中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 7 期: 811～826
SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

正整数阶 Bergman-Sobolev 空间上的 Toeplitz 算子

何莉[1], 曹广福[2*]

1. 广州大学数学与信息科学学院, 广州 510006;
2. 华南农业大学数学与信息 (软件) 学院, 广州 510642
E-mail: helichangsha1986@163.com, guangfucao@163.com

收稿日期: 2016-02-19; 接受日期: 2016-12-08; 网络出版日期: 2017-03-03; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11501136 和 11671152)、广东省高水平大学建设重点学科建设 (批准号: 4601-2015) 和广州市市属高校科技计划 (批准号: 1201630152) 资助项目

摘要 单位圆盘上的 Bergman-Sobolev 空间上的 Toeplitz 算子比 Hardy 空间和 Bergman 空间复杂许多, 很多基本问题都有待解决. 本文刻画了正整数阶 Bergman-Sobolev 空间上的 Toeplitz 算子的有界性、紧性和 Fredholm 性质.

关键词 Bergman-Sobolev 空间 Toeplitz 算子 投影算子 Fredholm 性质

MSC (2010) 主题分类 32A37, 47B35, 47A30

1 引言

记 $\mathbb{D}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘, $\mathbb{T}$ 为其边界. dA 为 $\mathbb{D}$ 上的正规化 Lebesgue 测度. 记 $\mathbb{R}$ 为实数集, $\mathbb{N}$ 为自然数集, $\mathbb{N}^*$ 为正整数集.

若记 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 为 $\mathbb{D}$ 上的调和函数空间, 则对 $\forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, f 可分解成

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \bar{z}^k.$$

对 $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p < +\infty$, Sobolev 空间 $\mathfrak{L}^{\beta,p}$ 是指 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 中满足

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^{\beta,p}} = \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{R}^\beta f|^p + |\widehat{\mathcal{R}^\beta} f|^p dA \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

的函数全体所组成的集合, 其中 $\mathcal{R}^\beta f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^\beta a_k z^k$ 为 f 对 z 的 β- 阶径向导数,

$$\widehat{\mathcal{R}^\beta} f = \sum_{k=1}^{\infty} k^\beta b_k \bar{z}^k$$

英文引用格式: He L, Cao G F. Toeplitz operators on Bergman-Sobolev space with positive integer derivative (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 811–826, doi: 10.1360/SCM-2016-0111

为 f 对 $\bar{z}$ 的 β- 阶径向导数.

为方便起见, 当 $\beta=0$ 时, 记 $\mathcal{R}^0 f(z)=\widehat{\mathcal{R}^0} f(z)=f(z)$.

当 $p=2$ 时, $\mathfrak{L}^{\beta,2}$ 关于以下内积:

$$\langle f,g\rangle_{\mathfrak{L}^{\beta,2}}=\int_{\mathbb{D}} f dA\cdot\int_{\mathbb{D}}\overline{g}dA+\langle\mathcal{R}^\beta f,\mathcal{R}^\beta g\rangle_{L^2}+\langle\widehat{\mathcal{R}^\beta} f,\widehat{\mathcal{R}^\beta} g\rangle_{L^2},\quad \forall f\in\mathfrak{L}^{\beta,2},\quad g\in\mathfrak{L}^{\beta,2}$$

构成 Hilbert 空间, 其中 $L^2=L^2(\mathbb{D},dA)$ 为通常的 Lebesgue 空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ 为 L^2 上的标准内积.

当 $p=+\infty$ 时, 相应的 Sobolev 空间定义为

$$\mathfrak{L}^{\beta,\infty}=H^\infty_\beta+\overline{H^\infty_{\beta,0}},$$

其中 $H^\infty_\beta=\{f\mid\mathcal{R}^\beta f\in H^\infty\}$, $H^\infty_{\beta,0}=\{f\in H^\infty_\beta\mid f(0)=0\}$. 显然, 对 $\forall f\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 有 $\mathcal{R}^\beta f\in L^\infty$, $\widehat{\mathcal{R}^\beta} f\in L^\infty$. 且由文献 [1, 命题 2.6], 不难得到

$$\mathfrak{L}^{\beta,\infty}=H^\infty_\beta+\overline{H^\infty_\beta}\subseteq H^\infty_k+\overline{H^\infty_k}=\mathfrak{L}^{k,\infty}$$

对 $\forall 0\leqslant k\leqslant\beta$ 成立, 即对 $\forall u\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 有 $u\in\mathfrak{L}^{k,\infty}$. 于是, 对 $\forall 0\leqslant k\leqslant\beta$, 有 $\mathcal{R}^k u\in L^\infty$, $\widehat{\mathcal{R}^k} u\in L^\infty$. 特别地, 对 $\forall\beta\in\mathbb{N}^*$, 有 $\mathfrak{L}^{\beta,\infty}\subseteq\mathfrak{L}^{1,\infty}$. 由 Sobolev 嵌入定理 (参见文献 [2, 定理 5.4]) 知, $\mathfrak{L}^{1,\infty}$ 函数可连续延拓到闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}}$ 上, 故每个 $\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$ 函数也可连续延拓到 $\overline{\mathbb{D}}$ 上. 因此, 对 $\forall f\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 本文将 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的延拓仍记成 f.

将 $\mathfrak{L}^{\beta,p}$ 中满足 $f(0)=0$ 的解析函数全体所组成的集合记成 A^p_β, 则 A^p_β 为 $\mathfrak{L}^{\beta,p}$ 的子空间, 称为 Bergman-Sobolev 空间. 定义 $\|f\|_{A^p_\beta}=\|\mathcal{R}^\beta f\|_{A^p}$, 其中 $\|\cdot\|_{A^p}$ 为 Bergman 空间 A^p 上的范数, 则当 $1\leqslant p\leqslant+\infty$ 时, $\|\cdot\|_{A^p_\beta}$ 为 A^p_β 上的范数, A^p_β 关于该范数构成 Banach 空间.

众所周知, Sobolev 空间理论的产生对偏微分方程的发展意义非凡. Sobolev 型空间是经典 Sobolev 空间结构与实变量的经典函数空间结构相结合的产物, 源于调和分析中对具有非光滑核的奇异积分算子有界性问题的估计 (参见文献 [3]). 由于缺乏解析结构, 对这类型空间的结构及其算子与算子代数的研究非常复杂, 本质的困难在于相关不等式的估计. 近年来, 数学工作者们通过对 Sobolev 型空间赋予解析结构, 研究了解析 Sobolev 型空间的结构及其上的积分算子. 例如, 对 Bergman-Sobolev 空间及其相关问题的研究 (参见文献 [4–7]), 对 Hardy-Sobolev 空间及其相关问题的研究 (参见文献 [8–12]), 对 Fock-Sobolev 空间及其相关问题的研究 (参见文献 [13–17]) 等. 我们也围绕某些解析 Sobolev 型空间及其上的乘子和复合算子做了一些原创性工作, 可参见文献 [1,18–20].

Bergman-Sobolev 空间, 作为一类新型解析函数空间, 几乎包含了所有经典解析函数空间. 例如, $A^2_0=L^2_a$, 为 Bergman 空间; $A^2_{\frac{1}{2}}=H^2$, 为 Hardy 空间; $A^2_1=\mathfrak{D}$, 为 Dirichlet 空间. 这意味着 Bergman-Sobolev 空间具有比经典解析函数空间复杂得多的结构, 其上的算子与算子代数问题自然也比经典情形复杂很多. 本文对正整数阶 Bergman-Sobolev 空间上的 Toeplitz 算子展开了研究, 刻画了 Toeplitz 算子的有界性、紧性和 Fredholm 性质. 本文所采用的方法是全新的, 与经典的研究方法和技巧有本质的不同. 然而, 我们还不清楚本文的结论是否能推广到分数阶导数的情形. 对一般的 β, 我们暂时无法证明类似引理 2 的结论, 因此, 甚至无法合理定义分数阶导数的 Bergman-Sobolev 空间上的 Toeplitz 算子.

2 几个引理

本节探索 Bergman-Sobolev 空间与 Bergman 空间上投影算子的内在联系.

记 A^2 为 Bergman 空间, Q 为 L^2 到 A^2 的正交投影算子, 则对 $\forall\varphi\in L^2$, 有

$$Q\varphi(z)=\int_{\mathbb{D}}\varphi(w)\overline{Q_z(w)}dA(w)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k\int_{\mathbb{D}}\overline{w^k}\varphi(w)dA(w),\quad z\in\mathbb{D},$$

其中

$$Q_z(w)=\frac{1}{(1-\langle w,z\rangle)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\overline{z^k}w^k,\quad z,w\in\mathbb{D}$$

为 A^2 的再生核函数.

注意到 $\int_{\mathbb{D}}|z^k|^2dA(z)=\frac{1}{k+1}$, 有

$$\|z^k\|_{A_\beta^2}^2=k^{2\beta}\int_{\mathbb{D}}|z^k|^2dA(z)=\frac{k^{2\beta}}{k+1}.$$

令 $e_k=\frac{z^k}{\|z^k\|_{A_\beta^2}}$, 则 $\{e_k\}$ 为 A_β^2 的一组正交基底, 故

$$K_z(w)=\sum_{k=1}^{\infty}e_k(w)\overline{e_k(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^{2\beta}}\overline{z^k}w^k$$

为 A_β^2 的再生核函数. 为了定义 A_β^2 上的 Toeplitz 算子, 首先给出以下两个重要结论.

引理 1 若 $p>1$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\beta'\in\mathbb{R}$, $\beta>\beta'$, 则 $A_\beta^p\subseteq A_{\beta'}^p$. 特别地, 对 $\forall\beta\in\mathbb{N}^*$, 有 $\forall A_\beta^\infty\subseteq A^\infty$.

证明 类似文献 [1, 命题 2.6], 此处略. □

引理 2 设 $\beta\in\mathbb{N}$, $f\in A_\beta^2$. 若 $u\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 则 $uf\in\mathfrak{L}^{\beta,2}$, 且存在正常数 C 使得 $\|uf\|_{\mathfrak{L}^{\beta,2}}\leqslant C\|f\|_{A_\beta^2}$.

证明 显然, 由 $u\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$ 知, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant k\leqslant\beta$, 有 $\mathcal{R}^ku\in L^\infty$, $\widehat{\mathcal{R}^k}u\in L^\infty$. 又 $A_\beta^2\subseteq A_k^2$, 且对 $\forall f\in A_\beta^2$, 有 $\|\mathcal{R}^{k-1}f\|_{A^2}\leqslant\|\mathcal{R}^kf\|_{A^2}$, 故

$$\begin{aligned}\|uf\|_{\mathfrak{L}^{\beta,2}}^2&=\langle\mathcal{R}^\beta(uf),\mathcal{R}^\beta(uf)\rangle_{L^2}+\langle\widehat{\mathcal{R}^\beta}(uf),\widehat{\mathcal{R}^\beta}(uf)\rangle_{L^2}\\&=\bigg\|\sum_{k=0}^{\beta}C_\beta^k(\mathcal{R}^{\beta-k}u)(\mathcal{R}^kf)\bigg\|_{L^2}^2+\|f(\widehat{\mathcal{R}^\beta}u)\|_{L^2}^2\\&\leqslant 2^{2\beta}\max_{0\leqslant k\leqslant\beta}\{\|\mathcal{R}^{\beta-k}u\|_\infty^2\}\|\mathcal{R}^\beta f\|_{A^2}^2+\|f\|_{A^2}^2\|\widehat{\mathcal{R}^\beta}u\|_\infty^2\\&\leqslant 2^{2\beta}\max_{0\leqslant k\leqslant\beta}\{\|\mathcal{R}^{\beta-k}u\|_\infty^2\}\|f\|_{A_\beta^2}^2+\|\widehat{\mathcal{R}^\beta}u\|_\infty^2\|f\|_{A_\beta^2}^2\\&=C^2\|f\|_{A_\beta^2}^2,\end{aligned}$$

其中 $C=2^{2\beta}\max_{0\leqslant k\leqslant\beta}\{\|\mathcal{R}^{\beta-k}u\|_\infty^2\}+\|\widehat{\mathcal{R}^\beta}u\|_\infty^2$. 引理得证. □

对 $\beta\in\mathbb{N}^*$, 令 P 为 $\mathfrak{L}^{\beta,2}$ 到 A_β^2 的正交投影算子. 由再生核函数的性质, 对 $\forall u\in\mathfrak{L}^{\beta,2}$, 有

$$\begin{aligned}(Pu)(z)&=\langle u,K_z\rangle_{A_\beta^2}=\bigg\langle u,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^{2\beta}}\overline{z^k}w^k\bigg\rangle_{A_\beta^2}=\bigg\langle u,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^{2\beta}}\overline{z^k}w^k\bigg\rangle_{A_\beta^2}\\&=\bigg\langle\mathcal{R}^\beta u,\mathcal{R}^\beta\bigg[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^{2\beta}}\overline{z^k}w^k\bigg]\bigg\rangle_{A^2}=\int_{\mathbb{D}}\mathcal{R}^\beta u\overline{\mathcal{R}^\beta\bigg[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^{2\beta}}\overline{z^k}w^k\bigg]}dA(w)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^\beta}z^k\int_{\mathbb{D}}\overline{w^k}\mathcal{R}^\beta u(w)dA(w),\quad z\in\mathbb{D}.\end{aligned}$$

给定 $u \in \mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 对 $\forall f \in A^2_\beta$, 由引理 2 知 $fu \in \mathfrak{L}^{\beta,2}$. 定义 $T_u : A^2_\beta \to A^2_\beta$, 使得

$$T_u f = P(uf), \quad \forall f \in A^2_\beta,$$

则称 T_u 为具有符号 u 的 Toeplitz 算子.

性质 3 对 $\beta \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathfrak{L}^{\beta,2}$, 有

$$\mathcal{R}^\beta(Pu)(z) = Q(\mathcal{R}^\beta u)(z) - Q(\mathcal{R}^\beta u)(0).$$

证明 由

$$\begin{aligned} Q(\mathcal{R}^\beta u)(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k \int_{\mathbb{D}} \overline{w^k}\mathcal{R}^\beta u(w)dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \mathcal{R}^\beta u(w)dA(w) + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)z^k \int_{\mathbb{D}} \overline{w^k}\mathcal{R}^\beta u(w)dA(w) \\ &= Q(\mathcal{R}^\beta u)(0) + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)z^k \int_{\mathbb{D}} \overline{w^k}\mathcal{R}^\beta u(w)dA(w) \\ &= Q(\mathcal{R}^\beta u)(0) + \mathcal{R}^\beta(Pu)(z), \end{aligned}$$

有 $\mathcal{R}^\beta(Pu)(z) = Q(\mathcal{R}^\beta u)(z) - Q(\mathcal{R}^\beta u)(0)$. 证毕. □

以下介绍 Bergman 空间 A^2 上的 Toeplitz 算子及其紧性刻画.

对 $\forall \varphi \in L^\infty$, 记 S_φ 为 A^2 上具有 φ 符号的 Toeplitz 算子, 即

$$S_\varphi f = Q(\varphi f), \quad \forall f \in A^2.$$

显然, S_φ 是 A^2 上的有界算子. 给定 A^2 上的任意有界线性算子 S, 其 Berezin 变换定义为

$$\widetilde{S}(\lambda) = \langle Sq_\lambda, q_\lambda\rangle_{A^2} = \int_{\mathbb{D}} Sq_\lambda \overline{q_\lambda} dA, \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

其中 $q_\lambda(z) = \frac{Q_\lambda(z)}{\|Q_\lambda\|_{A^2}}$ 是 A^2 的正规化再生核函数.

众所周知, $\widetilde{S}$ 在 $\mathbb{D}$ 上连续, 且 Toeplitz 算子乘积的 Berezin 变换具有保符号连续性的性质, 即若任意给定的符号函数 $\varphi, \psi \in L^\infty$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上是连续的, 则相应 Toeplitz 算子乘积的 Berezin 变换 $\widetilde{S_\varphi S_\psi}$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上也是连续的, 且在边界 $\mathbb{T}$ 上满足 $\widetilde{S_\varphi S_\psi} = \varphi\psi$, 可参见文献 [21, 命题 2.1].

此外, 可通过 Berezin 变换在边界处的行为刻画相应 Toeplitz 算子的紧性. 具体说来, 对给定符号 $\varphi_k, \psi_k \in L^\infty$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, $\sum_{k=1}^N S_{\varphi_k}S_{\psi_k}$ 是 A^2 上的紧算子当且仅当 $\lim_{|\lambda|\to 1^-}[\sum_{k=1}^N \widetilde{S_{\varphi_k}S_{\psi_k}}](\lambda) = 0$, 可参见文献 [22, 定理 A].

由 $\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$ 函数可连续延拓至边界 $\mathbb{T}$, 不难得到如下结论.

引理 4 设 $\beta \in \mathbb{N}$, $u_k, v_k \in \mathfrak{L}^{\beta,\infty}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, S_{u_k} 和 S_{v_k} 为 A^2 上相应的 Toeplitz 算子, 则 $\sum_{k=1}^N S_{u_k}S_{v_k}$ 是 A^2 上的紧算子当且仅当 $\sum_{k=1}^N u_k v_k$ 在 $\mathbb{T}$ 上消失为零, 即当且仅当 $\sum_{k=1}^N u_k v_k\ |_{\mathbb{T}} = 0$.

3 Toeplitz 算子的有界性和紧性

本节考虑 A^2_β 上 Toeplitz 算子乘积的有限和的有界性和紧性. 由已有结论: 对 $\forall f \in A^2$, $|f(0)| \leqslant \|f\|_{A^2}$ (其证明可参见文献 [23, 定理 2.1]), 可刻画 A^2_β 上具有 $\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$- 符号的 Toeplitz 算子的有界性.

命题 5 若 $\beta\in\mathbb{N}^*$, $u\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 则 Toeplitz 算子 T_u 在 A^2_β 上有界.

证明 对 $\forall f\in A^2_\beta$, 有

$$\begin{aligned}\|T_uf\|^2_{A^2_\beta}&=\|P(uf)\|^2_{A^2_\beta}=\|\mathcal{R}^\beta[P(uf)]\|^2_{A^2}\\&=\|Q[\mathcal{R}^\beta(uf)](z)-Q[\mathcal{R}^\beta(uf)](0)\|^2_{A^2}\\&\leqslant\{\|Q[\mathcal{R}^\beta(uf)]\|_{A^2}+|Q[\mathcal{R}^\beta(uf)](0)|\}^2.\end{aligned}$$

由 $u\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$ 知, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant k\leqslant\beta$, 有 $\mathcal{R}^ku\in L^\infty$. 于是有

$$\begin{aligned}\|Q[\mathcal{R}^\beta(uf)]\|_{A^2}\leqslant\|\mathcal{R}^\beta(uf)\|_{L^2}&=\left\|\sum_{k=0}^{\beta}C^k_\beta(\mathcal{R}^ku)(\mathcal{R}^{\beta-k}f)\right\|_{L^2}\\&\leqslant\sum_{k=0}^{\beta}C^k_\beta\|\mathcal{R}^ku\|_\infty\|\mathcal{R}^{\beta-k}f\|_{A^2}\leqslant C_1\sum_{k=0}^{\beta}\|\mathcal{R}^{\beta-k}f\|_{A^2},\end{aligned}$$

其中 $C_1=\max_{0\leqslant k\leqslant\beta}\{C^k_\beta\|\mathcal{R}^ku\|_\infty\}$ 为正常数. 注意到

$$\|f\|_{A^2}\leqslant\|\mathcal{R}f\|_{A^2}\leqslant\|\mathcal{R}^2f\|_{A^2}\leqslant\cdots\leqslant\|\mathcal{R}^{\beta-1}f\|_{A^2}\leqslant\|\mathcal{R}^\beta f\|_{A^2}=\|f\|_{A^2_\beta},\tag{3.1}$$

有

$$\|Q[\mathcal{R}^\beta(uf)]\|_{A^2}\leqslant C_1(\beta+1)\|f\|_{A^2_\beta}.$$

同样可证 $|Q[\mathcal{R}^\beta(uf)](0)|\leqslant C_1(\beta+1)\|f\|_{A^2_\beta}$. 令 $C=2C_1(\beta+1)$, 则

$$\|T_uf\|_{A^2_\beta}\leqslant C\|f\|_{A^2_\beta}.$$

证毕. □

对 $\forall\lambda\in\mathbb{D}$, $\beta\in\mathbb{N}^*$, 令

$$E_\lambda(z)=\mathcal{R}^\beta K_\lambda(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^\beta}\overline{\lambda^k}z^k,\quad z\in\mathbb{D},$$

则 $\mathcal{R}^\beta[E_\lambda(z)]=Q_\lambda(z)-1$, 且

$$\|E_\lambda\|^2_{A^2_\beta}=\|\mathcal{R}^\beta E_\lambda\|^2_{A^2}=Q_\lambda(\lambda)-1=\frac{1-(1-|\lambda|^2)^2}{(1-|\lambda|^2)^2},\quad\lambda\in\mathbb{D}.$$

观察到

$$\|Q_\lambda\|_{A^2}=[Q_\lambda(\lambda)]^{\frac12}=\frac{1}{1-|\lambda|^2},$$

可得

$$\lim_{|\lambda|\to1^-}\frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A^2_\beta}}=\lim_{|\lambda|\to1^-}\frac{1}{1-|\lambda|^2}\cdot\frac{1-|\lambda|^2}{[1-(1-|\lambda|^2)^2]^{\frac12}}=1.$$

取 $\mathfrak{e}_\lambda(z)=\frac{E_\lambda(z)}{\|E_\lambda\|_{A^2_\beta}}$, 则有如下命题.

命题 6 当 $|\lambda|\to1^-$ 时, $\mathfrak{e}_\lambda$ 在 A^2_β 上弱收敛到 0.

证明 对 $\forall f\in A^2_\beta$, 有

$$\langle f,\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2_\beta}=\frac{1}{\|E_\lambda\|_{A^2_\beta}}\langle f,E_\lambda\rangle_{A^2_\beta}=\frac{1}{\|E_\lambda\|_{A^2_\beta}}\langle\mathcal{R}^\beta f,\mathcal{R}^\beta E_\lambda\rangle_{A^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|E_\lambda\|_{A^2_\beta}} \langle \mathcal{R}^\beta f, Q_\lambda - 1\rangle_{A^2} = \frac{1}{\|E_\lambda\|_{A^2_\beta}} [\langle \mathcal{R}^\beta f, Q_\lambda\rangle_{A^2} - \langle \mathcal{R}^\beta f, 1\rangle_{A^2}] \\
&= \frac{1}{\|E_\lambda\|_{A^2_\beta}} [\mathcal{R}^\beta f(\lambda) - \mathcal{R}^\beta f(0)] = \frac{(1-|\lambda|^2)}{[1-(1-|\lambda|^2)^2]^{\frac{1}{2}}} [\mathcal{R}^\beta f(\lambda)].
\end{aligned}
$$

由文献 [23, 定理 2.1] 知, 对 $\forall G(\lambda) \in A^2$, 有 $\lim_{|\lambda|\to 1^-}(1-|\lambda|^2)G(\lambda) = 0$. 而对 $\forall f \in A^2_\beta$, 有 $\mathcal{R}^\beta f(\lambda) \in A^2$. 故 $\lim_{|\lambda|\to 1^-}(1-|\lambda|^2)[\mathcal{R}^\beta f(\lambda)] = 0$. 于是有

$$
\lim_{|\lambda|\to 1^-} \langle f, \mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2_\beta} = \lim_{|\lambda|\to 1^-} (1-|\lambda|^2)[\mathcal{R}^\beta f(\lambda)] \cdot \frac{1}{[1-(1-|\lambda|^2)^2]^{\frac{1}{2}}} = 0.
$$

这意味着当 $|\lambda| \to 1^-$ 时, $\mathfrak{e}_\lambda$ 在 A^2_β 上弱收敛到 0. 证毕. □

事实上, 由以下引理还可得到: 当 $|\lambda| \to 1^-$ 时, $\|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} \to 0$.

引理 7 由 A^2_β 到 A^2 的恒等算子是紧的.

证明 由 (3.1) 可知, A^2_β- 范数下的任意有界序列 $\{f_n\}$ 在 A^2- 范数下也一定是有界的. 故存在 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{f_{n_k}\}$ 局部一致收敛到某个 A^2 函数. 因此, A^2_β 到 A^2 的恒等算子是紧的. □

故对 A^2_β 上弱收敛到 0 的任意序列 $\{f_j\}$, 有 $\|f_j\|_{A^2} \to 0$ $(j \to \infty)$. 事实上, 还可证得: 对 $\beta > \beta'$, 嵌入映射 $A^2_\beta \hookrightarrow A^2_{\beta'}$ 是紧的. 见以下引理.

引理 8 若 $u \in \mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, $\{f_j\} \subseteq A^2_\beta$, 且 $\{f_j\} \xrightarrow{w} 0$ $(j \to \infty)$, 则对 $\forall \gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \leqslant \beta$, 有

$$
\lim_{j\to\infty} Q[\mathcal{R}^\gamma(uf_j)](0) = 0.
$$

证明 首先证明如下断言: 若 $\{f_j\}$ 为 A^2_β 上弱收敛到 0 的序列, 则对 $\forall l \in \mathbb{N}$, $l \leqslant \beta$, 有 $\{\mathcal{R}^l f_j\}$ 在 A^2 上弱收敛到 0; 对 $\forall l \in \mathbb{N}$, $l \leqslant \beta - 1$, 有 $\|\mathcal{R}^l f_j\|_{A^2} \to 0$.

由于 $f_j \in A^2_\beta$, 且 $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ 为 A^2_β 的正规正交基底, 故对每个 f_j, 有 Taylor 展式

$$
f_j(z) = \sum_{k=1}^\infty a_k^{(j)} e_k(z) = \sum_{k=1}^\infty a_k^{(j)} \frac{\sqrt{k+1}}{k^\beta} z^k.
$$

对每个固定的 $m \in \mathbb{N}$, 当 $j \to \infty$ 时, 有 $a_m^{(j)} = \langle f_j, e_m\rangle_{A^2_\beta} \to 0$.

令 $\widehat{e_k} = \sqrt{k+1} z^k$, 易知 $\{\widehat{e_k}\}_{k=0}^\infty$ 为 A^2 的一组正规正交基底. 对每个 $m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ 且 $l \leqslant \beta$, 有

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}^l f_j, \widehat{e_m}\rangle_{A^2} &= \left\langle \sum_{k=1}^\infty a_k^{(j)} \frac{\sqrt{k+1}}{k^{\beta-l}} z^k, \sqrt{m+1} z^m \right\rangle_{A^2} \\
&= \frac{a_m^{(j)}(m+1)}{m^{\beta-l}} \langle z^m, z^m\rangle_{A^2} = \frac{a_m^{(j)}}{m^{\beta-l}} \to 0, \quad j \to \infty.
\end{aligned}
$$

此外, 对 $\beta - l \geqslant 1$, 有

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{R}^l f_j\|^2_{A^2} &= \left\langle \sum_{k=1}^\infty a_k^{(j)} \frac{\sqrt{k+1}}{k^{\beta-l}} z^k, \sum_{k=1}^\infty a_k^{(j)} \frac{\sqrt{k+1}}{k^{\beta-l}} z^k \right\rangle_{A^2} \\
&= \sum_{k=1}^\infty [a_k^{(j)}]^2 \frac{k+1}{k^{2(\beta-l)}} \langle z^k, z^k\rangle_{A^2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{[a_k^{(j)}]^2}{k^{2(\beta-l)}} \to 0, \quad j \to \infty.
\end{aligned}
$$

断言得证. 故对 $\forall \gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \leqslant \beta - 1$, 有

$$
|Q[\mathcal{R}^\gamma(uf_j)](0)| = \left| Q\left[\sum_{k=0}^\gamma C_\gamma^k (\mathcal{R}^{\gamma-k} u)(\mathcal{R}^k f_j) \right](0) \right|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\sum_{k=0}^{\gamma} C_\gamma^k Q[(\mathcal{R}^{\gamma-k}u)(\mathcal{R}^k f_j)](0)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\gamma} C_\gamma^k |\langle \mathcal{R}^{\gamma-k}u, \mathcal{R}^k f_j\rangle_{A^2}| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\gamma} C_\gamma^k \|\mathcal{R}^{\gamma-k}u\|_\infty \|\mathcal{R}^k f_j\|_{A^2} = C\sum_{k=0}^{\gamma} \|\mathcal{R}^k f_j\|_{A^2} \to 0, \quad j\to\infty,
\end{aligned}
$$

其中 $C=\max_{0\leqslant k\leqslant\gamma}\{C_\gamma^k\|\mathcal{R}^{\gamma-k}u\|_\infty\}$.

若 $\gamma=\beta$, 则

$$
\begin{aligned}
|Q[\mathcal{R}^\beta(uf_j)](0)| &= \left|Q\left[\sum_{k=0}^{\beta} C_\beta^k(\mathcal{R}^{\beta-k}u)(\mathcal{R}^k f_j)\right](0)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\beta} C_\beta^k Q[(\mathcal{R}^{\beta-k}u)(\mathcal{R}^k f_j)](0)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{k=0}^{\beta-1} C_\beta^k Q[(\mathcal{R}^{\beta-k}u)(\mathcal{R}^k f_j)](0)\right| + |Q(u\mathcal{R}^\beta f_j)(0)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\beta-1} C_\beta^k \|\mathcal{R}^{\beta-k}u\|_\infty \|\mathcal{R}^k f_j\|_{A^2} + |Q(u\mathcal{R}^\beta f_j)(0)|,
\end{aligned}
$$

其中

$$
Q(u\mathcal{R}^\beta f_j)(0) = \int_{\mathbb{D}} u(w)\mathcal{R}^\beta f_j(w)dA(w) = \langle \mathcal{R}^\beta f_j, \overline{u}\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{R}^\beta f_j, Q(\overline{u})\rangle_{A^2}.
$$

由 $\mathcal{R}^\beta f_j \xrightarrow{w} 0$ 知, $Q(u\mathcal{R}^\beta f_j)(0)\to 0$ $(j\to\infty)$. 综上有 $Q[\mathcal{R}^\beta(uf_j)](0)\to 0$ $(j\to\infty)$. 证毕. □

引理 9 假设 $u,v\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, $\zeta\in\mathbb{T}$, 则有 $\lim_{\lambda\to\zeta}\langle T_uT_v\mathfrak{e}_\lambda, \mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A_\beta^2} = u(\zeta)v(\zeta)$.

证明 对 $\forall\lambda\in\mathbb{D}$, 有 $\langle T_uT_v\mathfrak{e}_\lambda, \mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A_\beta^2} = \langle \mathcal{R}^\beta(T_uT_v\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}^\beta\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}$. 若 $\beta=1$, 则

$$
\langle T_uT_v\mathfrak{e}_\lambda, \mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A_1^2} = \langle \mathcal{R}(T_uT_v\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2} = \langle \mathcal{R}P[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)], \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}.
$$

由性质 3, 有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}P[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)] &= Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\} - Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0) \\
&= Q\{(\mathcal{R}u)(T_v\mathfrak{e}_\lambda) + u[\mathcal{R}(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\} - Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0) \\
&= Q\{(\mathcal{R}u)(T_v\mathfrak{e}_\lambda)\} + Q\{u\cdot\mathcal{R}[P(v\mathfrak{e}_\lambda)]\} - Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0) \\
&= Q\{(\mathcal{R}u)(T_v\mathfrak{e}_\lambda)\} + Q\{u\cdot Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)] - u\cdot Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0)\} - Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0) \\
&= Q\{(\mathcal{R}u)(T_v\mathfrak{e}_\lambda)\} + Q\{u\cdot Q[(\mathcal{R}v)\mathfrak{e}_\lambda + v(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)] - u\cdot Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0)\} - Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0) \\
&= S_{\mathcal{R}u}(T_v\mathfrak{e}_\lambda) + S_uS_{\mathcal{R}v}\mathfrak{e}_\lambda + S_uS_v(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda) - S_u1\cdot Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0) - Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0),
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\langle T_uT_v\mathfrak{e}_\lambda, \mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A_1^2} &= \langle S_{\mathcal{R}u}(T_v\mathfrak{e}_\lambda) + S_uS_{\mathcal{R}v}\mathfrak{e}_\lambda + S_uS_v(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda) - S_u1\cdot Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0) - Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0), \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2} \\
&= \langle S_{\mathcal{R}u}(T_v\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2} + \langle S_uS_{\mathcal{R}v}\mathfrak{e}_\lambda, \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2} + \langle S_uS_v(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2} \\
&\quad - Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0)\langle S_u1, \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2} - Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0)\langle 1, \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2} \\
&=: I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5,
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

其中

$$
I_1 = \langle S_{\mathcal{R}u}(T_v\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}, \quad I_2 = \langle S_uS_{\mathcal{R}v}\mathfrak{e}_\lambda, \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}, \quad I_3 = \langle S_uS_v(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2},
$$

$$I_4 = Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0)\langle S_u 1, \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}, \quad I_5 = Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0)\langle 1, \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}.$$

不难发现

$$|I_1| = |\langle S_{\mathcal{R}u}(T_v\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}| \leqslant \|S_{\mathcal{R}u}\| \cdot \|T_v\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} \cdot \|\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} = \|S_{\mathcal{R}u}\| \cdot \|T_v\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}, \tag{3.3}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示算子范数. 由命题 6, $\{T_v\mathfrak{e}_\lambda\} \xrightarrow{w} 0$, 有 $\|T_v\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} \to 0$. 故当 $\lambda \to \zeta$ 时, 有 $|I_1| \to 0$. 又

$$|I_2| = |\langle S_u S_{\mathcal{R}v}\mathfrak{e}_\lambda, \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}| \leqslant \|S_u S_{\mathcal{R}v}\| \cdot \|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}. \tag{3.4}$$

由 $\{\mathfrak{e}_\lambda\} \xrightarrow{w} 0$, 有 $\|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} \to 0$, 可得 $|I_2| \to 0$ $(\lambda \to \zeta)$,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \langle S_u S_v(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2} = \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v(\mathcal{R}E_\lambda), \mathcal{R}E_\lambda\rangle_{A^2} = \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v(Q_\lambda - 1), Q_\lambda - 1\rangle_{A^2} \\
&= \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v Q_\lambda, Q_\lambda\rangle_{A^2} - \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v Q_\lambda, 1\rangle_{A^2} - \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v 1, Q_\lambda\rangle_{A^2} + \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v 1, 1\rangle_{A^2} \\
&=: I_{31} - I_{32} - I_{33} + I_{34},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_{31} &= \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v Q_\lambda, Q_\lambda\rangle_{A^2}, \quad I_{32} = \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v Q_\lambda, 1\rangle_{A^2}, \\
I_{33} &= \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v 1, Q_\lambda\rangle_{A^2}, \quad I_{34} = \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v 1, 1\rangle_{A^2}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
I_{31} &= \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v Q_\lambda, Q_\lambda\rangle_{A^2} = \left[\frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A^2_1}}\right]^2 \langle S_u S_v q_\lambda, q_\lambda\rangle_{A^2} \\
&= \left[\frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A^2_1}}\right]^2 \widetilde{S_u S_v}(\lambda) \to \widetilde{S_u S_v}(\zeta), \quad \lambda \to \zeta,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

且

$$|I_{32}| = \left|\frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_u S_v Q_\lambda, 1\rangle_{A^2}\right| \leqslant \frac{\|S_u S_v\|}{\|E_\lambda\|_{A^2_1}} \cdot \frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A^2_1}} \to 0, \quad \lambda \to \zeta, \tag{3.7}$$

其中 $\lim_{\lambda\to\zeta} \frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A^2_1}} = 1$, 且 $\lim_{\lambda\to\zeta} \|E_\lambda\|_{A^2_1} = +\infty$.

类似可得, 当 $\lambda \to \zeta$ 时, 有

$$|I_{33}| = \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}|\langle S_u S_v 1, Q_\lambda\rangle_{A^2}| \to 0 \tag{3.8}$$

$$|I_{34}| = \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}|\langle S_u S_v 1, 1\rangle_{A^2}| \leqslant \frac{\|S_u S_v\|}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}} \to 0. \tag{3.9}$$

结合 (3.5)–(3.9), 得

$$I_3 \to \widetilde{S_u S_v}(\zeta), \quad \lambda \to \zeta. \tag{3.10}$$

又 $\{\mathfrak{e}_\lambda\} \xrightarrow{w} 0$, $\{T_v\mathfrak{e}_\lambda\} \xrightarrow{w} 0$, 根据引理 8, 有 $Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0) \to 0$, 且 $Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0) \to 0$. 故有

$$\begin{aligned}|I_4| &= |Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0)\langle S_u 1, \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}| \\ &\leqslant |Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0)| \cdot \|S_u\|\|\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} = |Q[\mathcal{R}(v\mathfrak{e}_\lambda)](0)|\|S_u\| \to 0, \quad \lambda \to \zeta, \qquad (3.11)\\ |I_5| &= |Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0)\langle 1, \mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}| \\ &\leqslant |Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0)|\|\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} = |Q\{\mathcal{R}[u(T_v\mathfrak{e}_\lambda)]\}(0)| \to 0, \quad \lambda \to \zeta. \qquad (3.12)\end{aligned}$$

结合 (3.3)、(3.4) 和 (3.10)–(3.12), 对 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的连续函数 u 和 v, 有

$$\lim_{\lambda\to\zeta}\langle T_uT_v\mathfrak{e}_\lambda, \mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A_1^2} = \lim_{\lambda\to\zeta}\widetilde{S_uS_v}(\lambda) = u(\zeta)v(\zeta).$$

利用归纳法, 不难得到对 $\forall\beta\in\mathbb{N}^*$, 有

$$\lim_{\lambda\to\zeta}\langle T_uT_v\mathfrak{e}_\lambda, \mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A_\beta^2} = \lim_{\lambda\to\zeta}\widetilde{S_uS_v}(\lambda) = u(\zeta)v(\zeta).$$

证毕. □

至此, 可刻画 A_β^2 上 Toeplitz 算子乘积的有限和的紧性.

定理 10 假设 $u_j, v_j \in \mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, 则以下说法等价:

(1) $\sum_{j=1}^N T_{u_j}T_{v_j}$ 是 A_β^2 上的紧算子;

(2) $\sum_{j=1}^N u_jv_j = 0$ 在 $\mathbb{T}$ 上消失为零.

证明 若 (1) 成立, 则对 $\forall\zeta\in\mathbb{T}$, 由引理 9 知,

$$0 = \lim_{\lambda\to\zeta}\left\langle \sum_{j=1}^N T_{u_j}T_{v_j}\mathfrak{e}_\lambda, \mathfrak{e}_\lambda\right\rangle_{A_\beta^2} = \sum_{j=1}^N u_j(\zeta)v_j(\zeta),$$

故 (2) 成立.

反之, 若 (2) 成立, 要证 (1) 成立, 只需证对 A_β^2 上任一弱收敛到 0 的序列 $\{f_k\}$, 当 $k\to\infty$ 时, 有

$$\left\|\sum_{j=1}^N T_{u_j}T_{v_j}f_k\right\|_{A_\beta^2} \to 0.$$

为方便起见, 记

$$T = \sum_{j=1}^N T_{u_j}T_{v_j}, \quad S = \sum_{j=1}^N S_{u_j}S_{v_j}.$$

若 $\beta = 1$, 对任一固定的 $j\in\mathbb{N}$ $(1\leqslant j\leqslant N)$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, 由

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(T_{u_j}T_{v_j}f_k) &= \mathcal{R}[P(u_jP(v_jf_k))] = Q[\mathcal{R}(u_jP(v_jf_k))] - Q[\mathcal{R}(u_jP(v_jf_k))](0)\\ &= Q[\mathcal{R}(u_j)P(v_jf_k)] + Q[u_j(\mathcal{R}P(v_jf_k))] - Q[\mathcal{R}(u_jT_{v_j}f_k)](0)\\ &= Q[(\mathcal{R}u_j)T_{v_j}f_k] + Q[u_jQ\mathcal{R}(v_jf_k)] - Q\{u_j[Q\mathcal{R}(v_jf_k)](0)\} - Q[\mathcal{R}(u_jT_{v_j}f_k)](0)\\ &= Q[(\mathcal{R}u_j)T_{v_j}f_k] + Q[u_jQ(f_k\mathcal{R}v_j)] + Q[u_jQ(v_j\mathcal{R}f_k)]\\ &\quad - Q\{u_j[Q\mathcal{R}(v_jf_k)](0)\} - Q[\mathcal{R}(u_jT_{v_j}f_k)](0)\\ &= S_{\mathcal{R}u_j}T_{v_j}f_k + S_{u_j}S_{\mathcal{R}v_j}f_k + S_{u_j}S_{v_j}\mathcal{R}f_k - S_{u_j}1Q[\mathcal{R}(v_jf_k)](0) - Q[\mathcal{R}(u_jT_{v_j}f_k)](0),\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(Tf_k)&=\mathcal{R}\bigg(\sum_{j=1}^{N}T_{u_j}T_{v_j}f_k\bigg)=\sum_{j=1}^{N}\mathcal{R}(T_{u_j}T_{v_j}f_k)\\&=\sum_{j=1}^{N}S_{\mathcal{R}u_j}T_{v_j}f_k+\sum_{j=1}^{N}S_{u_j}S_{\mathcal{R}v_j}f_k+\sum_{j=1}^{N}S_{u_j}S_{v_j}\mathcal{R}f_k\\&\quad-\sum_{j=1}^{N}S_{u_j}1Q[\mathcal{R}(v_jf_k)](0)-\sum_{j=1}^{N}Q[\mathcal{R}(u_jT_{v_j}f_k)](0).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\|Tf_k\|_{A_1^2}&=\|\mathcal{R}(Tf_k)\|_{A^2}\\&=\bigg\|\sum_{j=1}^{N}S_{\mathcal{R}u_j}T_{v_j}f_k+\sum_{j=1}^{N}S_{u_j}S_{\mathcal{R}v_j}f_k+\sum_{j=1}^{N}S_{u_j}S_{v_j}\mathcal{R}f_k\\&\quad-\sum_{j=1}^{N}S_{u_j}1Q[\mathcal{R}(v_jf_k)](0)-\sum_{j=1}^{N}Q[\mathcal{R}(u_jT_{v_j}f_k)](0)\bigg\|_{A^2}\\&\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|S_{\mathcal{R}u_j}\|\|T_{v_j}f_k\|_{A^2}+\|f_k\|_{A^2}\sum_{j=1}^{N}\|S_{u_j}S_{\mathcal{R}v_j}\|+\|S(\mathcal{R}f_k)\|_{A^2}\\&\quad+\sum_{j=1}^{N}\|S_{u_j}\|_{A^2}\cdot|Q[\mathcal{R}(v_jf_k)](0)|+\sum_{j=1}^{N}|Q[\mathcal{R}(u_jT_{v_j}f_k)](0)|.\end{aligned}$$

由 $\{f_k\}$ 在 A_1^2 上弱收敛到 0 知, 对 $\forall j\in\mathbb{N}$ $(1\leqslant j\leqslant N)$, 有 $\{T_{v_j}f_k\}$ 在 A_1^2 上也弱收敛到 0. 由引理 7, 当 $k\to\infty$ 时, 有 $\|T_{v_j}f_k\|_{A^2}\to0$, $\|f_k\|_{A^2}\to0$. 再由引理 8, 有 $\{\mathcal{R}f_k\}$ 在 A^2 上弱收敛到 0. 结合引理 4, 有 $\|S(\mathcal{R}f_k)\|_{A^2}\to0$ $(k\to\infty)$. 又引理 8 已证得对每个 $1\leqslant j\leqslant N$, 当 $k\to\infty$ 时, 有 $Q[\mathcal{R}(v_jf_k)](0)\to0$, $Q[\mathcal{R}(u_jT_{v_j}f_k)](0)\to0$. 这意味着 $\|Tf_k\|_{A_1^2}\to0$ $(k\to\infty)$, 即 (2) $\Rightarrow$ (1) 对 $\beta=1$ 的情形成立.

若 $\beta=2$, 注意到

$$\|Tf_k\|_{A_2^2}=\bigg\|\mathcal{R}^2\bigg(\sum_{j=1}^{N}T_{u_j}T_{v_j}f_k\bigg)\bigg\|_{A^2}=\bigg\|\sum_{j=1}^{N}\mathcal{R}^2(T_{u_j}T_{v_j}f_k)\bigg\|_{A^2},$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^2(T_{u_j}T_{v_j}f_k)&=\mathcal{R}^2[P(u_jP(v_jf_k))]\\&=Q[\mathcal{R}^2(u_jP(v_jf_k))]-Q[\mathcal{R}^2(u_jP(v_jf_k))](0)\\&=Q[(\mathcal{R}^2u_j)P(v_jf_k)+2(\mathcal{R}u_j)\cdot\mathcal{R}P(v_jf_k)+u_j\mathcal{R}^2P(v_jf_k)]-Q[\mathcal{R}^2(u_jT_{v_j}f_k)](0)\\&=Q[(\mathcal{R}^2u_j)P(v_jf_k)]+2Q[(\mathcal{R}u_j)\cdot\mathcal{R}P(v_jf_k)]+Q[u_j\mathcal{R}^2P(v_jf_k)]-Q[\mathcal{R}^2(u_jT_{v_j}f_k)](0)\\&=Q[(\mathcal{R}^2u_j)P(v_jf_k)]+2Q[(\mathcal{R}u_j)\cdot Q\mathcal{R}(v_jf_k)]-2Q[(\mathcal{R}u_j)Q\mathcal{R}(v_jf_k)(0)]\\&\quad+Q[u_jQ\mathcal{R}^2(v_jf_k)]-Q[u_jQ\mathcal{R}^2(v_jf_k)(0)]-Q[\mathcal{R}^2(u_jT_{v_j}f_k)](0)\\&=Q[(\mathcal{R}^2u_j)P(v_jf_k)]+2Q(\mathcal{R}u_j)\cdot[Q(\mathcal{R}v_j)f_k]+2Q(\mathcal{R}u_j)[(Qv_j)(\mathcal{R}f_k)]\\&\quad-2Q[(\mathcal{R}u_j)Q\mathcal{R}(v_jf_k)](0)+(Qu_j)Q[(\mathcal{R}^2v_j)f_k]+2(Qu_j)Q[(\mathcal{R}v_j)(\mathcal{R}f_k)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (Qu_j)Q[v_j(\mathcal{R}^2 f_k)] - (Qu_j)Q[\mathcal{R}^2(v_j f_k)](0) - Q[\mathcal{R}^2(u_j T_{v_j} f_k)](0) \\
= &\, S_{\mathcal{R}^2 u_j} T_{v_j} f_k + 2S_{\mathcal{R}u_j} S_{\mathcal{R}v_j} f_k + 2S_{\mathcal{R}u_j} S_{v_j} \mathcal{R} f_k \\
&- 2Q[\mathcal{R}(v_j f_k)](0) \cdot S_{\mathcal{R}u_j} 1 + S_{u_j} S_{\mathcal{R}^2 v_j} f_k + 2S_{u_j} S_{\mathcal{R}v_j} \mathcal{R} f_k \\
&+ S_{u_j} S_{v_j} \mathcal{R}^2 f_k - S_{u_j} 1 Q[\mathcal{R}^2(v_j f_k)](0) - Q[\mathcal{R}^2(u_j T_{v_j} f_k)](0),
\end{aligned}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
\|T f_k\|_{A^2_2} &= \bigg\| \sum_{j=1}^{N} \mathcal{R}^2 (T_{u_j} T_{v_j} f_k) \bigg\|_{A^2} \\
&= \bigg\| \sum_{j=1}^{N} \{ S_{\mathcal{R}^2 u_j} T_{v_j} f_k + 2S_{\mathcal{R}u_j} S_{\mathcal{R}v_j} f_k + 2S_{\mathcal{R}u_j} S_{v_j} \mathcal{R} f_k \\
&\quad - 2Q[\mathcal{R}(v_j f_k)](0) \cdot S_{\mathcal{R}u_j} 1 + S_{u_j} S_{\mathcal{R}^2 v_j} f_k + 2S_{u_j} S_{\mathcal{R}v_j} \mathcal{R} f_k \\
&\quad + S_{u_j} S_{v_j} \mathcal{R}^2 f_k - S_{u_j} 1 \cdot Q[\mathcal{R}^2(v_j f_k)](0) - Q[\mathcal{R}^2(u_j T_{v_j} f_k)](0) \} \bigg\|_{A^2} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} \|S_{\mathcal{R}^2 u_j}\| \|T_{v_j} f_k\|_{A^2} + 2\sum_{j=1}^{N} \|S_{\mathcal{R}u_j} S_{\mathcal{R}v_j}\| \|f_k\|_{A^2} + 2\sum_{j=1}^{N} \|S_{\mathcal{R}u_j} S_{v_j} \mathcal{R} f_k\|_{A^2} \\
&\quad + 2\sum_{j=1}^{N} \|S_{\mathcal{R}u_j}\| \cdot |Q[\mathcal{R}(v_j f_k)](0)| + \sum_{j=1}^{N} \|S_{u_j} S_{\mathcal{R}^2 v_j}\| \|f_k\|_{A^2} + 2\sum_{j=1}^{N} \|S_{u_j} S_{\mathcal{R}v_j} \mathcal{R} f_k\|_{A^2} \\
&\quad + \|S(\mathcal{R}^2 f_k)\|_{A^2} + \sum_{j=1}^{N} \|S_{u_j}\| \cdot |Q[\mathcal{R}^2(v_j f_k)](0)| + \sum_{j=1}^{N} |Q[\mathcal{R}^2(u_j T_{v_j} f_k)](0)|. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

由 $\{f_k\}$ 在 A^2_2 上弱收敛到 0 知, 对 $\forall j \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$, $\{T_{v_j} f_k\}$ 在 A^2_2 上也弱收敛到 0. 由引理 7, 当 $k \to \infty$ 时, 有 $\|T_{v_j} f_k\|_{A^2} \to 0$, $\|f_k\|_{A^2} \to 0$. 这意味着

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} \|S_{\mathcal{R}^2 u_j}\| \|T_{v_j} f_k\|_{A^2} + 2\sum_{j=1}^{N} \|S_{\mathcal{R}u_j} S_{\mathcal{R}v_j}\| \|f_k\|_{A^2} + \sum_{j=1}^{N} \|S_{u_j} S_{\mathcal{R}^2 v_j}\| \|f_k\|_{A^2} \\
&\quad \to 0, \quad k \to \infty. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

由定理 8, 对每个 $1 \leqslant j \leqslant N$, 当 $k \to \infty$ 时, 有

$$
Q[\mathcal{R}(v_j f_k)](0) \to 0, \quad Q[\mathcal{R}^2(v_j f_k)](0) \to 0 \quad \text{且} \quad Q[\mathcal{R}^2(u_j T_{v_j} f_k)](0) \to 0. \qquad (3.15)
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{j=1}^{N} \|S_{\mathcal{R}u_j}\| \cdot |Q[\mathcal{R}(v_j f_k)](0)| + \sum_{j=1}^{N} \|S_{u_j}\| \cdot |Q[\mathcal{R}^2(v_j f_k)](0)| + \sum_{j=1}^{N} |Q[\mathcal{R}^2(u_j T_{v_j} f_k)](0)| \\
&\to 0, \quad k \to \infty. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

再由条件 (2) 成立知, $S = \sum_{j=1}^{N} S_{u_j} S_{v_j}$ 是 A^2 上的紧算子. 而 $\mathcal{R}^2 f_k$ 在 A^2 上弱收敛到 0, 故有

$$
\|S(\mathcal{R}^2 f_k)\|_{A^2} \to 0, \quad k \to \infty. \qquad (3.17)
$$

最后, 由引理 8, 当 $k\to\infty$ 时, $\|\mathcal{R}f_k\|_{A^2}\to 0$. 故

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{j=1}^{N}\|S_{\mathcal{R}u_j}S_{v_j}\mathcal{R}f_k\|_{A^2}+2\sum_{j=1}^{N}\|S_{u_j}S_{\mathcal{R}v_j}\mathcal{R}f_k\|_{A^2}\\
&\quad\leqslant 2\bigg[\sum_{j=1}^{N}\|S_{\mathcal{R}u_j}S_{v_j}\|+\sum_{j=1}^{N}\|S_{u_j}S_{\mathcal{R}v_j}\|\bigg]\cdot\|\mathcal{R}f_k\|_{A^2}\to 0,\quad k\to\infty. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

结合 (3.13)–(3.18), 可知 $\|Tf_k\|_{A^2_2}\to 0$, $k\to\infty$, 即 $T=\sum_{j=1}^{N}T_{u_j}T_{v_j}$ 是 A^2_2 上的紧算子.

对 $\beta\in\mathbb{N}^*$, $\beta\geqslant 3$, 由归纳法可得 $\|Tf_k\|_{A^2_\beta}\to 0$ $(k\to\infty)$. (2) $\Rightarrow$ (1) 成立. 证毕. □

由以上结论, 不难得到推论 11.

推论 11 若 $\beta\in\mathbb{N}$, $u,v\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 则半换位子 $T_uT_v-T_{uv}$ 和换位子 $T_uT_v-T_vT_u$ 都是 A^2_β 上的紧算子.

众所周知, Hardy 空间上只有平凡的紧 Toeplitz 算子. 而在 Bergman 空间和 Dirichlet 空间上却存在许多非平凡的紧 Toeplitz 算子, 甚至无界符号的紧 Toeplitz 算子 (参见文献 [20,24–26]). 对于 A^2_β, 有如下结论.

推论 12 若 $\beta\in\mathbb{N}$, $u\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 则 T_u 是 A^2_β 上的紧算子当且仅当 u 在 $\mathbb{T}$ 上消失为零.

4 Toeplitz 算子的 Fredholm 性质

本节考虑 A^2_β 上 Toeplitz 算子的 Fredholm 性质.

定理 13 若 $\beta\in\mathbb{N}^*$, $u\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 则 T_u 是 A^2_β 上的 Fredholm 算子当且仅当符号 u 在边界 $\mathbb{T}$ 处无零点.

证明 一方面, 若 T_u 是 A^2_β 上的 Fredholm 算子, 下证 u 在 $\mathbb{T}$ 上无零点. 若不然, 则存在 $\zeta\in\mathbb{T}$ 使得 $u(\zeta)=0$. 对 $\forall\lambda\in\mathbb{D}$, 由

$$
\begin{aligned}
&\|u\mathfrak{e}_\lambda\|^2_{\mathfrak{L}^{\beta,2}}=\langle\mathcal{R}^\beta(u\mathfrak{e}_\lambda),\mathcal{R}^\beta(u\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{L^2}+\langle\widehat{\mathcal{R}^\beta}(u\mathfrak{e}_\lambda),\widehat{\mathcal{R}^\beta}(u\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{L^2},\\
&|\langle\widehat{\mathcal{R}^\beta}(u\mathfrak{e}_\lambda),\widehat{\mathcal{R}^\beta}(u\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{L^2}|=|\langle\mathfrak{e}_\lambda(\widehat{\mathcal{R}^\beta}u),\mathfrak{e}_\lambda(\widehat{\mathcal{R}^\beta}u)\rangle_{L^2}|\leqslant\|\widehat{\mathcal{R}^\beta}u\|^2_\infty\cdot\|\mathfrak{e}_\lambda\|^2_{A^2}\to 0,\quad\lambda\to\zeta,
\end{aligned}
$$

有

$$
\lim_{\lambda\to\zeta}\|u\mathfrak{e}_\lambda\|^2_{\mathfrak{L}^{\beta,2}}=\lim_{\lambda\to\zeta}\langle\mathcal{R}^\beta(u\mathfrak{e}_\lambda),\mathcal{R}^\beta(u\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{L^2}.
$$

对 $\forall\beta\in\mathbb{N}^*$, 下证 $\lim_{\lambda\to\zeta}\|u\mathfrak{e}_\lambda\|^2_{\mathfrak{L}^{\beta,2}}=0$.

若 $\beta=1$, 则

$$
\begin{aligned}
\langle\mathcal{R}(u\mathfrak{e}_\lambda),\mathcal{R}(u\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}&=\langle(\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda+u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda),(\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda+u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}\\
&=\langle(\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda,(\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}+\langle(\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda,u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}\\
&\quad+\langle u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda),(\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}+\langle u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda),u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}.
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\langle(\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda,(\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}\leqslant\|\mathcal{R}u\|^2_\infty\|\mathfrak{e}_\lambda\|^2_{A^2}\to 0,\quad\lambda\to\zeta
$$

和

$$\begin{aligned}|\langle(\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda, u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}| &= |\langle u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda), (\mathcal{R}u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}|\\ &\leqslant \|u\|_\infty\|\mathcal{R}u\|_\infty\|\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}\|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}\\ &= \|u\|_\infty\|\mathcal{R}u\|_\infty\|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2_1}\|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}\\ &= \|u\|_\infty\|\mathcal{R}u\|_\infty\|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}\to 0,\quad \lambda\to\zeta,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}|\langle u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda), u(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}| &= \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}|\langle u(Q_\lambda-1), u(Q_\lambda-1)\rangle_{A^2}|\\ &\leqslant \frac{1}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}[\langle uQ_\lambda, uQ_\lambda\rangle_{A^2}+2|\langle uQ_\lambda, u\rangle_{A^2}|+\langle u,u\rangle_{A^2}]\\ &\leqslant \frac{\|Q_\lambda\|^2_{A^2}}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\langle S_{|u|^2}q_\lambda, q_\lambda\rangle_{A^2}+\frac{2\|u\|^2_\infty\|Q_\lambda\|_{A^2}+\|u\|^2_\infty}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}}\\ &\leqslant \left(\frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A^2_1}}\right)^2\widetilde{S_{|u|^2}}(\lambda)+\frac{3\|u\|^2_\infty\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|^2_{A^2_1}},\end{aligned}$$

其中 $\|E_\lambda\|_{A^2_1}\to\infty$ $(\lambda\to\zeta)$, $\frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A^2_1}}\to 1$ $(\lambda\to\zeta)$. 因此,

$$\lim_{\lambda\to\zeta}\|u\mathfrak{e}_\lambda\|^2_{\mathfrak{L}^{1,2}}=\lim_{\lambda\to\zeta}\langle\mathcal{R}(u\mathfrak{e}_\lambda),\mathcal{R}(u\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{L^2}\leqslant\lim_{\lambda\to\zeta}\widetilde{S_{|u|^2}}(\lambda)=|u(\zeta)|^2.$$

若 $\beta=2$, 则

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}^2(u\mathfrak{e}_\lambda),\mathcal{R}^2(u\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2} &= \langle(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda+2(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)+u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda),(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda+2(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)+u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}\\ &= \langle(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda,(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}+2\langle(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda,(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}+\langle(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda,u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}\\ &\quad+2\langle(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda),(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}+4\langle(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda),(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}\\ &\quad+2\langle(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda),u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}+\langle u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda),(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}\\ &\quad+2\langle u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda),(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}+\langle u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda),u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

注意到

$$|\langle(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda,(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}|\leqslant\|\mathcal{R}^2u\|^2_\infty\|\mathfrak{e}_\lambda\|^2_{A^2}\to 0,\quad\lambda\to\zeta\tag{4.2}$$

和

$$\begin{aligned}2|\langle(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda,(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}| &= 2|\langle(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda),(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}|\\ &\leqslant 2\|\mathcal{R}u\|_\infty\|\mathcal{R}^2u\|_\infty\|\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}\|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}\to 0,\quad\lambda\to\zeta,\end{aligned}\tag{4.3}$$

以及

$$\begin{aligned}|\langle(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda,u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}| &= |\langle u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda),(\mathcal{R}^2u)\mathfrak{e}_\lambda\rangle_{A^2}|\\ &\leqslant\|\mathcal{R}^2u\|_\infty\|u\|_\infty\|\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}\|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}\end{aligned}$$

$$= \|\mathcal{R}^2 u\|_\infty \|u\|_\infty \|\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} \to 0, \quad \lambda \to \zeta \tag{4.4}$$

和

$$\begin{aligned} &|4\langle(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda), (\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2} + 2\langle(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda), u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2} + 2\langle u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda), (\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}| \\ &\quad \leqslant 4|\langle(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda), (\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}| + 4|\langle(\mathcal{R}u)(\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda), u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}| \\ &\quad \leqslant 4\|\mathcal{R}u\|_\infty^2 \|\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}^2 + 4\|\mathcal{R}u\|_\infty \|u\|_\infty \|\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} \|\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} \\ &\quad = 4\|\mathcal{R}u\|_\infty^2 \|\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2}^2 + 4\|\mathcal{R}u\|_\infty \|u\|_\infty \|\mathcal{R}\mathfrak{e}_\lambda\|_{A^2} \to 0, \quad \lambda \to \zeta, \end{aligned} \tag{4.5}$$

还有

$$\begin{aligned} |\langle u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda), u(\mathcal{R}^2\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{A^2}| &= \frac{1}{\|E_\lambda\|_{A_2^2}^2} |\langle u(\mathcal{R}^2 E_\lambda), u(\mathcal{R}^2 E_\lambda)\rangle_{A^2}| \\ &= \frac{1}{\|E_\lambda\|_{A_2^2}^2} |\langle u(Q_\lambda - 1), u(Q_\lambda - 1)\rangle_{A^2}| \\ &\leqslant \frac{1}{\|E_\lambda\|_{A_2^2}^2} [\langle uQ_\lambda, uQ_\lambda\rangle_{A^2} + 2|\langle uQ_\lambda, u\rangle_{A^2}| + \langle u, u\rangle_{A^2}] \\ &= \frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}^2}{\|E_\lambda\|_{A_2^2}^2} \langle S_{|u|^2} q_\lambda, q_\lambda\rangle_{A^2} + \frac{2\|u\|_\infty^2 \|Q_\lambda\|_{A^2} + \|u\|_\infty^2}{\|E_\lambda\|_{A_2^2}^2} \\ &\leqslant \left[\frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A_2^2}}\right]^2 \widetilde{S_{|u|^2}}(\lambda) + \frac{3\|u\|_\infty^2 \|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A_2^2}^2}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中 $\|E_\lambda\|_{A_2^2} \to \infty$ $(\lambda \to \zeta)$, $\frac{\|Q_\lambda\|_{A^2}}{\|E_\lambda\|_{A_2^2}} \to 1$ $(\lambda \to \zeta)$. 结合 (4.1)–(4.6), 得

$$\lim_{\lambda \to \zeta} \|u\mathfrak{e}_\lambda\|_{\mathfrak{L}^{2,2}}^2 = \lim_{\lambda \to \zeta} \langle \mathcal{R}^2(u\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}^2(u\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{L^2} \leqslant \lim_{\lambda \to \zeta} \widetilde{S_{|u|^2}}(\lambda) = |u(\zeta)|^2.$$

利用归纳法, 对 $\forall \beta \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\lim_{\lambda \to \zeta} \|u\mathfrak{e}_\lambda\|_{\mathfrak{L}^{\beta,2}}^2 = \lim_{\lambda \to \zeta} \langle \mathcal{R}^\beta(u\mathfrak{e}_\lambda), \mathcal{R}^\beta(u\mathfrak{e}_\lambda)\rangle_{L^2} \leqslant \lim_{\lambda \to \zeta} \widetilde{S_{|u|^2}}(\lambda) = |u(\zeta)|^2.$$

故而有

$$\lim_{\lambda \to \zeta} \|T_u \mathfrak{e}_\lambda\|_{A_\beta^2}^2 = \lim_{\lambda \to \zeta} \|P(u\mathfrak{e}_\lambda)\|_{A_\beta^2}^2 \leqslant \lim_{\lambda \to \zeta} \|u\mathfrak{e}_\lambda\|_{\mathfrak{L}^{\beta,2}}^2 \leqslant \lim_{\lambda \to \zeta} \widetilde{S_{|u|^2}}(\lambda) = |u(\zeta)|^2 = 0.$$

这显然与 T_u 是 A_β^2 上的 Fredholm 算子矛盾. 这一矛盾说明 u 在 $\mathbb{T}$ 上无零点.

另一方面, 若 u 在 $\mathbb{T}$ 上无零点, 则由文献 [27, 定理 1.2] 知, S_u 是 A^2 上的 Fredholm 算子. 特别地, S_1 是 A^2 上的 Fredholm 算子. 下证 T_u 是 A_β^2 上的 Fredholm 算子. 若不然, 则 T_u 不是 A_β^2 上的 Fredholm 算子, 故存在 A_β^2 上弱收敛到 0 的单位序列 $\{k_j\}$, 使得当 $j \to \infty$ 时, 有 $\|T_u k_j\|_{A_\beta^2} \to 0$ 或 $\|T_u^* k_j\|_{A_\beta^2} \to 0$. 不失一般性, 假设 $\|T_u k_j\|_{A_\beta^2} \to 0$. 由 S_1 在 A^2 上的 Fredholm 性知, 存在 A^2 上的有界算子 B, 使得 $BS_1 - I$ 在 A^2 上紧.

令 $t_j = \mathcal{R}^\beta k_j$, 则由 $\{k_j\}$ 在 A_β^2 上弱收敛到 0 知, $\{t_j\}$ 在 A^2 上弱收敛到 0. 故

$$\lim_{j \to \infty} \|t_j\|_{A^2}^2 = \lim_{j \to \infty} \|\mathcal{R}^\beta k_j\|_{A^2}^2 = \lim_{j \to \infty} \|k_j\|_{A_\beta^2}^2 = 1,$$

且

$$\lim_{j\to\infty}\langle (BS_1-I)t_j,t_j\rangle_{A^2}=0.$$

从而有

$$\lim_{j\to\infty}\langle BS_1t_j,t_j\rangle_{A^2}=\lim_{j\to\infty}\langle t_j,t_j\rangle_{A^2}=\lim_{j\to\infty}\|t_j\|^2_{A^2}=1.$$

直接计算得

$$\begin{aligned}\langle BQ[\mathcal{R}^\beta(uk_j)],t_j\rangle_{A^2}&=\left\langle BQ\left[\sum_{l=0}^{\beta}C_\beta^l(\mathcal{R}^{\beta-l}u)(\mathcal{R}^lk_j)\right],t_j\right\rangle_{A^2}\\&=\sum_{l=0}^{\beta-1}C_\beta^l\langle BQ(\mathcal{R}^{\beta-l}u)(\mathcal{R}^lk_j),t_j\rangle_{A^2}+\langle BQ[(\mathcal{R}^\beta k_j)],t_j\rangle_{A^2}\\&=\sum_{l=0}^{\beta-1}C_\beta^l\langle BS_{\mathcal{R}^{\beta-l}u}\mathcal{R}^lk_j,t_j\rangle_{A^2}+\langle BS_1t_j,t_j\rangle_{A^2},\end{aligned}$$

且对每个 $l\in\mathbb{N}$, $l\leqslant\beta-1$, 有

$$\begin{aligned}|\langle BS_{\mathcal{R}^{\beta-l}u}\mathcal{R}^lk_j,t_j\rangle_{A^2}|&\leqslant\|B\|\|S_{\mathcal{R}^{\beta-l}u}\|\cdot|\langle\mathcal{R}^lk_j,t_j\rangle_{A^2}|\leqslant\|B\|\cdot\|S_{\mathcal{R}^{\beta-l}u}\|\cdot\|\mathcal{R}^lk_j\|_{A^2}\|t_j\|_{A^2}\\&=\|B\|\cdot\|S_{\mathcal{R}^{\beta-l}u}\|\cdot\|\mathcal{R}^lk_j\|_{A^2}\to0,\quad j\to\infty.\end{aligned}\tag{4.7}$$

这意味着当 $j\to\infty$ 时, 有

$$\langle BQ[\mathcal{R}^\beta(uk_j)],t_j\rangle_{A^2}\to1.\tag{4.8}$$

根据引理 8, 结合 (4.8), 有

$$\begin{aligned}\langle B[\mathcal{R}^\beta(T_uk_j)],t_j\rangle_{A^2}&=\langle B[\mathcal{R}^\beta(P(uk_j))],t_j\rangle_{A^2}=\langle BQ[\mathcal{R}^\beta(uk_j)],t_j\rangle_{A^2}-\langle BQ[\mathcal{R}^\beta(uk_j)](0),t_j\rangle_{A^2}\\&=\langle BQ[\mathcal{R}^\beta(uk_j)],t_j\rangle_{A^2}-Q[\mathcal{R}^\beta(uk_j)](0)\langle B1,t_j\rangle_{A^2}\to1,\quad j\to\infty.\end{aligned}\tag{4.9}$$

然而, 由 $\|T_uk_j\|_{A^2_\beta}\to0\ (j\to\infty)$, $\|t_j\|_{A^2}\to1\ (j\to\infty)$, 有

$$|\langle B[\mathcal{R}^\beta(T_uk_j)],t_j\rangle_{A^2}|\leqslant\|B\|\|\mathcal{R}^\beta(T_uk_j)\|_{A^2}\|t_j\|_{A^2}=\|B\|\|T_uk_j\|_{A^2_\beta}\|t_j\|_{A^2}\to0,\quad j\to\infty,$$

显然与 (4.9) 矛盾. 这一矛盾说明 T_u 是 A^2_β 上的 Fredholm 算子. 证毕. □

推论 14 若 $u\in\mathfrak{L}^{\beta,\infty}$, 则 $\sigma_e(T_u)=u(\mathbb{T})$.

致谢 作者对审稿人的宝贵建议和修改意见表示衷心的感谢.

参考文献

1 Cao G F, He L. Hardy-Sobolev spaces and their multipliers. Sci China Math, 2014, 57: 2361–2368

2 Adams R A. Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics. New York-London: Academic Press, 1975

3 彭立中. Hardy-Sobolev 空间. 北京大学学报, 1983, 2: 26–41

4 Ortega J M, Fàbrega J. Division and extension in weighted Bergman-Sobolev spaces. Publ Mat, 1992, 36: 837–859

5 Ortega J M. Interpolation in Bergman-Sobolev spaces. Rev Real Acad Cienc Exact Fís Natur Madrid, 1992, 86: 199–201

6 Ortega J M. The Gleason problem in Bergman-Sobolev spaces. Complex Var Elliptic Equ, 1992, 20: 157–170

7 Tchoundja E. Carleson measures for the generalized Bergman spaces via a $T(1)$-type theorem. Ark Mat, 2008, 46: 377–406
8 Cohn W S, Verbitsky I E. On the trace inequalities for Hardy-Sobolev functions in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. Indiana Univ Math J, 1994, 43: 1079–1097
9 Bruna J, Ortega J M. Interpolation along manifolds in Hardy-Sobolev spaces. J Geom Anal, 1997, 7: 17–45
10 Ortega J M, Fàbrega J. Multipliers in Hardy-Sobolev spaces. Integral Equations Operator Theory, 2006, 55: 535–560
11 Cascante C, Ortega J M. Carleson measures for weighted Hardy-Sobolev spaces. Nagoya Math J, 2007, 186: 29–68
12 Cho H R, Zhu K H. Holomorphic mean Lipschitz spaces and Hardy-Sobolev spaces on the unit ball. Complex Var Elliptic Equ, 2012, 57: 995–1024
13 Cho H R, Zhu K H. Fock-Sobolev spaces and their Carleson measures. J Funct Anal, 2012, 263: 2483–2506
14 Cho H R, Choe B R, Koo H. Linear combinations of composition operators on the Fock-Sobolev spaces. Potential Anal, 2014, 41: 1223–1246
15 Cho H R, Isralowitz J, Joo J C. Toeplitz operators on Fock-Sobolev type spaces. Integral Equations Operator Theory, 2015, 82: 1–32
16 Cho H R, Choe B R, Koo H. Fock-Sobolev spaces of fractional order. Potential Anal, 2015, 43: 199–240
17 Wang X F, Cao G F, Xia J. Toeplitz operators on Fock-Sobolev spaces with positive measure symbols. Sci China Math, 2014, 57: 1443–1462
18 Cao G F, He L. Fredholmness of multipliers on Hardy-Sobolev spaces. J Math Anal Appl, 2014, 418: 1–10
19 He L, Cao G F. Composition operators on Hardy-sobolev spaces. Indian J Pure Appl Math, 2015, 46: 255–267
20 He L, Cao G F. Toeplitz operators with unbounded symbols on Segal-Bargmann space. J Math Res Appl, 2015, 35: 237–255
21 Choe B R, Koo H. Zero products of Toeplitz operators with harmonic symbols. J Funct Anal, 2006, 233: 307-334
22 Engliš M. Compact Toeplitz operators via the Berezin transform on bounded symmetric domains. Integral Equations Operator Theory, 1999, 33: 426–455
23 Zhu K H. Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. New York: Springer-Verlag, 2005
24 Cao G F. Toeplitz operators with unbounded symbols of several complex variables. J Math Anal Appl, 2008, 339: 1277–1285
25 Lee Y J. Compact sums of Toeplitz products and Toeplitz algebra on the Dirichlet space. Tohoku Math J (2), 2016, 68: 253–271
26 Wang X F, Xia J, Cao G F. Trace class Toeplitz operators on Dirichlet space with unbounded symbols. Indian J Pure Appl Math, 2009, 40: 21–28
27 McDonald G. Fredholm properties of a class of Toeplitz operators on the ball. Indian Univ Math J, 1977, 26: 567–576

Toeplitz operators on Bergman-Sobolev space with positive integer derivative

HE Li & CAO GuangFu

Abstract Toeplitz operators on Bergman-Sobolev space of the unit disk are much more complex than those on the Hardy space and the Bergman space, and many basic problems have not been solved. This paper discusses some properties of Toeplitz operators on Bergman-Sobolev Space with positive integer derivative, mainly including characterizing the boundedness, compactness and Fredholmness of these operators.

Keywords Bergman-Sobolev space, Toeplitz operator, projection, Fredholmness

MSC(2010) 32A37, 47B35, 47A30

doi: 10.1360/SCM-2016-0111