{11} - 3B_{20} - 2\sqrt{3}B_{11} + 3B_{02} = 2A_{02} - \sqrt{3}B_{20}\\
&\qquad + B_{11} - \sqrt{3}B_{02}\}.
\end{aligned}$$

进一步, 当 $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{5} S_i$ 时, 系统 (3.2) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(H_1^{2L}) $d - 2 = 2A_{20} + B_{11} = A_{11} + 2B_{02} = 0$;

(H_2^{2L}) $d = A_{20} + A_{02} = A_{11} - 2B_{02} = B_{20} + B_{02} = B_{11} + 2A_{02} = 0$;

(H_3^{2L}) $A_{20} = A_{11} - B_{02} = A_{02} = B_{20} = B_{11} = 0$;

(H_4^{2L}) $A_{20} = A_{02} = 2(d+1)B_{20} + (2d+1)A_{11} = B_{11} = 2(d+1)B_{02} - A_{11} = 0$;

(H_5^{2L}) $d - 1 = A_{20} = A_{02} = B_{20} = B_{11} = B_{02} = 0$;

(H_6^{2L}) $d + 1 = A_{20} = A_{11} - 3B_{20} = A_{02} = B_{20} - B_{02} = B_{11} = 0$;

(H_7^{2L}) $d = A_{20} = A_{11} - 4B_{02} = A_{02} = B_{20} = B_{11} = 0$;

(H_8^{2L}) $d = A_{20} = A_{11} + 2B_{02} = A_{02} = B_{20} + 4B_{02} = B_{11} = 0$.

由于当 $\lambda \in S_6 \cup S_7$ 时系统通过一个旋转变换可写成与 $\lambda \in S_5$ 相同的形式, 因此, 定理 3.1 也给出了 $\lambda \in S_6 \cup S_7$ 时的等时中心条件.

Liu 和 Huang [11] 给出了 $n = 3$ 且 $d = -2$ 时类齐次系统 (3.1) 在无穷远平衡点的等时中心条件. 他们通过变换

$$\tilde{x} = x(x^2+y^2)^{-3}, \quad \tilde{y} = y(x^2+y^2)^{-3}$$

把系统 (3.1) 的无穷远平衡点化成如下系统的原点 (仍用 x 和 y 表示):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \left\{\left(y^2 - \frac{x^2}{5}\right)X_3(x,y) - \frac{6}{5}xyY_3(x,y)\right\}(x^2+y^2)^3,\\ \dot{y} &= x + \left\{\left(x^2 - \frac{y^2}{5}\right)Y_3(x,y) - \frac{6}{5}xyX_3(x,y)\right\}(x^2+y^2)^3.\end{aligned} \tag{3.3}$$

将他们用复化后的参数给出的结果写成关于系统 (3.3) 的参数的形式, 可以得到如下定理.

定理 3.2 [11]　系统 (3.3) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(H_1^{3L}) $A_{30}+B_{03}=A_{21}-B_{12}=A_{12}-B_{03}=A_{03}=B_{30}=B_{21}+B_{03}=0$;

(H_2^{3L}) $A_{30}+B_{03}=A_{21}=A_{12}+B_{03}=A_{03}=B_{30}=B_{21}-B_{03}=B_{12}=0$.

Chen 等[12] 研究了具有下面形式的类齐 4 次系统:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + (x^2+y^2)^d(A_{40}x^4 + A_{22}x^2y^2 + A_{04}y^4),\\ \dot{y} &= x + (x^2+y^2)^d(B_{31}x^3y + B_{13}xy^3),\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $d \geqslant 0$, 并给出如下充分条件.

定理 3.3 [12]　当 $2A_{04}-2A_{40}-B_{13}-B_{31}\neq 0$ 时, 如果下面条件之一被满足:

(H_1^{4L}) $A_{04}-A_{22}+A_{40}+B_{13}-B_{31}=2A_{04}-2A_{40}+B_{13}+B_{31}=(d+1)(2A_{04}-2A_{40}-B_{13}-B_{31})-(d+2)(3A_{04}+A_{22}+3A_{40})=0$;

(H_2^{4L}) $A_{04}-A_{22}+A_{40}+B_{13}-B_{31}=2A_{04}-2A_{40}+B_{13}+B_{31}=5A_{04}+A_{22}+A_{40}-B_{13}-B_{31}=0$;

(H_3^{4L}) $d=A_{04}-A_{22}+A_{40}+B_{13}-B_{31}=3A_{04}+A_{22}+3A_{40}=A_{04}-A_{40}=0$;

(H_4^{4L}) $d=1931A_{04}+1069A_{22}-4069A_{40}-2569B_{13}-431B_{31}=3578A_{04}-3578A_{40}+349B_{13}+349B_{31}=9067A_{04}+2138A_{22}+3752A_{40}-1331B_{13}-1331B_{31}=0$,

则系统 (3.4) 的原点是等时中心.

4　可反系统

按文献 [13] 定义, 系统 (1.1) 称为是可反的、可逆的或可翻转的 (reversible), 如果 (1.1) 的轨道关于过原点的某一条直线对称. 按文献 [14, 第 88 页] 或 [13, 第 81 页] 的定义, 系统 (1.1) 的轨道关于 y 轴对称是指向量场满足

$$P(-x,y)\equiv P(x,y),\quad Q(-x,y)\equiv -Q(x,y).$$

文献 [15] 也将可反系统称为时间可反系统 (time-reversible system). 可反系统描述了一类重要的具有时空对称性的运动. 一个基本事实是, 平面可反系统的原点一定是中心.

2010 年, Chen 和 Romanovski [16] 研究了三次可反系统, 并指出这类系统可化为以下形式:

$$\dot{x} = -y + a_1xy + a_2x^2y + a_3y^3,\quad \dot{y} = x + b_1x^2 + b_2y^2 + b_3x^3 + b_4xy^2, \tag{4.1}$$

其中系数有三种可能的情形: $a_3=a_2-b_3+b_4\pm 8$ 或者 $a_3=a_2-b_3+b_4$. 他们对这三种情形分别给出了原点是等时中心的充分必要条件, 其系数的代数条件可以如下表述.

定理 4.1 [16]　当 $a_3=a_2-b_3+b_4$ 时, 系统 (4.1) 在原点处具有等时中心当且仅当

(R_1^3) $a_1+14/15=a_2-16/175=b_1-16/15=b_2+46/15=b_3-64/175=b_4-48/175=0$.

定理 4.2 [16] 当 $a_3=a_2-b_3+b_4-8$ 时, 系统 (4.1) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(R_{21}^3) $a_1b_1+2b_1^2-2=a_2-2=a_3+2=b_1b_2+b_1^2-2=b_3=b_4-4=0$;

(R_{22}^3) $a_1+2b_1=a_2-3=a_3+1=b_1+b_2=b_3+1=b_4-3=0$;

(R_{23}^3) $a_1-b_2=a_2-4=a_3=b_1=b_3=b_4-4=0$;

(R_{24}^3) $a_1+2b_1=a_2-4=a_3=b_1+b_2=b_3=b_4-4=0$;

(R_{25}^3) $12a_1-9b_2+\sqrt{3}k=a_2-8/3=a_3=24b_1+3b_2+\sqrt{3}k=b_3=b_4-16/3=0$;

(R_{26}^3) $2a_1-5b_2\pm 3\sqrt{32+b_2^2}=a_2=a_3+8=b_1=b_3=b_4=0$;

(R_{27}^3) $a_1-2b_1-b_2=14a_2-4b_1^2-b_1b_2-24=a_3=7b_3-8b_1^2-2b_1b_2+8=14b_4-12b_1^2-3b_1b_2-72=120b_1+32b_2-92b_1^3-55b_1^2b_2-8b_1b_2^2=0$,

其中 $k=\pm\sqrt{128+3b_1^2}$.

定理 4.3 [16] 当 $a_3=a_2-b_3+b_4+8$ 时, 系统 (4.1) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(R_{31}^3) $a_1b_1+2b_1^2+2=a_2+2=a_3-2=b_1b_2+b_1^2+2=b_3=b_4+4=0$;

(R_{32}^3) $a_1\pm 3\sqrt{2}=a_2+4=a_3=b_1\mp 2\sqrt{2}=b_2\pm\sqrt{2}=b_3-4=b_4=0$;

(R_{33}^3) $a_1+2b_1=a_2+3=a_3-1=b_1+b_2=b_3-1=b_4+3=0$;

(R_{34}^3) $a_1-b_2=a_2+4=a_3=b_1=b_3=b_4+4=0$;

(R_{35}^3) $a_1+2b_1=a_2+4=a_3=b_1+b_2=b_3=b_4+4=0$;

(R_{36}^3) $a_1\pm 6\sqrt{2}=a_2+16=a_3=b_1=b_2=b_3=b_4-8=0$;

(R_{37}^3) $a_1\pm 2\sqrt{2}=a_2=a_3=b_1\mp 4\sqrt{2}=b_2\pm 4\sqrt{2}=b_3-8=b_4=0$;

(R_{38}^3) $a_1\pm 2\sqrt{6}=a_2=a_3=b_1\mp 2\sqrt{6}=b_2\pm 6\sqrt{6}=b_3-8=b_4=0$;

(R_{39}^3) $a_1\pm 2\sqrt{6}=a_2=a_3=b_1\mp 2\sqrt{6}=b_2\pm 3\sqrt{6}/2=b_3-8=b_4=0$;

(R_{310}^3) $12a_1-9b_2+\sqrt{3}k=a_2+8/3=a_3=24b_1+3b_2+\sqrt{3}k=b_3=b_4+16/3=0$;

(R_{311}^3) $2a_1+5b_2\pm 3\sqrt{32+b_2^2}=a_2=a_3+8=b_1=b_3=b_4=0$;

(R_{312}^3) $a_1-2b_1-b_2=14a_2-4b_1^2-b_1b_2+24=a_3=7b_3-8b_1^2-2b_1b_2-8=14b_4-12b_1^2-3b_1b_2+72=120b_1+32b_2+92b_1^3+55b_1^2b_2+8b_1b_2^2=0$,

其中 $k=\pm\sqrt{3b_1^2-128}$.

2008 年, Chen 等[17] 研究了齐四次可反系统的等时中心. 他们通过坐标旋转把系统化成如下形式:

$$\dot{x}=-y+\alpha_1x^4+\alpha_2x^2y^2+\alpha_3y^4,\quad \dot{y}=x+\beta_1x^3y+\beta_2xy^3, \tag{4.2}$$

其中系数有两个可能的情形: $\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+\beta_1-\beta_2$ 或者 $\alpha_3=16-\alpha_1+\alpha_2+\beta_1-\beta_2$.

定理 4.4 [17] 当 $\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+\beta_1-\beta_2$ 时, 系统 (4.2) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(R_{11}^4) $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1-\beta_2=0$;

(R_{12}^4) $\alpha_1-\beta_2=4\alpha_2-7\beta_2=2\beta_1+\beta_2=0$;

(R_{13}^4) $4\alpha_1-\beta_2=4\alpha_2+5\beta_2=2\beta_1-5\beta_1=0$;

(R_{14}^4) $7\alpha_1-\beta_2=7\alpha_2-10\beta_2=7\beta_1+5\beta_2=0$;

(R_{15}^4) $\alpha_2-\beta_2=\alpha_1-\beta_1=0$;

(R_{16}^4) $4\alpha_1-\beta_1=2\alpha_2+2\beta_1-\beta_2=0$.

定理 4.5 [17] 当 $\alpha_3 = 16 - \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2$ 时, 系统 (4.2) 在原点处具有等时中心当且仅当下面条件之一被满足:

(R^4_{21}) $\alpha_1 - 16/15 = \alpha_2 = \beta_1 + 16/3 = \beta_2 - 48/5 = 0$;

(R^4_{22}) $\alpha_1 - 64/15 = \alpha_2 + 16/3 = \beta_1 + 32/15 = \beta_2 - 64/15 = 0$;

(R^4_{23}) $240k - 60\alpha_1 + 15\beta_2 - 64 = 72k + 2\alpha_2 + \beta_2 = 600k - 15\beta_1 + 15\beta_2 - 256 = 0$,
其中 $\beta_2 < 0$ 且 $k = \pm\sqrt{-\beta_2/15}$.

5 Hamilton 系统

按文献 [18, 第 200 页] 的定义, 如果存在一个函数 $H(x,y,\lambda)$, 使得

$$H_y(x,y,\lambda) = y - P(x,y,\lambda), \quad H_x(x,y,\lambda) = x + Q(x,y,\lambda),$$

则系统 (1.1) 称为平面 Hamilton 系统, $H(x,y,\lambda)$ 称为系统 (1.1) 的 Hamilton 函数.

如引言介绍, 系统 (1.2) 就是一个特殊的平面 Hamilton 系统, 其平面微分形式为

$$\dot{s} = v, \quad \dot{v} = -g(s), \tag{5.1}$$

其中 $g(0) = 0$ 且 $g'(0) > 0$. 由文献 [19–21] 知, 如果 $g(s)$ 是解析奇函数或一般形式的多项式函数, 则原点 O 是系统 (5.1) 的等时中心的充要条件是 $g(s) = \omega s$, $\omega > 0$. 但当 $g(s)$ 是解析的非奇函数或非多项式函数时, O 仍有可能成为系统 (1.2) 的等时中心. 在这种情形下, Chavarriga 和 Sabatini [22] 给出了如下结果.

定理 5.1 [22] 假设 $g(s)$ 是解析的非奇函数, 则 O 是系统 (5.1) 的等时中心的充要条件是存在函数 $\gamma(s)$, 使得 $\gamma(0) = 0$, $\gamma(\gamma(s)) \equiv s$, 且

$$G(s) = \int_0^s g(\xi)d\xi = \frac{\pi^2}{2\omega^2}(s - \gamma(s))^2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

此时, 围绕等时中心 O 的一族周期轨具有相同的周期 ω.

1999 年, Cima 等 [23] 研究了 Hamilton 函数为 $A(x) + B(x)y + C(x)y^2$ 的系统的等时中心问题, 其中 A、B 和 C 是实数域上的解析函数. 令 $G = 4AC - B^2$, $(x_I, x_S) = \{x \in \mathbb{R}:$ 存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 (x,y) 在围绕原点的周期轨上$\}$, $g(x) = x\sqrt{G(x)/(x^2C(x))}/2$ 定义在 $x \in (x_I, x_S)$, g^{-1} 定义在 $(-\sqrt{h_0}, \sqrt{h_0})$. 他们的结果如下.

定理 5.2 [23] 设系统 (1.1) 以原点为非退化中心, 且具有 Hamilton 函数 $H(x,y) = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$, 其中 A、B 和 C 是实数域上的解析函数, 则

(1) 原点是周期为 ϖ 的等时中心当且仅当

$$\int_{g^{-1}(x)}^{g^{-1}(-x)} \frac{ds}{\sqrt{C(s)}} = \frac{2\varpi}{\pi}x, \quad \forall\, x \in (-\sqrt{h_0}, \sqrt{h_0}).$$

(2) 原点是周期为 ϖ 的等时中心的充分条件是

$$(G'(x)C(x) - G(x)C'(x))^2 = \frac{16\pi^2}{\varpi^2}G(x)C(x)^2, \quad \forall\, x \in (x_I, x_S).$$

进一步, 当 G 和 C 是偶函数时, 这个条件也是必要的.

他们将这个结果应用到三次系统, 并给出了三次 Hamilton 系统的等时中心分类.

定理 5.3 [23] 三次 Hamilton 系统在原点具有等时中心的充分必要条件是, 此系统经过一个线性变换后, 它的 Hamilton 函数可以写成

$$H(x,y)=(k_1x)^2+(k_2y+P(x))^2,$$

其中 $P(x)=k_3x+k_4x^2$, k_i $(i=1,2,3,4)$ 是常数, 并且 k_1 和 k_2 不为 0.

另一方面, 人们也关注对 Hamilton 系统非等时性判定. 考虑平面多项式 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为

$$H(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}+\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}^{n}a_{i,j}x^iy^j,\quad \sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}a_{i,j}^2\neq 0, \tag{5.2}$$

其中 $x,y,a_{i,j}\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$ 且 $n\geqslant m\geqslant 3$. 2002 年, Jarque 和 Villadelprat [24] 证明了四次 Hamilton 系统没有等时中心, 并提出了一个公开问题: 平面偶次 Hamilton 系统是否存在等时中心?

2008 年, Chen 等 [25] 定义了判定量

$$M_{2k}:=\sum_{i=0}^{k}a_{2k-2i,2i}\varpi_{i,k-i}, \tag{5.3}$$

其中当 $2k<m$ 或者 $2k>n$ 时补充定义 $a_{2k-2i,2i}:=0$ 而且

$$\varpi_{i,j}:=\frac{(2i)!(2j)!\pi}{i!j!(i+j)!2^{2i+2j+1}}.$$

他们给出了 Hamilton 系统中心不等时的一个充分条件.

定理 5.4 [25] 如果 $M_{2m-2}\leqslant 0$, 那么 Hamilton 函数为 (5.2) 的系统在原点是不等时的.

作为推论, 他们给出了下面的结果.

定理 5.5 [25] 如果 Hamilton 函数为

$$H(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}+\sum_{\substack{k=m,i+j=2k+1\\ i,j\geqslant 0}}^{n}a_{i,j}x^iy^j,\quad \sum_{\substack{i+j=2m+1\\ i,j\geqslant 0}}a_{i,j}^2\neq 0,$$

那么系统在原点是不等时的.

定理 5.5 中 Hamilton 函数的高次项全是奇次的, 这表明相应的平面微分系统的非线性项都是偶次的, 因而证明了非线性项是纯偶次的 Hamilton 系统是不等时的.

2010 年, Wang 等 [26] 定义了新的判定量

$$W_k(\lambda):=T_{2k}(\lambda)-M_{2k+2}(\lambda),$$

其中 M_{2k+2} 如同 (5.3) 中定义,

$$T_{2k}(\lambda):=\sum_{j=2}^{2k}(-1)^j\frac{\prod_{\sigma=2}^{j}(2k+2\sigma)}{j!}\sum_{\substack{v_1+\cdots+v_j=2k\\ v_1,\dots,v_j\geqslant 1}}\sum_{\substack{\varsigma=0\\ i(j)\in\Theta(v(j),\varsigma)}}^{k+j}\left(\prod_{\sigma=1}^{j}a_{v_\sigma+2-i_\sigma,i_\sigma}\right)\varpi_{\varsigma,k+j-\varsigma},$$

$v(j)$ 是整数数组 $(v_1,\dots,v_j)$ 且 $\Theta(v(j),\varsigma):=\{(i_1,i_2,\dots,i_j)\in\mathbb{Z}^j: i_1+i_2+\cdots+i_j=2\varsigma,\ 0\leqslant i_\ell\leqslant v_\ell+2,\ \ell=1,2,\dots,j\}$.

定理 5.6 [26] 如果存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $W_k(\lambda) \neq 0$, 那么 Hamilton 函数为 (5.2) 的系统在原点是不等时的. 反之亦然.

以上定理可用于 $M_{2m-2} > 0$ 的在定理 5.4 未考虑的情形. 利用这个定理, 可以把定理 5.5 的结果从 Hamilton 系统的非线性项是纯偶次的情形推广到可以含有某些奇次项的情形.

定理 5.7 [26] 如果 Hamilton 函数为

$$H(x,y,\lambda) = \frac{x^2+y^2}{2} + \sum_{\substack{i+j=2n+1\\ i,j\geqslant 0}} a_{i,j}x^iy^j + \sum_{\substack{k=n+2,\, i+j=2k+1\\ i,j\geqslant 0}}^{2n} a_{i,j}x^iy^j + \sum_{\substack{i+j=4n\\ i,j\geqslant 0}} a_{i,j}x^iy^j,$$

其中

$$n \geqslant 2, \quad \sum_{i=0}^{2n} a_{4n-2i,2i}\varpi_{i,2n-i} > 0, \quad \sum_{\substack{i+j=2n+1\\ i,j\geqslant 0}} a_{i,j}^2 \neq 0, \quad \sum_{\substack{i+j=4n+1\\ i,j\geqslant 0}} a_{i,j}^2 \neq 0,$$

那么系统在原点是不等时的.

定理 5.7 中 Hamilton 函数的最高次是 $4n+1$, 位于第二个求和式中, 除了最后一个求和式是偶次外, 其他高次项都是奇次. 这表明相应的平面微分系统是偶次的, 但不是纯偶次的, 它包含奇次项. 定理 5.7 证明了这样的偶次的 Hamilton 系统也是不等时的.

6 其他系统

一些来自工程、生命科学的微分方程模型如 Liénard 系统、Kukles 系统和 Kolmogrov 系统等也涉及中心的等时性问题.

对于 Liénard 系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = g(x) + f(x)y, \tag{6.1}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是满足 $g(0)=0$, $g'(0)=1$, $f(0)=0$ 的多项式. Christopher 和 Devlin [27] 在 2004 年得到了以下结果.

定理 6.1 [27] 系统 (6.1) 的原点是等时中心当且仅当方程组

$$\begin{cases} (f(y)-f(x))\left(\dfrac{(x-y)^4}{4} + (\tilde{F}(x)-\tilde{F}(y))^2\right) = (x-y)^3 g(x)f(y), \\ F(x)-F(y) = 0 \end{cases}$$

有满足 $y(0)=0$, $y'(0)=-1$ 的公共解 $y(x)$, 其中 $F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi$, $\tilde{F}(x)=\int_0^x \xi f(\xi)d\xi$.

当系统 (6.1) 中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是解析函数时, 他们也给出了原点是等时中心的充要条件.

定理 6.2 [27] 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是解析函数, 则系统 (6.1) 的原点是等时中心当且仅当

$$g = ss'\left(1 + \frac{1}{s^4}\left(\int_0^x s(\xi)f(\xi)d\xi\right)^2\right),$$

其中 $s(x)$ 是函数方程

$$H(x-2s(x)) = H(x), \quad s(0)=0, \quad s'(0)=1$$

的解, 这里要么 $H(x)$ 是形如 $x^2+\cdots$ 的解析函数且满足存在使等式 $\chi(H(x)) = \int_0^x f(\xi)d\xi$ 成立的解析函数 $\chi(x)$, 要么 $H(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$.

1997 年, Rousseau 和 Toni [28] 研究了具有线性中心型平衡点的约化 Kukles 系统

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2. \tag{6.2}$$

他们给出了原点等时的充要条件.

定理 6.3 [28] 系统 (6.2) 的原点是等时中心当且仅当 $a_1 = a_3 = a_5 = a_6 = a_2^2 - 9a_4 = 0$.

2009 年, Wang 等[29] 研究了一类广义 Lotka-Volterra 系统

$$\dot{x} = x^p - x^py^q, \quad \dot{y} = \mu(x^py^q - y^q), \tag{6.3}$$

其中 $\mu, p, q > 0$. 他们给出了平衡点 $(1, 1)$ 等时的如下充要条件.

定理 6.4 [29] 系统 (6.3) 的平衡点 $(1, 1)$ 是等时中心当且仅当 $p = q = 1/2$.

2013 年, Chen 等[30] 研究了三次 Kolmogrov 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(A_1((x-a)) + A_2(y-b) + B_3(x-a)^2 + B_4(y-b)^2), \\ \dot{y} &= y(B_1((x-a)) + B_2(y-b) + B_3(x-a)^2 + B_4(y-b)^2). \end{aligned} \tag{6.4}$$

他们指出平衡点 (a, b) 是线性中心型当且仅当 $aA_1 + bB_1 = 0$, 并给出了如下等时中心条件.

定理 6.5 [30] 系统 (6.4) 在点 (a, b) 是等时中心当且仅当下面条件之一成立:

(K_1^3) $aA_1 + bB_1 = 2aB_3 - B_1 = 2bB_4 - A_2 = 0$;

(K_2^3) $aA_1 + bB_1 = B_2 = aA_2B_3 + bB_1B_4 - A_2B_1 = aB_1B_4 - bA_2B_4 + A_2^2 = 0$;

(K_3^3) $aA_1 + bB_1 = 2aB_3 - B_1 = aB_1 + bB_2 = 4aA_2B_1 + 3bB_2^2 + 2b^2B_2B_4 = 0$;

(K_4^3) $aA_1 + bB_1 = B_2 - A_2 = B_2 - 2bB_4 = a^2B_3 - 2aB_1 - 3b^2B_4 = 0$.

如同对中心焦点型平衡点判定中心一样, 对中心进一步判断等时性也是一件困难的事. 有很多特殊系统如 Hamilton 系统、Liénard 系统、Lotka-Volterra 系统和 Kolmogrov 系统还远没有得到完整结果, Liénard 系统的等时性判据还涉及一个函数方程的可解性问题, 偶次 Hamilton 系统的公开问题还没有最终解决. 中心等时性判定在常微分方程方向中是一个非常重要的课题和非常广阔的领域, 有些问题涉及大量的代数簇计算, 极大地依赖于代数几何理论和符号计算方法的进步和应用.

参考文献

1 Loud W. Behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers. Contrib Differ Equ, 1964, 3: 21–36

2 Mardešić P, Rousseau C, Toni B. Linearization of isochronous centers. J Differential Equations, 1995, 121: 67–108

3 Pleshkan I. A new method of investigating the isochronicity of a system of two differential equations. Differ Equ, 1969, 5: 796–802

4 Chavarriga J, Giné J, García I. Isochronous centers of a linear center perturbed by fourth degree homogeneous polynomial. Bull Sci Math, 1999, 123: 77–96

5 Sabatini M. Characterizing isochronous centers by Lie brackets. Differential Equations Dynam Systems, 1997, 5: 91–99

6 Villaini M. Regularity properties of the period function near a center of a planer vector field. Nonlinear Anal, 1992, 19: 787–803

7 Chavarriga J, Giné J, García I. Isochronous centers of a linear center perturbed by fifth degree homogeneous polynomials. J Comput Appl Math, 2000, 126: 351–368

8 Romanovski V, Chen X, Hu Z. Linearizability of linear systems perturbed by fifth degree homogeneous polynomials. J Phys A, 2007, 40: 5905–5919

9 林怡平, 李继彬. 平面自治系统的规范型与闭轨族周期的临界点. 数学学报, 1991, 34: 490–501

10 Liu Y, Li J. Center and isochronous center for quasi analytic systems. Acta Math Sin Engl Ser, 2008, 24: 1569–1582

11 Liu Y, Huang W. Center and isochronous center at infinity for differential systems. Bull Sci Math, 2004, 128: 77–89
12 Chen X, Huang W, Romanovski V, et al. Linearizability conditions of time-reversible quartic-like systems. J Math Anal Appl, 2011, 383: 179–189
13 Żołądek H. The classification of reversible cubic systems with center. Topol Methods Nonlinear Anal, 1994, 4: 79–136
14 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 2006
15 Cairó L, Chavarriga J, Giné J, et al. A class of reversible cubic systems with an isochronous center. Comput Math Appl, 1999, 38: 39–53
16 Chen X, Romanovski V. Linearizability conditions of time-reversible cubic systems. J Math Anal Appl, 2010, 362: 438–449
17 Chen X, Romanovski V, Zhang W. Linearizability conditions of time-reversible quartic systems having homogeneous nonlinearities. Nonlinear Anal, 2008, 69: 1525–1539
18 张伟年, 杜正东, 徐冰. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社, 2006
19 Chicone C, Jacobs M. Bifurcation of critical periods for plane vector fields. Trans Amer Math Soc, 1989, 312: 433–486
20 Urabe M. Potential forces which yield periodic motions of a fixed period. J Math Mech, 1961, 10: 569–578
21 Urabe M. The potential force yielding a periodic motion whose period is an arbitrary continuous function of the amplitude of the velocity. Arch Ration Mech Anal, 1962, 11: 27–33
22 Chavarriga J, Sabatini M. A survey of isochronous centers. Qual Theory Dyn Syst, 1999, 1: 1–70
23 Cima A, Mañosas F, Villadelprat J. Isochronicity for several classes of Hamiltonian systems. J Differential Equations, 1999, 157: 373–413
24 Jarque X, Villadelprat J. Nonexistence of isochronous centers in planar polynomial Hamiltonian systems of degree four. J Differential Equations, 2002, 180: 334–373
25 Chen X, Romanovski V, Zhang W. Non-isochronicity of the center at the origin in the polynomial Hamiltonian systems with even degree nonlinearities. Nonlinear Anal, 2008, 68: 2769–2778
26 Wang Z, Chen X, Zhang W. Non-isochronicity of the center in polynomial Hamiltonian systems. Nonlinear Anal, 2010, 73: 228–243
27 Christopher C, Devlin J. On the classification of Liénard systems with amplitude-independent periods. J Differential Equations, 2004, 200: 1–17
28 Rousseau C, Toni B. Local bifurcation of critical periods in the reduced Kukles system. Canad Math Bull, 1997, 49: 338–358
29 Wang Z, Chen X, Zhang W. Local bifurcations of critical periods in a generalized 2-D LV system. Appl Math Comput, 2009, 214: 17–25
30 Chen X, Huang W, Romanovski V, et al. Linearizability and local bifurcation of critical periods in a cubic Kolmogorov system. J Comput Appl Math, 2013, 245: 86–96

Isochronicity of centers in some planar differential systems

WANG ZhaoXia, CHEN XingWu & ZHANG WeiNian

Abstract For planar differential systems the isochronicity of centers, as a continuation of the center problem, relates to the synchronism of periodic oscillations. In this paper we introduce recent results and basic methods on isochronicity of nondegenerate centers for planar differential systems including homogeneous systems, reversible systems, and Hamiltonian systems.

Keywords planar vector field, center, isochronicity, analytic linearizability, transversal commutation

MSC(2010) 34A25, 34C25

doi: 10.1360/N012016-00111