

Reed-Muller 型通用逻辑组件的逻辑综合

陈偕雄 吴训威

(杭州大学物理系)

摘 要

本文提出了使用 Reed-Muller 型通用逻辑组件综合函数的方法。文中引用了表示 Reed-Muller 展开系数 b_i 的图形方法^[1](简称 b_i 系数图), 这种图形方法具有适合基于积之异或关系的逻辑网络的综合特点。此外, 还指出了在积之和型数据选择器实现及积之异或实现之间的相似之处。

一、引 言

任意组合函数的一个标准展开形式为积之和形式, 与之相应的函数最小化业已成为标准设计程序。函数的另一个标准展开形式为 Reed-Muller 展开式, 与之相应的函数与一异或形式的最小化技术也可以在许多文献中找到^[2]。然而, 实现上述基本运算的门的输入端是完全对称的, 因而逻辑功能不强。在用它们作为基本单元组成大规模集成电路时, 需要较多的单元及连线, 从而影响集成度的进一步提高。为此, 人们期望与探求有一种逻辑功能更强的新颖逻辑元件。通用逻辑组件 (Universal-Logic-Module), 或称通用逻辑门 (Universal-Logic-Gate) 就

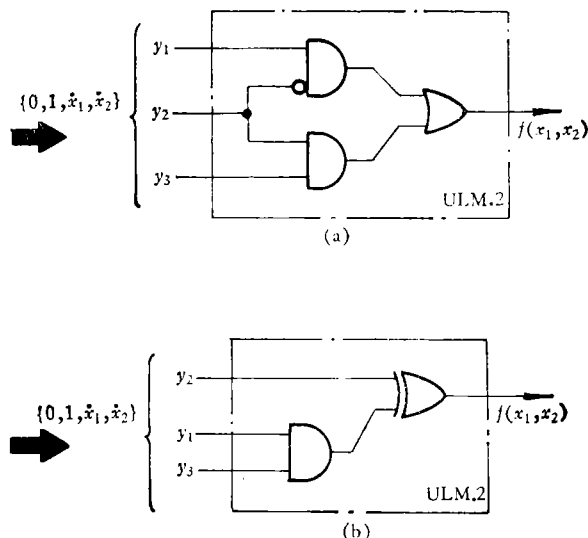


图 1 能实现 $n \leq 2$ 的全部函数的两个 ULM.2 结构

(a) 数据选择型 ULM, (b) R-M 型 ULM.

是这样一种新元件,它可以通过输入端的不同连接方式实现一系列逻辑函数。如果它能实现变量数不大于 n 的全部逻辑函数,则称它为 n 变量的通用逻辑组件或通用逻辑门,并分别记作 ULM. n 及 ULG. n 。作者在文献[4—8]中提出了一些 ULM.2 和 ULM.3 以及它们的电路结构,通过比较指出了 ULM.^(L)2 和 ULM.^(M)2 是二个有可能被采纳为大规模集成电路单元的最佳通用逻辑组件。它们的逻辑功能为

$$\text{ULM.}^{(L)}2 = y_1 \bar{y}_2 + y_2 y_3,$$

$$\text{ULM.}^{(M)}2 = y_2 \oplus y_1 y_3.$$

图 1(a)和图 1(b)分别表示了它们的结构,图中 $\bar{x}_i$ 表示变量的两种极性,即原变量和反变量。ULM.^(L)2 为数据选择型细胞,而 ULM.^(M)2 为 Reed-Muller 型(R-M)细胞,两者均能借助于适当的输入连接方式实现全部二变量函数。使用数据选择器的综合方法可以在文献中找到^[3]。然而,缺少使用 R-M 型 ULM.^(M)2 的综合方法。作为对 ULM 的研究的继续,本文将讨论这个问题。

二、 b_j 系数图

我们在文献[1]中提出的 b_j 系数图为使用 ULM.^(M)2 的逻辑综合提供了一个直观的图形工具。任意 n 变量函数 $f(x_1 \cdots x_n)$ 的标准 Reed-Muller 展开可表示如下:

$$f(x_1 \cdots x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \cdots \oplus a_n x_n \oplus \cdots \oplus a_{2^n-1} x_1 x_2 \cdots x_n. \quad (1)$$

该式可改写为:

$$f(x_1 \cdots x_n) = b_0 x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^0 \oplus b_1 x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^1 \oplus \cdots \oplus b_{2^n-1} x_1^1 x_2^1 \cdots x_n^1, \quad (2)$$

式中 $x_i^1 = x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, $x_i^0 = 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$, $b_j \in \{0, 1\} (j = 0, 1, \cdots, 2^n - 1)$ 。由于对方程(1)的重新排序, b_j 系数的下标 j 可用各 x_i 上标相应的二进制数表示。根据(2)式可以建立一个类似于卡诺图的图形结构,然而被填入图中的是任意给定函数的 b_j 系数,这样一种图形结构称为 b_j 系数图^[1]。

考虑三变量函数的展开($n = 3$):

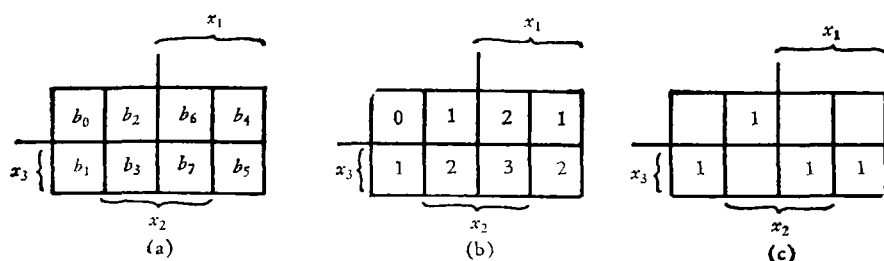
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = & b_0 x_1^0 x_2^0 x_3^0 \oplus b_1 x_1^0 x_2^0 x_3^1 \oplus b_2 x_1^0 x_2^1 x_3^0 \oplus b_3 x_1^0 x_2^1 x_3^1 \oplus b_4 x_1^1 x_2^0 x_3^0 \oplus b_5 x_1^1 x_2^0 x_3^1 \\ & \oplus b_6 x_1^1 x_2^1 x_3^0 \oplus b_7 x_1^1 x_2^1 x_3^1. \end{aligned} \quad (3)$$

图 2(a)表示了三变量的 b_j 系数图。图中各格表示特定的 b_j 系数。系数 b_0 相应于 x_1, x_2, x_3 的非括入区; b_1 被 x_3 括入,但未被 x_1, x_2 括入; $\cdots b_7$ 为 x_1, x_2, x_3 同时括入。图 2(b)表示了与各 b_j 系数相联系的乘积项中的变量数。类似地可以得到四变量或更多变量的 b_j 图。

在 b_j 图上,相邻的 $b_j = 1$ 的格子,可以借鉴传统卡诺图中 1 值最小项格的聚合方式,用于化简函数。然而, $b_j = 1$ 格聚合圈的解释,完全不同于 K 图最小项合并,它遵循以下规则:

1. 如果某 1 值格聚合圈全部为变量 x_i 所括入,则该变量以原变量形式出现于该乘积项之中。
2. 如果某聚合圈完全在变量 x_i 括入区外,则在乘积项中该变量消失。
3. 如果某聚合圈一半被变量 x_i 括入,而另一半未被括入,则该变量以反变量形式出现在乘积项之中。

例如,在图 3(a)中我们可以圈住 b_2, b_3 , 相应的乘积项为 $x_2 \bar{x}_3$ 。类似地,图 3(b)和(c)的最小化给出了乘积项 $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ 和 $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ 。应该注意到这些结果也可以用代数方法获得。例如在

图 2 b_i 系数图

(a) 三变量 b_i 图, (b) 与各 b_i 相应的乘积项中变量数,
 (c) 函数 $f(x) = b_1x_3 \oplus b_2x_2 \oplus b_3x_1x_3 \oplus b_7x_1x_2x_3$ 的 b_i 图

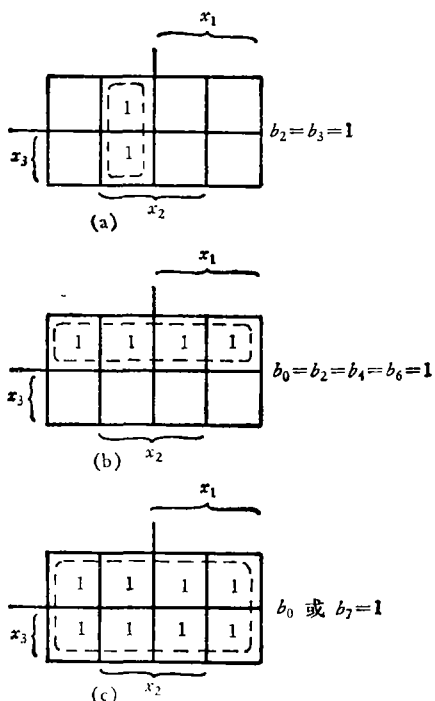


图 3 标准 Reed-Muller 展开的乘积项异或之最小化

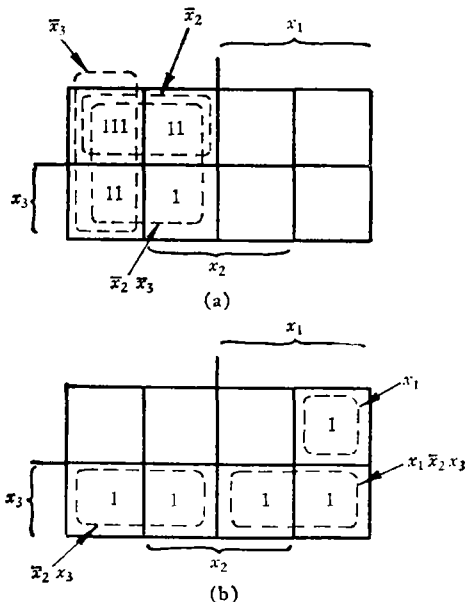
- (a) $f(x) = x_2 \oplus x_2x_3$,
 (b) $f(x) = 1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$,
 (c) $f(x) = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_1x_2x_3$.

图 3(b) 中, 我们有:

$$f(x_1, x_2, x_3) = b_0 \oplus b_2x_2 \oplus b_4x_1 \oplus b_6x_1x_2 = 1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 = (1 \oplus x_2) \oplus x_1(1 \oplus x_2) \\ = (1 \oplus x_1) \cdot (1 \oplus x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2.$$

但是相比之下, b_i 图能够较快地得到同样的结果。

如果某函数 $f(x)$ 具有标准的 R-M 形式, 则它的 b_i 系数可直接填入 b_i 图中。反之, 如果函数 $f(x)$ 以布尔积之和形式出现, 则可以通过使用上述规则在 b_i 图上得到各 b_i 系数, 但是要适当地注意相交项。例如, 给定函数 $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 + \bar{x}_3$, 展开此式以得到所有可能的乘

图 4 标准 b_i 系数的获得

- (a) $f(x) = \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 = 1 \oplus x_2x_3$,
 (b) $f(x) = x_1 + \bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3$
 $= x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$.

积项:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

于是, $f(x_1, x_2, x_3)$ 可写成与/异或形式:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

利用上述规则 (1)–(3), 可将上式中各乘积项填入 b_i 图. 注意到如果在给定的积之和形式中的乘积项互不相交, 则不会出现附加的乘积项. 最后必须检查 b_i 图上各格, 凡是圈入次数为奇数的 b_i 格填 1, 偶数者 (包括零) 填 0. 于是可以得到相应于任意给定函数的标准 R-M 展开的各 b_i 系数. 图 4 表示了这个过程. 以上这些规则也可用来获得函数 $f(x)$ 的一般 R-M 展开 (即 GRM 展开)^[4].

三、使用 R-M 型通用逻辑组件 ULM.^(M)2 综合组合函数的一般方法

为了用图 1(b)所示的 ULM.^(M)2 实现 $n > 2$ 的任意组合函数, 可以采用图 5 所示的树型结构. 该结构类似于数据选择器树, 具有 $n-1$ 个控制输入端和 2^{n-1} 个残余输入 c_j , $c_j \in \{0, 1, \bar{x}_n\}$, $j = 0-2^{n-1}-1$. 当 x_1-x_{n-1} 被选作控制输入时, 所需的 c_j 可以由标准 RM 展开式通过括公因子而获得:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= b_0 \oplus b_1 x_n \oplus b_2 x_{n-1} \oplus b_3 x_{n-1} x_n \oplus \dots \oplus b_{2^{n-1}-1} x_1 x_2 \dots x_{n-1} \\ &= (b_0 \oplus b_1 x_n) \oplus (b_2 \oplus b_3 x_n) x_{n-1} \oplus (b_4 \oplus b_5 x_n) x_{n-2} \oplus \dots \oplus (b_{2^{n-2}-1} \oplus b_{2^{n-1}-1} x_n) x_1 \dots x_{n-1}. \end{aligned}$$

由图 5 容易得到:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_{n-1} \oplus c_2 x_{n-2} \oplus c_3 x_{n-2} x_{n-1} \oplus \dots \oplus c_{2^{n-1}-1} x_1 x_2 \dots x_{n-1}. \quad (5)$$

比较 (4) 与 (5) 式可得:

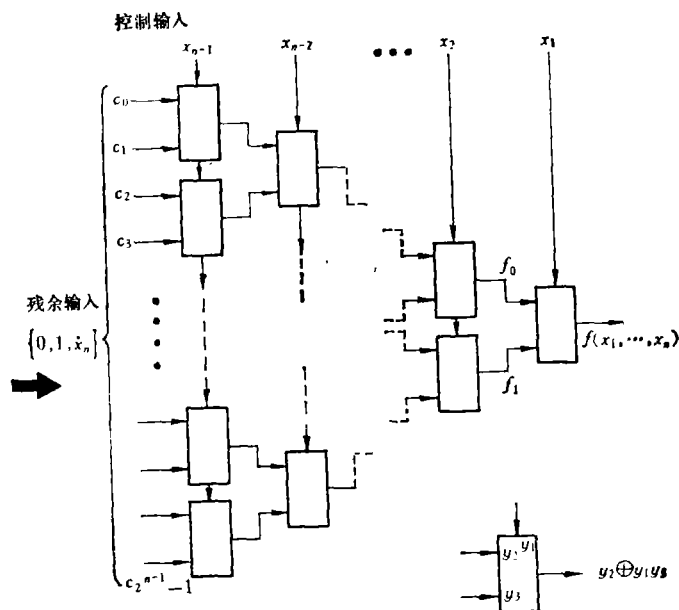


图 5 用 ULM.^(M)2 实现 $n > 2$ 函数的树型结构

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= b_0 \oplus b_1 x_n, \\ c_1 &= b_2 \oplus b_3 x_n, \\ &\vdots \\ c_{2^{n-1}-1} &= b_{2^{n-2}} \oplus b_{2^{n-1}-1} x_n, \end{aligned} \right\} c_i \in \{0, 1, x_n\}. \quad (6)$$

这些 c_i 的值也可表示成矩阵形式。回到方程(2), 可以重新表示 R-M 展开如下:

$$f(x) = [b_0 b_1 \cdots b_{2^n-1}] * \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{2^n-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中 p_i 表示乘积项 $x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^0$ 到 $x_1^1 x_2^1 \cdots x_n^1 (i = 0-2^n-1)$, $*$ 表示矩阵相乘过程中的求和为模 2 加。于是(6)式所确定的 c_i 可表示成如下矩阵形式:

$$(c_0 c_1 \cdots c_{2^n-1}) = (1 \ x_n) * \begin{bmatrix} b_0 b_2 \cdots b_{2^{n-2}} \\ b_1 b_3 \cdots b_{2^{n-1}-1} \end{bmatrix} = (1 \ x_n) * [B], \quad (8)$$

矩阵 $[B]$ 称为以 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ 为控制变量的分解系数矩阵, 它是 b_i 系数的适当排列。

如果单变量 x_i 作为控制变量, 而 f_0, f_1 作为残余输入, 则可以得到类似的矩阵格式。如取 x_1 为控制输入变量, 则有:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_0 b_1 \cdots b_{2^{n-1}-1} \\ b_{2^{n-1}} b_{2^{n-1}+1} \cdots b_{2^n-1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{2^{n-1}-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_0 b_1 \cdots b_{2^{n-1}-1} \\ b_{2^{n-1}} b_{2^{n-1}+1} \cdots b_{2^n-1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \\ x_{n-1} \\ x_n x_{n-1} \\ \vdots \\ x_n \cdots x_2 \end{bmatrix}. \quad (9) \end{aligned}$$

然而, 对任意一组控制变量的残余函数 c_i 也可以用 b_i 图来确定。例如考虑一个图 6(a)所示的四变量函数。当以 x_1, x_2, x_3 为控制变量时, x_1, x_2, x_3 轴将 b_i 图划分为八个子 b_i 图, 如图 6(b)所示。类似地可以得到以其它变量组合为控制变量时的 b_i 图, 它们分别如图 6(c)~(e)所示。图 6(b)中那些子 b_i 图是以 x_4 为变量的单变量 b_i 图。利用前述规则, 可以从各子 b_i 图中直接确定相应的 $c_i, c_i = b_k \oplus b_l x_i$, 其中 b_l 为图中 x_i 括入区内的系数, 而 b_k 为 x_i 括入区外的系数。对于图 6(f)所示函数可得到 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 为控制变量时相应的 c_i :

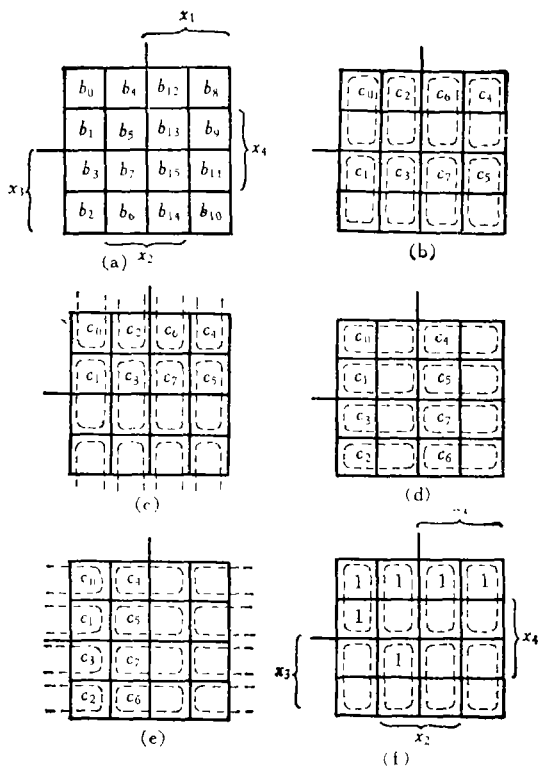


图 6 用于求残余输入 c_i 的四变量 b_i 图

(a) 四变量 b_i 图, (b) $x_1 x_2 x_3$ 为控制变量时, $c_i = b_k \oplus b_{k+1} x_4$, (c) $x_1 x_2 x_4$ 为控制变量时, $c_i = b_k \oplus b_{k+1} x_3$, (d) $x_1 x_3 x_4$ 为控制变量时, $c_i = b_k \oplus b_{k+1} x_2$, (e) $x_2 x_3 x_4$ 为控制变量时, $c_i = b_k \oplus b_{k+1} x_1$, (f) 函数 $f(x) = 1 \oplus x_4 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 x_4$ 的实现。

$$\begin{aligned} c_0 &= \bar{x}_4, & c_1 &= 0, & c_2 &= 1, & c_3 &= x_4, \\ c_4 &= 1, & c_5 &= 0, & c_6 &= 1, & c_7 &= 0. \end{aligned}$$

必须指出,控制变量的选择将影响到残余输入的复杂性,因而需要有一个最佳选择程序。我们将在下节中予以详细介绍。

四、使用 R-M 型 ULM.^(M)2 的最小化综合考虑

1. 固定拓扑考虑

使用图 5 所示的 $2^{n-1} - 1$ 个 ULM.^(M)2 固定的 $(n-1)$ 级树型拓扑实现 n 变量函数时,常常希望有尽可能多的残余输入取 0 或 1,以使取值为变量或变量之反的残余输入数为最少。这就要求从变量 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 中选择最佳控制变量 x_i 。

由(8)式可得:

$$c_j = [1 \ x_c] * \begin{bmatrix} b_k \\ b_l \end{bmatrix},$$

式中 x_c 为残余输入变量, b_k, b_l 为以除 x_c 外的其它变量为控制变量的分解系数矩阵 $[B]$ 中相应的 b_j 系数对。由此可得:

$$c_j = \begin{cases} 0, & \text{如 } \begin{bmatrix} b_k \\ b_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ 1, & \text{如 } \begin{bmatrix} b_k \\ b_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ x_c, & \text{如 } \begin{bmatrix} b_k \\ b_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \bar{x}_c, & \text{如 } \begin{bmatrix} b_k \\ b_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (10)$$

由此可见,为使 $c_j = 0$ 或 1,要求 $b_l = 0$ 。

如果列出对于各输入变量的分解系数矩阵 $[B]$,则其中 $b_l = 0$ 数最多者即为最佳选择。然而,由于 b_l 是位于 b_j 图中 x_i 括入区内的 b_j 系数,因此我们可以通过检查给定函数的 b_j 图以确定最佳第一级分解。例如,对图 6(f) 所示函数,在 x_1, x_2, x_3, x_4 各变量括入区内分别有 6, 5, 7, 6 个 0 值系数,显而易见,最佳选择是将 x_3 作为残余输入变量。

作为一个替换方法,上述寻求最多 0 值 b_l 的程序,也可改用矩阵方法求取。如果我们考虑到在 b_j 图中 x_i 括入区内 x_i 取 1 值,然后对全部 x_i 计算 $\sum b_j x_i$,则该值等于 x_i 括入区内 $b_j = 1$ 的数目。这可表示如下:

$$[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2^n-1} \end{bmatrix} = t_i,$$

式中 $[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 1]$ 表示变量 x_i 的行矢量,而 t_i 则表示 $\sum b_j x_i$,即 x_i 括入区内 $b_j = 1$ 的数目。

很清楚,对于任意给定函数 $f(x_1 \cdots x_n)$, 我们可以通过进一步增加变换的行数来产生一组系数 $t_1 \cdots t_n$, 即:

$$[M] \cdot B = T].$$

矩阵 $[M]$ 中的每一行有 2^n 个元素, 它们相应于各输入变量, $B]$ 为函数的 R-M 展开系数列矢量, 而 $T]$ 则表示 x_i 括入区内 1 值格的总数. 对于 $n = 4$, 可以得到下式:

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{2^4-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}.$$

由于 b_i 只能取 0, 1, 因此 t_i 的最小值暗示括入区内 0 值格最多, 于是它表示了第一级分解的最佳选择. 对于图 6(f) 所示函数有:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}.$$

因此 x_3 作为残余变量时, 1 值格最少, 因而 0 值格最多, 从而表示它为最佳选择. 此时各 c_i 系数为:

$$[c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6 \ c_7] = [1 \ x_3] * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\bar{x}_4 \ 0 \ 1 \ x_4 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$$

2. 放宽的拓扑考虑

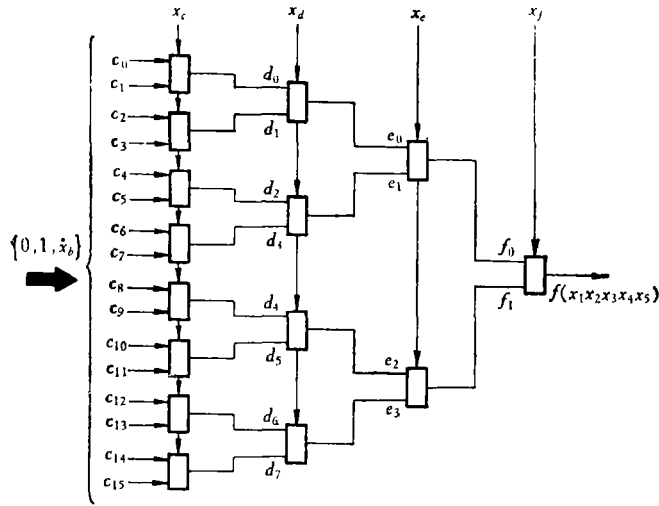
图 5 所示的通用拓扑, 具有垂直方向数据输入通道和水平方向输出函数通道的固定连接方式, 这对于标准化硅片布线很具吸引力. 然而, 如果不限于这种固定拓扑结构, 则使用 $ULM_2^{(M)}$ 实现给定函数的细胞总数的最小化比第一级残余输入函数的最优化更为重要.

考虑图 7 所示的结构, 第二级 $ULM_2^{(M)}$ 的输入为:

$$d_0 = c_0 \oplus c_1 x_c = (b_0 \oplus b_1 x_b) \oplus (b_2 \oplus b_3 x_b) x_c,$$

$$d_1 = c_2 \oplus c_3 x_c = (b_4 \oplus b_5 x_b) \oplus (b_6 \oplus b_7 x_b) x_c.$$

如果 d_0 为常量或单变量函数, 则前面的 $ULM_2^{(M)}$ 是多余的, 从而可省去. 这要求取值有如下关系: 即 $b_2 = b_3 = 0$ 或 $b_1 = b_3 = 0$. 其余十个 $b_0 \cdots b_7$ 的组合相应的残余输入函数为二变量函数, 因此可以用上述六个条件检查 b_i 系数值, 从而找到多余的 $ULM_2^{(M)}$.

图 7 $n = 5$ ULM. $_2^{(M)}$ 拓扑; x_b, x_c, x_d, x_e, x_f 选自 $\{x_1, x_2, \dots, x_5\}$

b_0	b_1	b_2	b_3	d_0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	x_c
0	1	0	0	x_b
1	0	0	0	1
1	0	1	0	$\bar{x}_c$
1	1	0	0	$\bar{x}_b$

进一步减少所需 ULM. $_2^{(M)}$ 总数的情况是两个 (或两个以上) ULM. $_2^{(M)}$ 具有相同的输入, 从而有相同的输出函数。只要这种相同的输出存在, 则只有一个细胞是必需的, 它的输出可为下一级输入所共用。注意到级间连接方式取决于细胞数最小化。

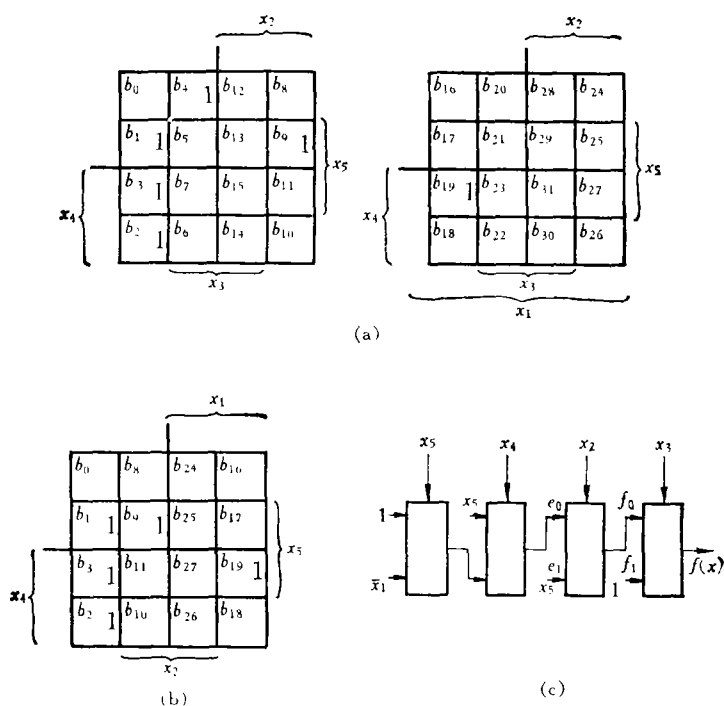
为了最大限度减少细胞总数, 要求在更高级寻找冗余细胞, 因此应从末级着手最小化。

由图 7 可以得到最终的输出函数为:

$$f(x_1 \cdots x_n) = f_0 \oplus f_1 x_f,$$

式中 $f_0 = f'(x_1 \cdots x_{f-1}, x_{f+1}, \cdots x_n)$, $f_1 = f''(x_1, \cdots x_{f-1}, x_{f+1}, \cdots x_n)$, $x_f \in \{x_1 \cdots x_n\}$ 。 f_0 包含了一半的 b_i 系数, 而 f_1 则包含了余下的一半。如果所选 x_f 可使得 $f_0 = f_1$; 或 $f_0 = 0$, 1, x_i 或 $\bar{x}_i$; 或 $f_1 = 0, 1, x_i$ 或 $\bar{x}_i$, 则图 7 中半数细胞可以省去。这些条件要求 b_i 系数存在如下关系:

- $f_0 = f_1$ 要求 b_i 图中 x_f 括入区的系数分布与图中另一半的系数分布相同。
- $f_0 = 0$ 要求 b_i 图中未被 x_f 括入的 b_i 系数为全零。
- $f_0 = 1$ 要求 b_i 图中未被 x_f 括入的 b_i 系数只有一个 1, 而且它不被任何变量所括入。
- $f_0 = x_i$ 要求 b_i 图中 x_f 括入区外只有一个 b_i 系数为 1, 而且它仅为一个变量 x_i 所括入。
- $f_0 = \bar{x}_i$ 要求 b_i 图中 x_f 括入区外有二个相邻 1 值格, 它们位于由 (c) 和 (d) 确定

图 8 $f(x) = x_5 \oplus x_4 \oplus x_4x_5 \oplus x_3 \oplus x_2x_5 \oplus x_1x_4x_5$ 的 ULM.2 实现(a) 给定函数的 b_i 图, (b) f_0 的 b_i 图, (c) 最终实现。

的方格。

(f) $f_i = 0, 1, x_i$ 或 $\bar{x}_i$ 要求与上述 (b)–(c) 相同, 所不同的是现在它们均位于 x_i 括入区。

上述条件可以通过直观检查 b_i 图格式进行寻找。总之, 要求在半 b_i 图中存在全零, 一个或二个 1 值格。顺便指出: 上述对称条件也可用谱技术或谱系数图^[10]进行检查。

让我们考虑具有以下标准 RM 展开形式的函数:

$$f(x_1 \cdots x_5) = x_5 \oplus x_4 \oplus x_4x_5 \oplus x_3 \oplus x_2x_5 \oplus x_1x_4x_5$$

图 8(a) 给出了它的 b_i 图。直观的检查表明对任何变量 x_i 不存在对称条件, 因此不存在 $f_0 = f_1$ 的分解。考虑各 x_i 括入区内、外的 $b_i = 1$ 数目:

	x_i 括入区内 1 值格数	x_i 括入区外 1 值格数
x_1	1	5
x_2	1	5
x_3	1	5
x_4	3	3
x_5	4	2

进一步检查 $b_i = 1$ 数不大于 2 的可能有用的分解。由于不存在全 0 括入区, 因此 $f_0 = 0$ 或 $f_1 = 0$ 的分解不可能。检查 x_1, x_2, x_3 的括入区与 x_5 的未括入区可以发现只有 x_2, x_3 满足条件 (b)–(c), 因此可选 x_3 或 x_2 作为最后级的控制变量。如选 x_3 为控制变量, 则有:

$$f(x) = f_0 \oplus f_1 x_3,$$

式中 $f_1 = 1$, 而 f_0 包含余下五个 1 值格, 如图 8(b) 所示。对函数 f_0 利用同样的程序可以得到:

$$f_0 = e_0 \oplus e_1 x_2,$$

式中 $e_1 = x_5$ 。进一步考虑余下诸级可以得到最后的综合, 如图 8(c) 所示。

一般说来, 这种基于最后级分解的综合方法是减少组件总数的最好的方法, 但它并不保证结果为最小化。这是因为上述方法是在固定极性下, 即全部控制变量均取原变量情况下得到的。在控制变量也可取变量之反情况下, 对上述函数的进一步分析可以得到如下综合:

$$f(x) = (x_3 \oplus \bar{x}_2 x_5) \oplus x_4 (1 \oplus \bar{x}_1 x_5).$$

虽然它需要两个反相输入变量, 但是它只需要三个 ULM.₂^(M), 并且是二级实现。因此, 如 x_1, x_2 为双轨输入, 它要较优一些。然而, 本节提出的方法在大多数情况下可以获得满意的结果。

五、结 论

本文介绍了使用 R-M 型 ULM.2 作为基本功能单元的逻辑综合。讨论表明, 使用这种细胞的综合方法与使用数据选择型细胞相类似, 特别是同样涉及到为了最小化的实现对控制输入的选择问题。

任意给定函数的标准 R-M 展开系数的图形表示, 即 b_i 系数图的引入为存在异或关系的函数分解提供了特别直接的揭示。假定一个函数是以一般 Reed-Muller 形式(即 GRM) 或者以积之和形式表示, 则 b_i 图可用来获得标准 RM 展开的 b_i 系数。因此它成为综合基于异或的网络以及组成用于这种网络的设计算法的关键。

分析表明, 控制变量的选择程序是利用 R-M 型 ULM.2 综合逻辑函数的一个关键。这与数据选择型细胞的综合很相似, 并由此暗示了适用于数据选择型的已有技术经修改也可适用于 R-M 型 ULM.2 的综合程序。

由于 ULM.2 和 ULM.3 均适合于作为大规模集成电路的基本单元, 因此对于使用 ULM.3 的综合的研究也是有意义的。使用 ULM.3 综合组合逻辑的方法已由文献[9]介绍。

最后, 通用逻辑功能的概念不仅适用于传统的二值逻辑, 而且可延拓于多值逻辑范畴。文献[11]指出, 具有与 ULM.₂^(M) 相同的函数形式, 但是不同的取值范围的 U_k 单元可以组成三值通用逻辑组件。它不仅组成了完备系, 而且具有更大的灵活性。

参 考 文 献

- [1] Wu, X. (吴训威), et al., *Proc. IEE*, **129**(1982), 15—20.
- [2] Saluja, K. K. and Ong, E. H., *IEEE Trans.*, **C-28**(1979), 535—537.
- [3] Yau, S. S. and Tang, C. K., *ibid.*, **C-19**(1970), 141—149.
- [4] Chen, X. (陈偕雄) and Hurst, S. L., *Int. J. Electronics*, **50**(1981), 1—13.
- [5] Chen, X. (陈偕雄) and Wu, X. (吴训威), *Proc. IEE*, **128**(1981), 205—211.
- [6] Wu, X. (吴训威) and Hurst, S. L., *Int. J. Electronics*, **51**(1981), 747—762.
- [7] Chen, X. (陈偕雄) and Hurst, S. L., *IEEE Trans.*, **C-31**(1982), 140—147.
- [8] Hurst, S. L. and Chen, X. (陈偕雄), *Proc. IEEE Int. Symp., on Circuits and Systems*, 1982, 1168—1171.
- [9] Chen, X. (陈偕雄), *The Radio and Electronic Engineer*, **53**(1983), 67—74.
- [10] Chen, X. (陈偕雄), *Comput. and Elect. Engrg.*, **9**(1982), 167—180.
- [11] 吴训威、陈偕雄, 中国科学A辑, 1983, 26: 847—856.