

湍流边界层Lagrangian拟序结构的辨识

潘翀, 王晋军*, 张草

北京航空航天大学流体力学研究所, 北京 100083

* 联系人, E-mail: jjwang@buaa.edu.cn

收稿日期: 2008-05-22; 接受日期: 2008-09-01

国家杰出青年基金(批准号: 10425207)和国家自然科学基金(批准号: 10832001)资助项目

摘要 用时间连续二维 PIV 测量充分发展湍流边界层, 对测量得到的 (x, y) 平面速度场应用有限时间 Lyapunov 指数方法辨识 Lagrangian 拟序结构, 发现湍流边界层中的典型 Lagrangian 拟序结构(LCS)是广义马蹄涡结构, 其一端延伸至近壁流区, 另一端向外层伸展, 在头部具有明显的展向旋转趋势. 对从 FTLE 场中辨识出的 LCS 的空间形态进行统计分析, 发现 LCS 的倾斜角 θ 的概率密度分布在近壁区符合 t 分布, 而在外层呈现为双峰分布, 其概率峰分别对应马蹄涡的头部和颈部. 空间相关分析表明, LCS 的平均倾斜角 θ_R 沿法向先增加后减小, 其数值和变动趋势与瞬时 LCS 倾斜角 θ 的均值相同. θ 的最可几值在 $y^+ = 100$ 附近达到最大值 24° , 说明马蹄涡由涡颈过渡到涡头的位置最有可能出现在 $y^+ = 100$ 附近. 最后对 FTLE 场进行了时间-空间相关分析, 发现 LCS 的平均对流速度沿法向的分布在対数区与当地边界层的时均速度型基本一致, 说明在湍流边界层中马蹄涡的对流决定了边界层内的流体输运特性.

关键词

湍流边界层
拟序结构
涡辨识准则
有限时间 Lyapunov 指数
马蹄涡

壁湍流普遍存在于自然界和工程实际中, 20 世纪 60 年代 Kline 等人^[1]在湍流边界层中发现快慢条带结构和猝发事件, 改变了此前所认为的湍流是完全随机的紊乱流动的传统观点. 此后, 人们对湍流边界层中的各种拟序结构进行了持续研究, 结果表明旋涡是壁湍流拟序结构的核心, 将影响条带、猝发、鼓包等其他拟序结构的发展和演化^[2~4]. 壁湍流中已经观察到的旋涡结构包括马蹄涡、横向涡和流向涡等, 其中马蹄涡被认为是基本涡结构, 马蹄涡的再生和繁殖是其他拟序结构能够自维持的必要条件^[5].

湍流边界层中的马蹄涡往往淹没于小尺度的强随机脉动中, 其对称性和演化发展过程受随机脉动的影响很大, 这给直接研究湍流边界层中的马蹄涡特性带来了一定的困难. 因此人们往往使用人工激

励的方式^[6~8]在层流边界层内产生具有较好完整性和对称性的马蹄涡, 进而研究其演化发展规律.

近年来, 旋涡辨识技术得到了长足发展, 人们因此能够以更加精细的方式从湍流速度场中辨识并提取旋涡结构. 旋涡辨识方法主要包括 Q 准则^[9]、 λ_2 准则^[10]、 Δ 准则^[11]和 λ_{ci} 准则等^[12], 这些涡辨识方法均基于 Euler 体系, 以速度梯度张量 ∇v 的某些特性作为旋涡辨识的依据. 由于要计算速度梯度张量场, 因此需要得到具有较高空间分辨精度的三维速度场, 现有实验手段还不能满足这一要求, 所以对这些涡辨识准则的应用目前还主要限于槽道湍流直接数值模拟 (direct numerical simulation, DNS) 得到的数据库^[12,13].

另一类涡辨识准则基于 Lagrangian 体系, 以流体质点在流场中对流特性的时间积分为主要考虑因素,

无需使用速度梯度张量, 因此对速度场的空间分辨能力要求较低, 有限时间 Lyapunov 指数 (finite-time lyapunov exponents, FTLE) 方法即是其中一种. Green 等人^[14]使用 FTLE 方法在槽道湍流 DNS 数据库中成功辨识出马蹄涡结构, 但尚未见到有应用该方法处理实验得到的湍流边界层速度场的文献报导. 因此, 本文将使用时间连续的二维粒子图像测速 (particle image velocimetry, PIV) 技术测量充分发展湍流边界层, 对测量得到的二维速度场应用 FTLE 方法辨识典型的 Lagrangian 拟序结构 (Lagrangian coherent structures, LCS), 并进一步分析 LCS 的空间形态和对流速度的统计特性.

1 有限时间 Lyapunov 指数方法

Lyapunov 指数是描述混沌现象的一个重要参数, 它表征了系统在相空间中相邻轨道间收敛或发散的指数率. 对于一个动力学系统而言, 如果最大 Lyapunov 指数大于零, 意味着在系统相空间中, 初始间距无穷小的两条相邻轨迹线将随时间不断分开, 两者的间距呈指数增长. 从 Lagrangian 观点出发, 可以将旋涡边界视为分割旋涡内部流体微团和环境流体的物质面, 考虑旋涡内外两个由旋涡边界分开但彼此无限接近的流体质点的运动轨迹, 由于旋涡边界以内的流体微团呈旋转状态, 因此在一个很短的时间范围内两个流体质点要么相互离开要么相互靠近, 两个流体质点离开或靠近的速率和它们与旋涡边界的初始距离成反比. 借用 Lyapunov 指数的观点, 可以认为在旋涡边界处两个无限接近的流体质点将具有最大的离开或靠近速率, 对应于该位置上出现最大或最小 Lyapunov 指数. Haller 等人^[15,16]通过严格的数学推导证明, 流体微团将在旋涡边界面上出现最大拉伸率或压缩率, 因此旋涡的边界对应于在有限时间内积分的 Lyapunov 指数场出现极值的位置.

有限时间 Lyapunov 指数 (以下简称 FTLE) 描述初始时刻位于空间某位置处的流体质点与其极小距离邻域内流体质点的相对距离在有限时间范围内的平均变动率, 每一流体质点在不同时刻的空间位置可以通过质点在 Euler 速度场中对流而求出. 图 1 给出计算 FTLE 时进行流体质点对流的示意图, 在 t_0+T 时刻位于中心位置 (i, j) 上的质点与初始 t_0 时刻邻域内其

他质点的距离定义为

$$D^2(T; t_0) = \frac{1}{N} \sum_{m=\pm 1, n=\pm 1} |X_{i,j}(t_0+T) - X_{i+m,j+n}(t_0+T)|^2, \quad (1)$$

Haller^[16]经过推导得出: 流体质点组相对距离的变动率 $\sigma_T(x_0, t_0)$ 等于位移梯度 $\partial x(t_0+T, x_0, t_0)/\partial x_0$ 平方的最大特征值, 即

$$\sigma_T(x_0, t_0) = \lambda_{\max} \left(\left[\frac{\partial x(t_0+T, x_0, t_0)}{\partial x_0} \right]^T \left[\frac{\partial x(t_0+T, x_0, t_0)}{\partial x_0} \right] \right), \quad (2)$$

其中 $x(t_0+T, x_0, t_0)$ 表示 t_0 时刻在 x_0 位置开始对流的质点经过 T 时间后所在的空间位置. 在 T 时间内的 FTLE 为

$$FTLE_T(x_0, t_0) = \frac{1}{2T} \log \sigma_T(x_0, t_0). \quad (3)$$

固定初始时刻 t_0 计算 FTLE 的空间标量场, FTLE 的空间分布在脊线处具有最大或最小值, 因此 FTLE 空间上的脊线可以表征旋涡结构的边界, 用此方法得到的结构称为 Lagrangian 拟序结构 (LCS). 考虑到旋涡边界或者具有最大拉伸率或者具有最大压缩率, 如果沿流体质点轨迹进行后向积分 (对应 $T < 0$), 所得到的 FTLE 脊线显示的是具有最大压缩率的吸引 LCS (attracting LCS), 类似于染色液被旋涡卷携而显示旋涡形态. 如果沿流体质点轨迹进行前向积分 (对应 $T > 0$), 所得到的 FTLE 脊线将显示具有最大拉伸率的排斥 LCS (repelling LCS).

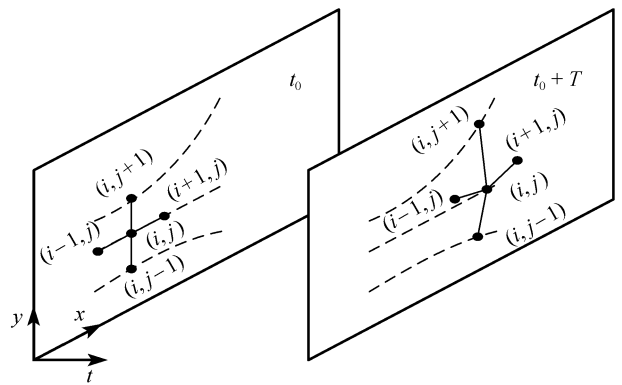


图1 计算有限时间 Lyapunov 指数时进行流体质点对流的示意图

Shadden等人^[17,18]使用该方法研究了涡环边界处的流体输运特性; Mathur等人^[19]辨识了二维湍流中的LCS; Green等人^[14]进一步在槽道湍流DNS数据库中辨识出具有马蹄涡形态的LCS. 上述研究均表明, 相比于Euler体系的涡辨识方法, FTLE方法用具有Lagrangian性质的物质线显示旋涡边界, 无需人为定义判别阈值, 因此具有客观性. 其次, 判别函数不使用速度梯度张量, 因此对速度场的空间精度要求不高. 另外, 该方法考虑流体质点在流场中的对流特性, 衡量的是时间积分信息, 故而对速度场中的个别异常数据不敏感, 具有较好的鲁棒性, 这使得该方法尤其适合在PIV测量得到的具有一定异常数据的湍流场中进行旋涡辨识. 最后, 在使用短时间冻结假设的前提下, 可以使用该方法从时间连续二维速度场中得到三维旋涡结构的截面形状. 但FTLE方法的缺陷是需要用到时间连续的速度场信息, 这给实验测量和数值模拟提出了较高要求. 此外, 该方法沿时间维度积分流体质点的迹线, 其计算量远大于Euler体系的涡辨识方法.

2 实验模型和测量技术

二维 PIV 测速实验在北京航空航天大学低速回流式水槽中进行, 水槽实验段长 4.8 m, 横截面积 0.6 m×0.6 m, 实验段流动均匀度为 2%, 湍流度不超过 0.8%. 边界层在长 2200 mm、宽 600 mm、厚 10 mm 的有机玻璃平板上表面发展, 平板前缘按 4:1 半椭圆修形. 平板水平放置, 距离水槽底面 200 mm, 通过微调平板相对自由来流的迎角来保证前缘附近流动附着无分离. 使用绊线法在平板上表面产生湍流边界层, 绊线直径 $d = 6$ mm, 平行前缘贴在壁面上 $x = 70$ mm 处, 引起边界层提前转捩. 经测量, 在下游 $x = 700$ mm 之后形成充分发展的湍流边界层.

所使用的PIV系统针对低速流动进行时间连续测量(time-resolved measurement)而设计, 以半导体激光器产生波长为 532 nm 的连续激光, 通过转接透镜输出厚度为 1 mm 的片光, 激光器输出功率 1.5 W; 配合连续激光, 使用高速CCD相机进行图像记录, CCD相机分辨率为 640 pix×480 pix, 最高采样频率为 200 Hz. 在低速流动(速度小于 15 mm/s)、CCD采样频率 120 Hz的情况下, 粒子在两帧间的位移一般不超过 5 pix,

因此可以用“连续激光+高速CCD相机”的组合方式来代替“双曝光激光+低速CCD相机”, 并实现时间维度上的连续测量. 示踪粒子为空心玻璃微珠, 其平均直径 5 μm 、平均密度 1.05 g/mm³. 对粒子图像用商业软件MicroVec[®]进行处理, 该软件使用高斯拟合将相关峰识别精度提高到亚像素量级, 并使用多重网格迭代和变形窗口算法^[20](multi-grid iteration with window deformation)提高查询窗口的跟踪精度, 软件系统的相对测量误差约为 1%.

用该 PIV 系统对充分发展湍流边界层(x, y)平面(侧视图)进行测量. 激光片光位于平板中心面上, 平行来流垂直于平板, CCD 相机光轴与片光平面垂直, 片光和 CCD 相机均可沿流向平移, 光路布置和坐标系定义见图 2. CCD 相机采样频率 200 Hz, 单帧曝光时间 1 ms. 粒子图像的视野范围 80 mm×60 mm. 粒子在图像上的平均直径 d_p 约为 2 pix, 因此相关峰锁定效应(peak-locking effect)可以忽略不计. 互相关计算时查询窗口尺寸为 16 pix×8 pix, 对应的重叠率为 50%. 为进行统计分析, 在每一个片光位置上进行 4 次重复测量, 每次记录 5000 帧图像, 持续时间 25 s.

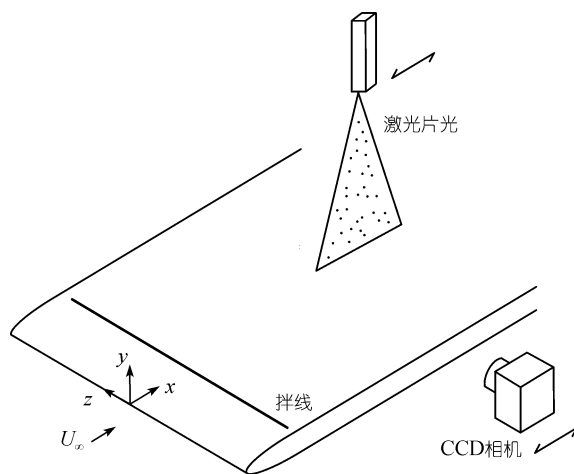


图2 PIV测量充分发展湍流边界层侧视平面的光路示意图和坐标系定义

图3给出了在 $x = 1050$ mm, $y = 3.41$ mm 位置处湍流边界层中的最大速度脉动强度 $u_{\text{rms,max}}$ 对统计样本 N 的依赖性, $u_{\text{rms,max}}$ 在 $N > 18000$ 后呈收敛趋势, 说明 PIV 测量提供的样本数目足够进行时均特性和脉动特性的统计分析.

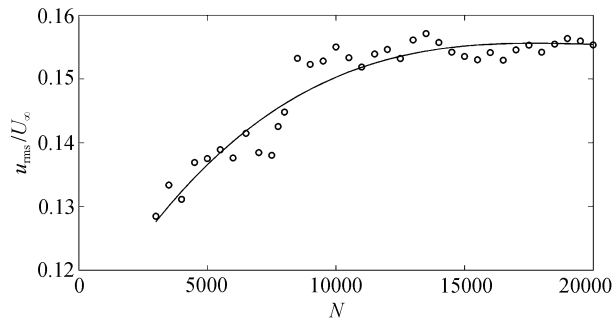


图3 PIV 测量得到的湍流边界层内 $u_{\text{rms,max}}$ 随统计样本数目 N 的收敛性
 $x = 1050 \text{ mm}$, $y = 3.41 \text{ mm}$

在得到时间连续的二维速度场后, 使用软件包 MANGEN[®] 计算 $FLTE$ 场, 流体质点的迹线由四阶 Runge-Kutta-Fehlberg 积分方法通过速度场推进得到, 由于 PIV 测量速度场的离散性, 使用三阶插值得到任意空间位置上的速度信息.

3 基本流场

图4给出了流向时均速度 U^+ 和速度脉动强度 u_{rms} , v_{rms} 在 $x = 1020, 1035$ 和 1050 mm 三个流向位置上沿法向的分布, 其中速度脉动强度 u_{rms} , v_{rms} 用自由来流

速度 U_∞ 无量纲化, 时均速度 U 和法向位置 y 分别用摩擦速度 u_τ 和湍流边界层内尺度 y^* 无量纲化. 如图 4(a) 所示, $U^+(y^+)$ 与 Spalding 速度分布公式^[21] 基本吻合:

$$y^+ = U^+ + e^{-KB} \left[e^{KU^+} - 1 - KU^+ - \frac{(KU^+)^2}{2!} - \frac{(KU^+)^3}{3!} \right], \quad (4)$$

式中 $U^+ = U/u_\tau$, $y^+ = y/y^* = yu_\tau/\nu$, 系数 $K = 0.4$, $B = 5.5$. 图 4(b) 显示流向速度脉动强度 u_{rms} 的最大值约为 $0.15U_\infty$, 出现在 $y^+ \approx 14$ 的高度上, 与前人的研究结果一致^[22], 而法向速度脉动强度 v_{rms} 的最大值约为 $0.04U_\infty$, 出现在 $y^+ \approx 40$ 的高度上. 此外, $U^+(y^+)$, $u_{\text{rms}}(y^+)$ 和 $v_{\text{rms}}(y^+)$ 在三个不同流向位置上均基本重合, 说明边界层的时均和脉动特性呈现自相似, 湍流边界层已经充分发展. 表 1 给出了湍流边界层在 $x = 1050 \text{ mm}$ 处的基本参数.

4 LCS 的空间形态

对由二维 PIV 测量得到的时间连续速度场计算向后时间积分的 $FTLE$, 积分时长为 $T = -2 \text{ s}$, 得到二维 $FTLE$ 场随时间的变化. 图 5 给出了某一特定时刻

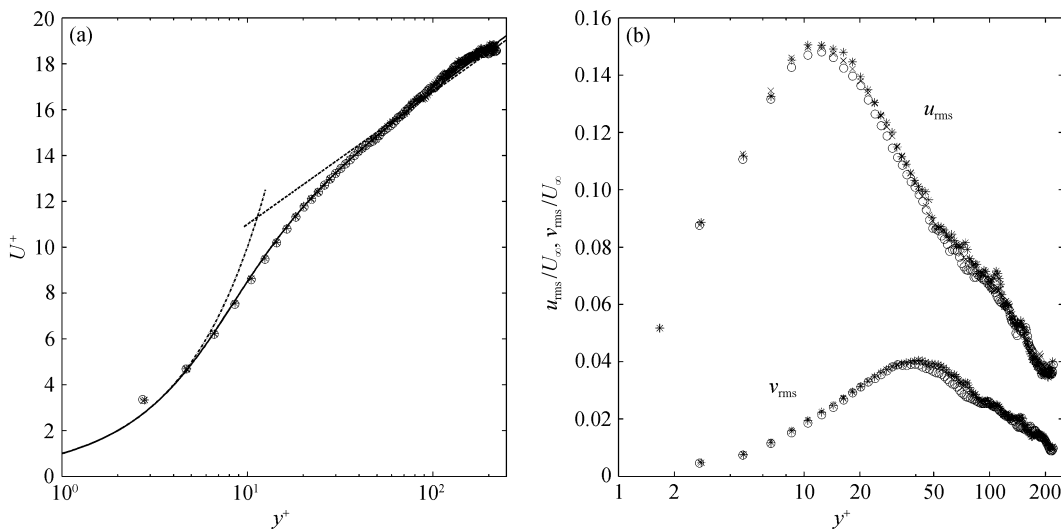


图4 湍流边界层中时均速度型 $U^+(y^+)$ (a) 和速度脉动型 $u_{\text{rms}}(y^+)$ 及 $v_{\text{rms}}(y^+)$ (b)

○示 $x = 1020 \text{ mm}$, ×示 $x = 1035 \text{ mm}$, *示 $x = 1050 \text{ mm}$, —示 $U^+ = y^+$,示 $U^+ = k \ln y^+ + C$, — · —示(4)式

表1 湍流边界层在 $x = 1050 \text{ mm}$ 处的基本参数

$U_\infty/\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$	δ/mm	δ_1/mm	θ/mm	H	Re_θ	$u_\tau/\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$	δ^+
86.1	39.3	8.7	5.9	1.47	481	4.6461	173

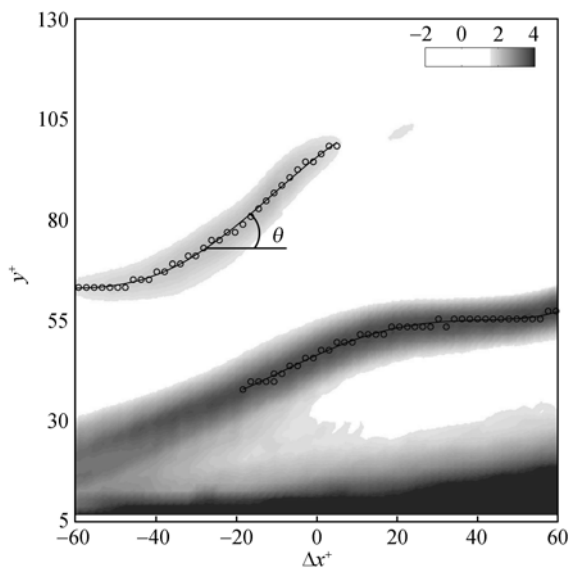


图 5 湍流边界层中 $FTLE$ 在 (x, y) 平面内的典型分布及 LCS 倾斜角 θ 的定义

灰度图只显示 $FTLE > 0$ 的情况, 黑线表示 $FTLE$ 的空间脊线, x 轴的原点位于 $x = 1050$ mm

$FTLE$ 在 (x, y) 平面内的分布, 其中 x 轴的原点位于 $x = 1050$ mm 处。如图 5 所示, 由 $FTLE$ 脊线显示的 LCS 呈向壁面倾斜的条状结构, 其靠近上游的一端延伸进入边界层的近壁区。具有这种形状的 LCS 在 $FTLE$ 场中经常出现, 代表了湍流边界层侧视图中的典型拟序结构。Green 等人^[14]在时均槽道湍流中用 $FTLE$ 方法辨识人工产生的马蹄涡的空间形态, 他们观察到的马蹄涡在 (x, y) 截面上的形态与图 5 显示的 LCS 相似。为了进一步考察在相同流向位置上 $FTLE$ 沿时间的变化, 图 6 给出了 $x = 1100$ mm 处 $FTLE$ 在 (t, y) 平面上的典型分布, 可将图 6 视为空间冻结的 LCS 按时间先后顺序流经观测位置 $x = 1100$ mm。如图 6 所示, $FTLE$ 脊线所显示的条状结构是边界层内的典型 LCS , 这些向壁面倾斜的 LCS 在边界层外区的末端均出现明显弯折, 并在某些情况下(图 6 中 $t + 5\Delta t$, $y^+ = 130$ 处)形成半封闭的环状结构, 这说明侧视图中的 LCS 实际上显示了广义马蹄涡结构在 (x, y) 截面上的投影。马蹄涡的涡腿位于边界层的近壁区并在流向上拉伸, 而其头部可以伸展至 $y^+ = 130$ 的高度。此外, 图 6 在 $t \sim t + \Delta t$ 的时间范围内出现前后紧邻的三个马蹄涡, 它们的空间位置依次降低, 前一个马蹄涡的涡腿与后一个马蹄涡的涡头彼此连接, 说明这三个马蹄涡之间互

为父子关系, 三者通过自繁殖和自组织机制^[8]形成马蹄涡包。

Adrian 等人^[23]在研究壁湍流中的马蹄涡结构时发现, 在以某一特定速度沿主流方向平移的参考坐标系中, (x, y) 平面内的瞬时速度向量场在某些地方呈封闭的圆形或椭圆形, 表征绕 z 轴旋转的展向旋涡, 参考坐标系的平移速度即为该旋涡结构的对流速度; 他们因此将展向涡和旋涡下方存在贡献第二象限速度脉动($u' < 0$, $v' > 0$)且与壁面成 $30^\circ \sim 60^\circ$ 倾角的强剪切层视为马蹄涡的辨识准则。图 7(a)和(b)将 $FTLE$ 场、平移坐标系下的速度向量这两种方法对马蹄涡的辨识能力进行了对比, 灰度图表示 (x, y) 平面内 $FTLE$ 场的瞬时分布, 箭头表示参考坐标系下的瞬时速度向量, 参考坐标系沿流向平移, 平移速度 U_{frame} 在图 7(a)和(b)中分别为 $0.7U_\infty$ 和 $0.9U_\infty$ 。图 7(a)和(b)中 $FTLE$ 场的脊线显示了两个典型的 LCS 结构, 表征两个具有不同尺度、位于不同高度的广义马蹄涡结构; 图 7(a)和(b)中的瞬时速度向量分别在黑色线框所示的范围内呈现旋转形态, 其空间位置对应于此区域内由 $FTLE$ 脊线显示的 LCS 的头部, 说明 LCS 的头部存在展向旋转运动。注意到用“参考坐标系下速度向量呈封闭的圆形或椭圆形”这一准则只能判别出对流速度等于坐标系平移速度 U_{frame} 的展向旋涡, 因此图 7(a)和(b)中的速度向量无法显示黑色线框以外的另一个马蹄涡的涡头。在使用速度向量法时, 由于事先并不知道马蹄涡涡头的确切位置, 因此需要对 U_{frame} 进行试算; 事实上, 我们尝试了 U_{frame} 从 $0.6U_\infty \sim 1.0U_\infty$ 的多种情况, 最终发现当 $U_{frame} = 0.7U_\infty$ 和 $0.9U_\infty$ 时速度向量场中出现明显的椭圆形封闭区域。对照图 10(将在下一节讨论)可以发现, $U_{frame} = 0.7U_\infty$ 和 $0.9U_\infty$ 分别对应于马蹄涡在 $y^+ = 30$ 和 90 附近的平均流向对流速度。

相比于速度向量法需要试算马蹄涡涡头的对流速度, $FTLE$ 法能够直观的给出马蹄涡的空间形态, 并且不需要人为给定判别阈值, 因此具有客观性; 同时能够一次性给出具有不同对流速度的马蹄涡结构, 提高了判别精度。此外, 图 7(c)中的伪彩色图给出了瞬时展向涡量 ω_z 的分布, 对照图 7(a)和(b)可以发现, 左下方小尺度马蹄涡的涡头具有相对集中的负展向涡量, 但其形状并不规则; 而右上方大尺度马蹄涡

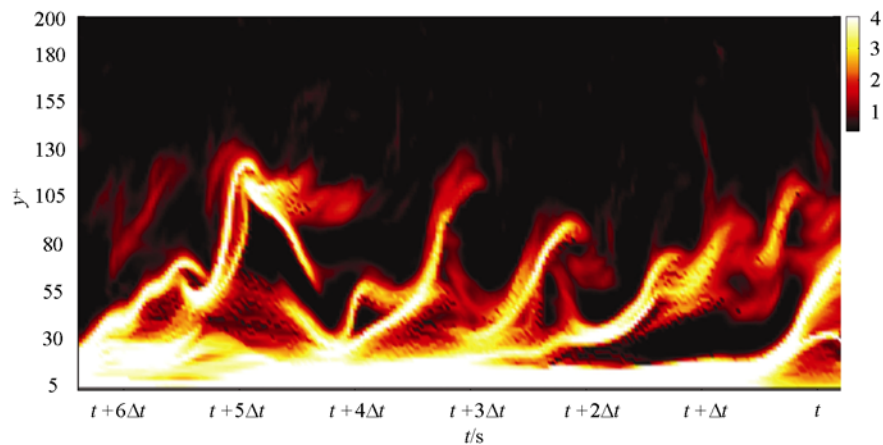


图 6 $FTLE$ 在充分发展湍流边界层中 (t, y) 平面内分布的示意图
 $x = 1100 \text{ mm}, \Delta t = 0.5 \text{ s}$

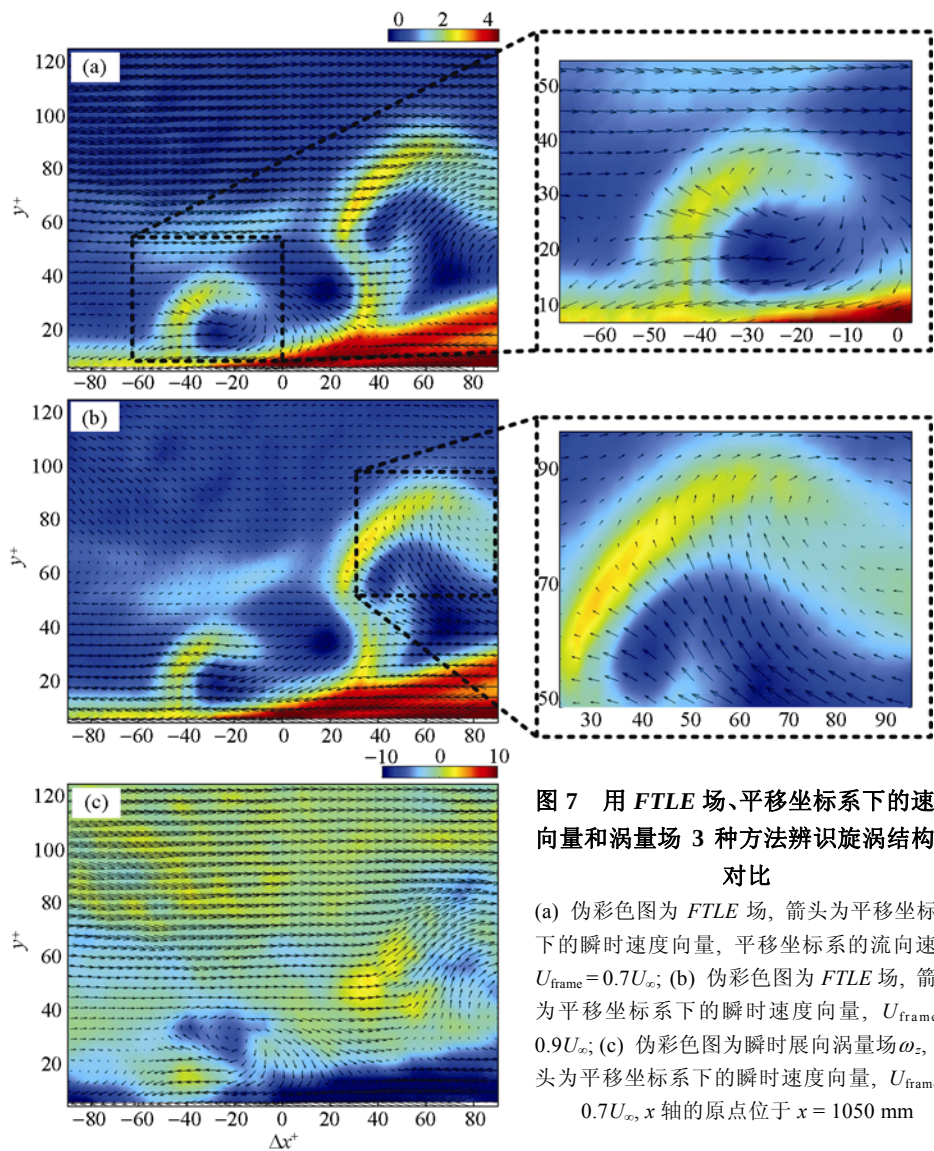


图 7 用 $FTLE$ 场、平移坐标系下的速度向量和涡量场 3 种方法辨识旋涡结构的对比

(a) 伪彩色图为 $FTLE$ 场, 箭头为平移坐标系下的瞬时速度向量, 平移坐标系的流向速度 $U_{\text{frame}} = 0.7U_{\infty}$; (b) 伪彩色图为 $FTLE$ 场, 箭头为平移坐标系下的瞬时速度向量, $U_{\text{frame}} = 0.9U_{\infty}$; (c) 伪彩色图为瞬时展向涡量场 ω_z , 箭头为平移坐标系下的瞬时速度向量, $U_{\text{frame}} = 0.7U_{\infty}$, x 轴的原点位于 $x = 1050 \text{ mm}$

头所在的空间位置上并不存在明显的涡量集中区. 这一结果说明, 在剪切流动中不能简单的用涡量集中区来表示旋涡结构, 必须使用涡辨识方法对旋涡结构进行定量辨识.

5 LCS 的统计特性

由于 LCS 主要呈现为向壁面倾斜的条带状形态, 因此它与壁面的夹角 θ 是描述 LCS 空间形态的一个重要指标, LCS 与壁面夹角 θ 的定义见图 5. 为了对 θ 进行统计分析, 需要对每一时刻 $FTLE$ 在 (x, y) 平面内的分布抽取典型 LCS, 其方法如图 5 所示: 忽略 $FTLE < 0$ 的空间点, 对剩余的空间点寻找 $FTLE$ 空间导数 $(\partial FTLE / \partial x)^2 + (\partial FTLE / \partial y)^2$ 接近零的位置; 如果该位置处的 $FTLE$ 在 5×5 个网格点的邻域内有当地最大值, 则将其标记为最大值点; 连接所有最大值点得到 $FTLE$ 的空间脊线, 如果脊线的长度大于特定阈值, 则将该脊线认为是典型 LCS, 对应于马蹄涡在截面上的投影. 对抽取出来的 LCS 在不同的法向高度上计算与壁面的倾斜角 θ , 图 8(a)~(c) 分别给出了 LCS 倾斜角 θ 在法向高度 $y^+ = 15, 55$ 和 115 处的概率密度分布. 在靠近壁面的 $y^+ = 15$ 和 55 高度上, θ 的均值分别为 6° 和 13° , 其概率密度分布近似于 t 分布:

$$P(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\frac{\nu + \left(\frac{\theta - \mu}{\sigma}\right)^2}{\nu} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (5)$$

其中 μ 为中值, σ 为标准差. 而在 $y^+ = 115$ 的高度上, θ 的概率密度呈现为双峰分布, 两个概率密度峰分别

出现在 $\theta = 0^\circ$ 和 25° 附近, 结合瞬时马蹄涡的形态(图 6 和图 7), 马蹄涡的头部和颈部都可能出现在 $y^+ = 115$ 的高度附近, 因此 $\theta = 0^\circ$ 的概率峰值可能对应于马蹄涡的涡头, 而 $\theta = 25^\circ$ 的概率峰可能描述马蹄涡颈部的倾角.

LCS 与壁面的夹角 θ 还可以通过 $FTLE$ 的空间相关来计算. 空间两点 $FTLE$ 信号的相关系数定义如下:

$$R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) = \frac{FTLE_A(x_0, y_0)FTLE_B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\sigma_A \sigma_B}. \quad (6)$$

图 9(a) 给出了四组 $FTLE$ 的空间相关系数 $R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ 在 $(\Delta x, \Delta y)$ 平面内的分布, 每组 $R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ 有相同的 x_0 ($x_0 = 1050 \text{ mm}$) 和不同的 y_0^+ ($y_0^+ = 15, 50, 85$ 和 120). 如图 9(a) 所示, 在不同 y_0^+ 高度上的 $R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ 都呈现出向壁面倾斜的条状分布, 与瞬时 LCS 类似, 其拓扑形态可以用 $R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ 分布的脊线来表述. 对不同的 $R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ 分布在 (x_0, y_0) 处计算其脊线与壁面的夹角 θ_R . 图 9(b) 对比了由抽取瞬时 LCS 得到的倾斜角 θ 的统计均值、最可几值和空间相关系数的脊线在 (x_0, y_0) 处的倾斜角 θ_R . 总体而言, 由瞬时 LCS 得到的倾斜角 θ 的统计均值和由空间相关系数脊线得到的倾斜角 θ_R 在整个法向范围内的数值均比较接近, 证明 $R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ 在空间分布的脊线在 (x_0, y_0) 附近可以代表该位置处瞬时马蹄涡的平均形态. 两者的数值沿法向先增加后减少, 可用二阶多项式进行拟合. 在法向高度 $y^+ < 60$ 的范围内, θ 的统计最可几值与 θ 的统计均值和 θ_R 在数值上接近, 结

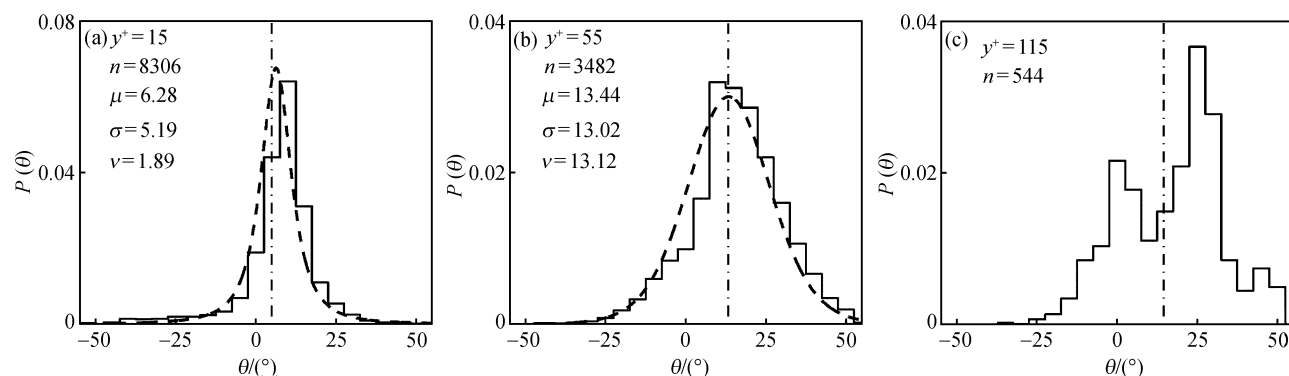
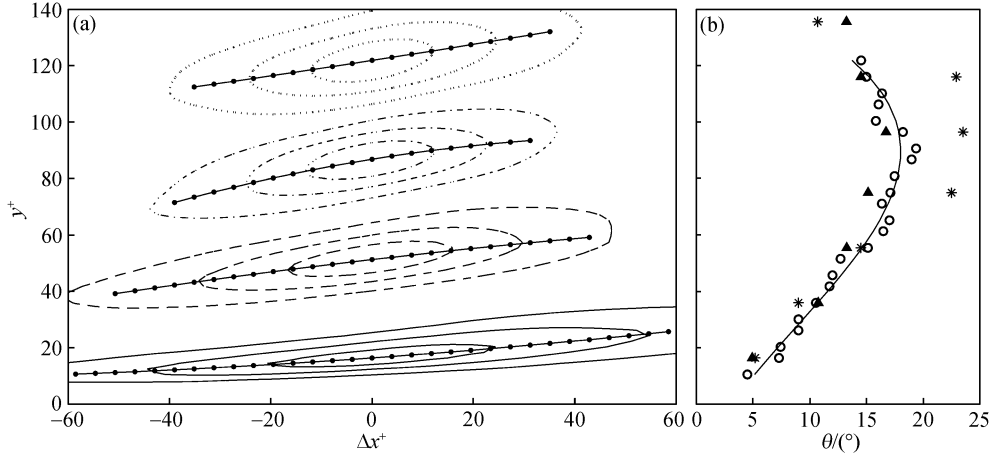


图 8 LCS 倾斜角 θ 在不同法向高度上的概率密度分布
(a) $y^+ = 15$; (b) $y^+ = 55$; (c) $y^+ = 115$; --- 示 t 分布, — 示 θ 的均值


 图 9 用空间相关法计算充分发展湍流边界层侧视图中 LCS 的倾斜角 θ

(a) 不同 (x_0, y_0) 位置上 $R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ 在 (x, y) 平面内的分布, $x_0 = 1050$ mm, 等值线图表示: 一示 $y_0^+ = 15$; --- 示 $y_0^+ = 50$; - · - 示 $y_0^+ = 85$; ··· 示 $y_0^+ = 120$, 等值线图的数值从 0.4~0.8 间隔 0.2 变动, — · — 示各等值线图的脊线; (b) LCS 的倾斜角沿 y 方向的分布: ○ 示由空间相关系数脊线得到的倾斜角 θ_R , ▲ 示由瞬时 LCS 得到的倾斜角 θ 的统计均值, * 示由瞬时 LCS 得到的倾斜角 θ 的统计最可几值, —— 示二阶多项式拟合

合图 8(a)和(b)可以发现, 在近壁区 $P(\theta)$ 的分布较集中, 说明马蹄涡在近壁区保持较为单一的形态. 在 $y^+ > 60$ 之后, θ 的统计最可几值与 θ 的统计均值的偏差逐渐增大, θ 的最可几峰值出现在 $y^+ = 100$ 的高度上, 其数值为 24° . 在 $y^+ = 100$ 之后 θ 的最可几值逐渐减少, 说明马蹄涡开始逐渐向壁面弯折. 因此可以判断, 马蹄涡从颈部向头部的过渡最有可能出现在 $y^+ = 100$ 附近, 图 5 和 7 显示的瞬时马蹄涡形态可以部分证明这一推论.

由于马蹄涡的存在, 空间上某固定点的 $FTLE$ 在数值上将出现准周期性的变化, 这一变化即可反映马蹄涡向下游对流的信息, 因此可以对 $FTLE$ 进行时空相关分析以得到 LCS 的对流速度. 空间上高度相等、流向距离相差 Δx 的 A, B 两点的 $FTLE$ 时空相关系数按照下式计算:

$$R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \tau) = \frac{\overline{FTLE(x_0, y_0, t)FTLE(x_0 + \Delta x, y_0, t + \tau)}}{\sigma_A \sigma_B} \quad (7)$$

在实际计算中 A 点的流向位置固定在 $x_0 = 1050$ mm, 法向高度可变, $\Delta x = 10$ mm. 图 10(a)给出了 A 点位于 $x_0 = 1050$ mm, $y_0^+ = 50$, B 点位于 $x_B = x_0 + \Delta x = 1060$ mm, $y_B^+ = y_0^+ = 50$ 时的时空相关系数 $R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \tau)$. 如图 10(a)所示, 相关系数在 $\tau = \tau_c^*$ 的位置上出现峰值, 说明 B 点的 $FTLE(t)$ 在经历时间延迟 τ_c^* 之后与 A 点的

$FTLE(t)$ 具有最大相关性, 因此可以将 τ_c^* 视为 $FTLE$ 所显示的 LCS 从 A 点对流至 B 点的平均时间. 如果 A 点和 B 点之间的距离 Δx 足够小, 则可以用 $\Delta x / \tau_c$ 作为 LCS 平均对流速度的流向分量 U_c 的近似, 即 $U_c \approx \Delta x / \tau_c$. 用这种方法可以得到 LCS 在不同 y_0 高度上的平均流向对流速度 U_c . 图 10(b)给出了在 $x_0 = 1050$ mm 处 U_c 沿法向的分布, 其中 U_c 用自由来流速度 U_∞ 无量纲化. 如图 10(b)所示, $U_c(y)$ 在 $y^+ > 30$ 的高度以上与当地湍流边界层的时均速度型基本一致, 这一结果与 Adrian 等人 [23] 在湍流边界层远壁区观测马蹄涡涡头对流速度的结果相一致, 并进一步说明: 在湍流边界层对数区以上的范围内, 马蹄涡的对流能够决定流体的输运特性, 从而决定边界层的时均速度型.

6 结论

本文应用基于 Lagrangian 体系的有限时间 Lyapunov 方法, 从 PIV 测量得到的充分发展湍流边界层二维速度场中辨识具有 Lagrangian 性质的拟序结构. 典型的 LCS 在 (x, y) 平面内呈现向壁面倾斜的条带状形态, 一端延伸至近壁流区, 另一端向外层伸展, 并具有明显的展向旋转趋势. 通过和前人研究的比较可以发现, 这种 LCS 显示的是广义马蹄涡在侧视图上的投影. 将有限时间 Lyapunov 方法与速度向量法在旋涡辨识能力上进行对比, 发现 $FTLE$ 方法不

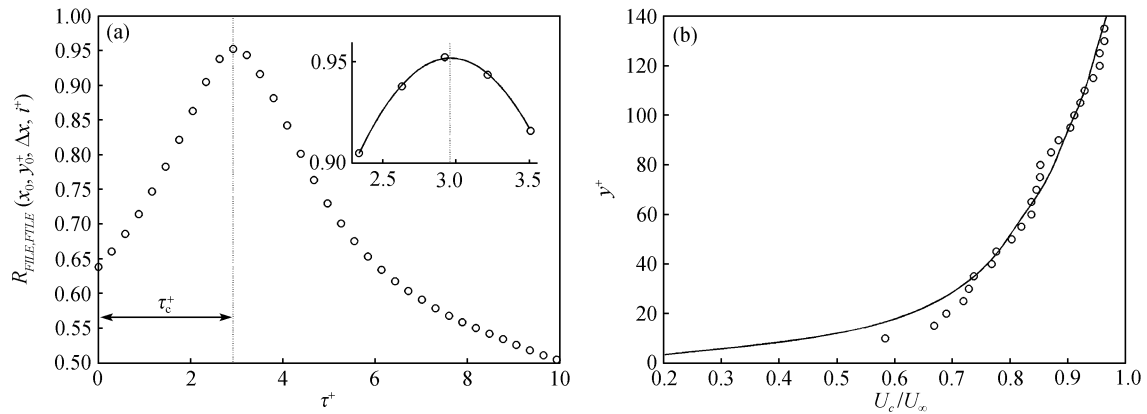


图 10 由 $FTLE$ 的时空相关计算 LCS 的对流速度

(a) 空间 A, B 两点 $FTLE(t)$ 的时空相关系数 $R_{FTLE, FTLE}(x_0, y_0, \Delta x, \tau)$ 随时间延迟 τ 的变化; (b) 在 $x_0 = 1050 \text{ mm}$ 处 LCS 对流速度的流向分量 U_c 在法向上的分布情况, U_c 用 U_∞ 无量纲化, —— 示当地边界层时均速度型

需要试算马蹄涡涡头的对流速度即可直观地给出马蹄涡的空间形态, 且不需要人为给定判别阈值, 因此具有客观性。

对从 $FTLE$ 场中辨识出的 LCS 进行统计分析, 发现其倾斜角 θ 在法向上先增加后减少, θ 的概率密度分布在近壁区符合 t 分布, 而在外层呈现为双峰分布, 分别对应马蹄涡的头部和颈部。对 $FTLE$ 场的空间相关分析表明, LCS 的平均倾斜角 θ_R 沿法向先增加后减

小, 与瞬时 LCS 倾斜角 θ 的统计均值相一致。 θ 的最可几值在 $y^+ = 100$ 附近出现最大值, 由此判断, 马蹄涡从涡颈向涡头的过渡最有可能出现在 $y^+ = 100$ 的高度上。最后对 $FTLE$ 场进行了时间—空间相关分析, 得到广义马蹄涡的平均流向对流速度, 对流速度沿法向的分布与当地边界层对数区的时均速度型基本一致, 说明在湍流边界层中, 马蹄涡的对流决定了边界层内的流体输运特性。

参考文献

- 1 Kline S J, Reynolds W C, Schraub F A, et al. The structure of turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*, 1967, 30: 741—773 [\[DOI\]](#)
- 2 连洪祥. 湍流边界层拟序结构的实验研究. *力学进展*, 2006, 36(3): 373—388
- 3 张东明, 罗纪生, 周恒. 湍流边界层近壁区相干结构的动力学模型. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2003, 33(1): 76—82
- 4 黄章峰, 周恒, 罗纪生. 基于 DNS 数据库的超音速湍流边界层近壁区相干结构的研究. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2006, 36(6): 653—661
- 5 Adrian R J. Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Phys Fluids*, 2007, 19(4): 041301 [\[DOI\]](#)
- 6 Robinson S K. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annu Rev Fluid Mech*, 1991, 23: 601—639 [\[DOI\]](#)
- 7 Acarlar M S, Smith C R. A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer. Part 1. Hairpin vortices generated by a hemisphere protuberance. *J Fluid Mech*, 1987, 175: 1—41 [\[DOI\]](#)
- 8 Acarlar M S, Smith C R. A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer. Part 2. Hairpin vortices generated by fluid injection. *J Fluid Mech*, 1987, 175: 43—83 [\[DOI\]](#)
- 9 Pan C, Wang J J, Zhang P F, et al. Coherent structures in bypass transition induced by a cylinder wake. *J Fluid Mech*, 2008, 603: 367—389
- 10 Hunt J C R, Wray A A, Moin P. Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows. Technical Report CTR-S88, Stanford University. 1988, 193—208
- 11 Jeong J, Hussain F. On the identification of a vortex. *J Fluid Mech*, 1995, 285: 69—94 [\[DOI\]](#)
- 12 Chong M S, Perry A E, Cantwell B J. A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys Fluids A*, 1990, 2: 765—777 [\[DOI\]](#)

- 13 Zhou J, Adrian R J, Balachandar S, et al. Mechanism for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow. *J Fluid Mech*, 1999, 387: 353—396[DOI]
- 14 Green M A, Rowley C W, Haller G. Detection of Lagrangian coherent structures in three-dimensional turbulence. *J Fluid Mech*, 2007, 572: 111—120[DOI]
- 15 Haller G, Yuan G. Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence. *Physica D*, 2000, 147: 352—370[DOI]
- 16 Haller G. Distinguished material surfaces and coherent structures in 3D fluid flows. *Physica D*, 2001, 149: 248—277[DOI]
- 17 Shadden S C, Dabiri J O, Marsden J E. Lagrangian analysis of fluid transport in empirical vortex ring flows. *Phys Fluids*, 2006, 18: 047105[DOI]
- 18 Shadden S C, Katija K, Rosenfeld M, et al. Transport and stirring induced by vortex formation. *J Fluid Mech*, 2007, 593: 315—331
- 19 Mathur M, Haller G, Peacock T, et al. Uncovering the Lagrangian skeleton of turbulence. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 144502[DOI]
- 20 Scarano F, Riethmuller M L. Advances in iterative multigrid PIV image processing. *Exp Fluids*, 2000, 29(7): S51—S60[DOI]
- 21 White F M. *Viscous Fluid Flow*. Washington: McGraw-Hill Press, 1974
- 22 王晋军, 夏克青. 雷诺数对湍流特性的影响. *力学与实践*, 1999, 21(6): 1—7
- 23 Adrian R J, Meinhart C D, Tomkins C D. Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*, 2000, 422: 1—54[DOI]