中国科学: 物理学 力学 天文学　2014 年　第 44 卷　第 12 期: 1275 – 1285
SCIENTIA SINICA　Physica, Mechanica & Astronomica　phys.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

非线性科学专辑 · 评述

# 大气、海洋动力学中一些非线性偏微分方程的研究

郭柏灵[①], 黄代文[①]*, 黄春研[②]

① 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088;
② 中央财经大学统计与数学学院, 北京 100081
* 联系人, E-mail: hdw55@tom.com

收稿日期: 2014-04-23; 接受日期: 2014-07-14
国家重点基础研究发展计划 (编号: 2013CB834100) 和国家自然科学基金 (批准号: 90511009, 11071240) 资助项目

**摘要**　本文简要综述大气、海洋动力学中一些非线性偏微分及其无穷维动力系统的研究进展, 其中包括我们近年来取得的一些研究成果. 首先, 我们介绍 (无耗散的和耗散的) 表面准地砖方程近 20 来年的数学理论的研究成果. 接着, 我们综述了描述大尺度大气、海洋运动的大气、海洋原始方程组的一些定性理论的研究成果, 含适定性、解的长时间行为和整体吸引子的存在性等. 最后, 我们介绍大气、海洋随机动力学的一些数学模型的研究结果, 主要是带随机力的海洋原始方程组的适定性及其对应的无穷维随机动力系统的全局吸引子的存在性的结果.

**关键词**　表面准地转方程, 原始方程组, 随机偏微分方程, 整体适定性, 全局吸引子

**PACS:** 02.30Jr, 02.30.Sa, 02.50.Fz

**doi:** 10.1360/SSPMA2014-00114

## 1　引言

由于大气是特殊的可压流体, 海洋是特殊的不可压流体, 人们可以应用动力学方法研究支配大气、海洋运动的非线性偏微分方程组 (见文献 [1–5]), 从而理解天气预报和气候变化机制. 气象学的先驱之一 V. Bjerknes 曾经说:“天气预报可以被看作数学物理中一个初边值问题”, 参见文献 [6]. 也就是说, 人们可以建立以数学物理方法为基础的数值天气预报.

支配大气、海洋运动的数学方程组主要由下面方程组成: 质量、动量、能量守恒方程和状态方程 (还有其他方程, 对于大气是水汽守恒方程, 而对于海洋是盐度守恒方程). 大气的质量和动量守恒方程从本质上看是可压的 (对于海洋, 取 Boussinesq 近似, 为不可压的)Navier- Stokes 方程. 因为大气、海洋运动的基本方程组含有太多复杂的信息 (例如, 空间尺度从 10 km 的小尺度, 100 km 的中尺度一直到 1000 km 的大尺度都有), 所以人们在可预见的未来可能无法从数值和理论上彻底地解决它们. 为此, 人们必须略去一些中小尺度的因素, 合理地简化大气、海洋运动的基本方程组, 从而才能实现数值天气预报. 由于全球大气 (海洋) 的垂直方向上的尺度比水平方向上的尺度小得多, 最自然的简化方法就是取静力近似, 即把竖直方向上的动量守恒方程用流体静力平衡方程 (它满足大尺度大气、海洋的观测数据) 来代替. 1922 年, Richardson 为了实现数值天气预报首次引进了大

**引用格式:** 郭柏灵, 黄代文, 黄春研. 大气、海洋动力学中一些非线性偏微分方程的研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2014, 44: 1275–1285
Guo B L, Huang D W, Huang C Y. Study on some partial differential equations in the atmospheric and oceanic dynamics (in Chinese). Sci Sin- Phys Mech Astron, 2014, 45: 1275–1285, doi: 10.1360/SSPMA2014-00114

气原始方程组和海洋原始方程组. 它们包括带科氏力的流体力学方程组、热动力学方程和状态方程等, 参见文献 [4]. 当时, 因为这些方程组还是比较复杂, 又因为计算能力还较为落后, 所以人们仍然无法从理论和数值上解决它, 也就无法真正实现数值天气预报的梦想.

为了克服这一困难, 人们后来引进了一些简化数值模式, 比如 Charney, Fjortaft 和 Neumann 提出的正压模式 (见文献 [7]), 和 Charney 和 Philips 在文献 [8] 中引进的准地转模式. 1950 年, Charney, Fjortaft 和 Neumann 利用他们的二维正压模式 (即球面上带科里奥利力的 Euler 方程) 在普林斯顿的高等研究所的 ENIAC 计算机上成功地实现数值天气预报, 这被称为天气预报的一场重大革命. 随后, 作为大气科学发展的一个重要成果, 数值天气预报已在世界各国得到了广泛的应用.

20 世纪 50 年代后, 气象科学有了蓬勃发展. 同时, 一些近代科学技术的成就大大地促进了数值天气预报的快速发展: 利用空间科学技术 (如雷达) 和气象卫星等现代化工具, 人们能够及时地获得全球大气从底到高的气象资料; 大型计算机提供了加工处理资料和进行数值计算的强有力工具. 因此, 研究人员又开始转向利用大气原始方程组和海洋原始方程组来预报天气和气候. 大气原始方程组和海洋原始方程组分别是美国的大气研究国家中心 (NCAR) 使用的全球大气环流模式 (AGCM) 和全球海洋环流模式 (OGCM) 的核心组成部分. 许多数值天气预报的模式都是基于大气原始方程组和海洋原始方程组, 见文献 [9–16] 和其中的引文. 数值天气预报的物质条件方面已经比较成熟了, 理论研究的重要性就越来越突出, 这方面的文章见 [5, 17, 18]. 人们有必要深入分析各种各样的大气、海洋动力学模式, 用合理的数学方法来研究这些模式, 建立它们的定性理论 (定性理论在数值预报的可靠性分析中就发挥着至关重要的作用). 从而, 人们可以选择较为准确的数值预报模式.

起初, 人们主要研究简化二维和三维大气、海洋的数学模型, 包括二维和三维准地转方程. 这些模式着重于突出研究大气海洋的某些特征. 由于突出重点, 数学理论比较成熟, 问题可以研究得更为透彻, 比如说带粘性的二维和三维准地转方程的适定性已经基本解决, 见文献 [19–24]. 上世纪八十年代起, 二维和三维准地转方程已经成为数学研究的一个主题 (人们可以研究对应问题的适定性、波的非线性稳定性, 也可以研究各种各样的简化模型的数学合理性), 相关研究结果参见文献 [25–30]. 穆穆院士在准地转方程研究方面做了许多重要的、很有理论意义和实际应用价值的工作. 为了描述一致位涡场 ($q = 0$) 的下表面的位温 (或浮力) 的演化, 人们得到了表面准地转方程, 参见文献 [31]. Constantin 等在文献 [32] 中研究了表面准地转方程, 揭示了该方程与三维不可压缩的 Euler 方程有一些重要的相似之处, 而且通过计算猜测表面准地转方程可能出现奇性解. 后来表面准地转方程的适定性问题已经成为非线性偏微分方程研究的一个主题, 相关的研究工作可以参见文献 [33–42] 和其中的引文. 二十世纪九十年代初, 许多数学家 (例如 J. L. Lions, R. Temam 和 S. Wang) 开始从数学上研究大气、海洋和耦合的大气海洋原始方程组 (见文献 [17, 18, 43–47] 和其中的引文). 近十年来, 人们也开始重视随机大气、海洋动力学中一些数学模型的理论和数值研究.

这里, 我们主要介绍大气、海洋动力学中表面准地转方程、大气海洋原始方程组和一些随机非线性偏微分方程的研究的进展. 本文的安排如下: 首先, 介绍表面准地转方程的一些研究进展; 其次, 给出大气、海洋原始方程组的定性理论的一些研究成果; 最后, 介绍大气、海洋动力学的一些随机数学模型的研究结果.

## 2 表面准地转方程

### 2.1 无耗散的表面准地转方程

下面, 我们首先给出表面准地转方程的推导. 把在静力近似和 Boussinesq 近似下的绝热无摩擦的大气或海洋基本方程组关于小 Rossby 数展开, 可以得到一阶近似

$$\partial_t \xi + J(\psi, \xi) = f \partial_z w,$$

$$\partial_t \theta + J(\psi, \theta) = -N^2 w,$$

其中 $\xi=\psi_{xx}+\psi_{yy}$, $\psi$ 为流函数, $J(\psi,\xi)=\psi_x\xi_y-\psi_y\xi_x$, $w$ 为垂直方向上的速度, $\theta=f\psi_z$, 对于大气而言, $\theta$ 是位温 (它是将空气微团通过绝热过程移动到压强为 1 个标准大气压处的温度), 对于海洋而言, $\theta$ 是浮力, $f$ 为科氏参数, $N$ 为浮力频率, 为了简单起见, 假设 $f$ 和 $N$ 均为常数. 消去前面两个方程中的 $w$, 关于 $z$ 做一个变换, 得到

$$\partial_t q+J(\psi,q)=0, \tag{1}$$

其中 $q=(\partial_{xx}+\partial_{yy}+\partial_{zz})\psi$, $q$ 表示位涡. 如果边界上没有热交换, 也不考虑边界上的摩擦, 底面为平面, 方程 (1) 的下边界 ($z=0$) 条件可以写为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial\psi}{\partial z})=0$, 即

$$\partial_t\theta+J(\psi,\theta)=0, \tag{2}$$

这里 $\theta(x,y)=\partial_z\psi|_{z=0}$. (1) 和 (2) 式的一个特殊例子是如下的系统:

$$(\partial_{xx}+\partial_{yy}+\partial_{zz})\psi=0,\quad z>0, \tag{3}$$

$$\partial_t\theta+J(\psi,\theta)=0,\quad z=0, \tag{4}$$

$$\psi\to 0,\quad z\to\infty. \tag{5}$$

系统 (3)–(5) 描述一致位涡场 ($q=0$) 的下表面的位温 (或浮力) 的演化, 它可以用于模拟冷暖气团交界处的锋生 (frontogenesis). 关于系统 (3)–(5) 的应用背景的详细描述可参见文献 [31].

如果 $\theta(x,y)$ 是具体给定的, 那么通过解椭圆方程的边值问题

$$(\partial_{xx}+\partial_{yy}+\partial_{zz})\psi=0,\quad z>0,$$

$$\partial_z\psi|_{z=0}=\theta(x,y),$$

$$\psi\to 0,\quad z\to\infty,$$

就可以得到 $\psi$ 在 $z>0$ 中的分布. 因此, 为了研究系统 (3)–(5), 可以考虑下面方程的 Cauchy 问题: $\partial_t\theta+J(\psi,\theta)=0$, 即

$$\partial_t\theta+u\cdot\nabla\theta=0,\quad \text{in}\ \mathbb{R}^2, \tag{6}$$

其中

$$-\theta=(-\triangle)^{\frac{1}{2}}\psi, \tag{7}$$

$$u=(u_1,u_2)=(-\psi_y,\psi_x), \tag{8}$$

$\mathbb{R}^2$ 可以换为二维的换面 $\mathbb{T}^2$, 非局部算子 $(-\triangle)^{\frac{1}{2}}$ 是通过如下的 Fourier 变换定义的,

$$\widehat{(-\triangle)^{\frac{1}{2}}\psi}(\xi)=|\xi|\hat{\psi}(\xi), \tag{9}$$

这里 $\hat{\psi}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-i\eta\cdot\xi}\psi(\eta)\mathrm{d}\eta$. (8) 可以重写为

$$u=(\partial_y(-\triangle)^{-\frac{1}{2}}\theta,-\partial_x(-\triangle)^{-\frac{1}{2}}\theta)=(-R_2\theta,R_1\theta), \tag{10}$$

其中 $R_1,R_2$ 表示 Riesz 变换, $\widehat{R_jf}(\xi)=-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$. 方程 (6) 称为表面准地转方程(Surface quasi-geostrophic equation).

人们研究方程 (6) 的另一个重要原因是: (6) 与三维不可压 Euler 方程有一些重要的相似之处. 事实上, 方程 (6) 关于 $y$ 和 $x$ 求导, 得到

$$\frac{\partial\nabla^{\perp}\theta}{\partial t}+(u\cdot\nabla)\nabla^{\perp}\theta=(\nabla u)\nabla^{\perp}\theta. \tag{11}$$

其中 $\nabla^{\perp}\theta=\begin{pmatrix}-\theta_y\\ \theta_x\end{pmatrix}$, $(\nabla u)=\begin{pmatrix}u_{1x} & u_{1y}\\ u_{2x} & u_{2y}\end{pmatrix}$, 而三维不可压缩的 Euler 方程的涡度形式为

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+(v\cdot\nabla)\omega=(\nabla v)\omega, \tag{12}$$

其中 $\omega=\mathrm{curl}v$, $v=(v_1,v_2,v_3)$, $(\nabla v)=(\partial_jv_i),\partial_j=\partial_x,\partial_y,\partial_z,i=1,2,3$. (11) 和 (12) 具有一种相似的结构: 旋涡的拉伸 (vortex stretching).

在文献 [32] 中, Constantin 等通过数学理论和数值实验的结合研究了无耗散的表面准地转方程的 Cauchy 问题, 即 (6) 带初始条件:

$$\theta(t,x,y)|_{t=0}=\theta_0(x,y). \tag{13}$$

首先, 他们得到 (6) 和 (13) 的光滑解的局部存在性. 同时, 他们也得到了无耗散的表面准地转方程的 Cauchy 问题的爆破 (Blow up) 准则.

虽然无耗散的表面准地转方程的 Cauchy 问题和周期问题都存在局部光滑解, 但是他们是否存在有限时间爆破解仍然是一个公开问题. 为了解决这一问题, 人们试图通过数值模拟寻找有限时间爆破解. 在文献 [32] 中, Constantin 等选取

$$\theta_0=\sin x\sin y+\cos y, \tag{14}$$

通过数值模拟得到了无耗散的表面准地转方程的周期问题一个形成强锋面的解, 由此猜测该解可能产生有限时间的爆破. 而且, 他们受到数值模拟结果的启发, 研究了产生爆破的位温张量的水平集的拓扑特征. 文献 [48, 49] 和文献 [34] 分别给出了表面准地转方程以 (14) 的 $\theta_0$ 为初始数据的解不会在有限时间爆破的数值和理论证据.

### 2.2 耗散的表面准地转方程

带耗散的表面准地转方程为

$$\partial_t\theta+u\cdot\nabla\theta+\kappa(-\triangle)^{-\alpha}\theta=0,\ \text{in}\ \Omega, \tag{15}$$

其中 $-\theta=(-\triangle)^{\frac{1}{2}}\psi$, $u=(-\psi_y,\psi_x)=(-R_2\theta,R_1\theta)$, $\kappa>0$, 非局部算子 $(-\triangle)^{\alpha}(1\geqslant\alpha\geqslant0)$ 是通过如下的 Fourier 变换定义的: $\widehat{(-\triangle)^{\alpha}\theta}(\xi)=|\xi|^{2\alpha}\hat{\theta}(\xi)$, $R_j$ 是 Riesz 变换, $\Omega$ 可以取 $\mathbb{R}^2$ 或二维环面 $\mathbb{T}^2$.

当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时, 方程 (15) 由下面的系统导出,

$$\begin{gathered}(\partial_{xx}+\partial_{yy}+\partial_{zz})\psi=0, z>0,\\ \frac{\mathrm{d}\frac{\partial\psi}{\partial z}}{\mathrm{dt}}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+J(\psi,\theta)=-\frac{E_v^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}(\partial_{xx}+\partial_{yy})\psi, \quad (16)\\ z=0,\psi\to0,z\to\infty,\end{gathered}$$

其中 (16) 中第二个式子是文献 [50] 中的方程 (6.6.10) (当 $\eta_B=0, H=0$ 时, 即下边界是平面, 且边界上没有热变换). $E_v$ 是 Ekman 数, $\varepsilon$ 是 Rossby 数, $-\frac{E_v^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}(\partial_{xx}+\partial_{yy})\psi$ 表示摩擦.

下面, 我们介绍关于带耗散的表面准地转方程的适定性的研究成果. Resnick 在文献 [51] 中得到了带外力和耗散的表面准地转方程的弱解的整体存在性. Constantin 和 Wu 在文献 [35] 中得到当 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant1$ 时, 带耗散的表面准地转方程的光滑解的整体存在性.

**注记 2.1** 当 $1\geqslant\alpha>\frac{1}{2}$ 时, 带耗散的表面准地转方程 (15) 的光滑解整体存在. 人们把当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时的 (15) 称为带次临界耗散的表面准地转方程; 把当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时的 (15) 称为带临界耗散的表面准地转方程; 把当 $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$ 时的 (15) 称为带超临界耗散的表面准地转方程.

带临界耗散的表面准地转方程的整体适定性问题曾经是一个公开问题. 这里我们介绍一下关于这个问题的几个结果:

(1) Constantin 等在文献 [36] 中得到了在 $\|\theta_0\|_{L^\infty}$ 充分小的条件下的光滑解的整体存在性, 他们主要的定理如下:

**定理 2.2** 如果 $\theta_0\in H^2(\Omega)$, $\Omega=[0,2\pi]^2$, $\theta_0$ 满足周期的边界条件, 而且存在正的常数 $C_\infty$, 使得 $\|\theta_0\|_{L^\infty}\leqslant C_\infty k$, 则带临界耗散的表面准地转方程的初值问题

$$\begin{cases}\theta_t+u\cdot\nabla\theta+\kappa(-\triangle)^{\frac{1}{2}}\theta=0, & \text{in}\ \Omega,\\ u=(u_1,u_2)=(-R_2\theta,R_1\theta), & \text{in}\ \Omega,\\ \theta(x,0)=\theta_0(x)\end{cases} \tag{17}$$

的解整体存在, 而且是唯一的, 对于 $\forall t\geqslant0$, $\|\theta(\cdot,t)\|_{H^2}\leqslant\|\theta_0\|_{H^2}$.

(2) 最近, 有两个关于带临界耗散的表面准地转方程的整体适定性的重要成果:

1) Kiselev 等在文献 [40] 中利用非局部最大值原理构造适当的连续模, 从而证明带临界耗散的表面准地转方程的周期问题的整体适定性, 即

**定理 2.3** 带临界耗散的表面准地转方程的周期问题: $\theta_t+u\cdot\nabla\theta+\kappa(-\triangle)^{\frac{1}{2}}\theta=0$, $\theta(x,y,0)=\theta_0$, $\theta_0$ 是光滑且周期的, 则该问题整体存在唯一且光滑的解, $\|\nabla\theta\|_\infty\leqslant C\|\nabla\theta_0\|_\infty\exp\exp(c\|\theta_0\|_\infty)$.

2) 在文献 [42] 中, Caffarelli 和 Vasseur 应用 De Giorgi Nash Moser 方法和调和延拓证明了弱解的正则性, 从而得到了带临界耗散的表面准地转方程的 Cauchy 问题的整体适定性.

带超临界耗散的表面准地转方程的整体适定性问题至今仍然是一个公开问题. 人们得到了该方程的 Cauchy 问题或周期问题在 Sobolev 空间和 Besov 空间的小初值解的整体存在性或大初值解的局部存在性, 这些结果可以参见文献 [52–57].

## 3 大气、海洋原始方程组

在这一节中, 我们介绍大气、海洋原始方程组的定性理论方面的研究进展, 主要包括整体适定性以

及大气、海洋无穷维动力系统吸引子的存在性的结果.

人们利用大气、海洋原始方程组进行数值天气预报, 首先关心的是这些方程组在数学上是否具有内在的逻辑统一性, 即适定性. 所以, 本节的主要任务之一就是介绍这些方程组的适定性方面的一些结果. 如果大气、海洋原始方程组的初边值问题解存在而且唯一, 那么就存在与这些方程组对应的无穷维动力系统. 为了理解大气、海洋无穷维动力系统的长时间行为 (这是大气、海洋无穷维动力系统的主要研究内容), 人们需要研究这些无穷维动力系统的吸引子的存在性和维数. 如果大气、海洋原始方程组对应的无穷维动力系统的全局吸引子存在, 而且是有限维的, 也就是说这些大气、海洋无穷维系统的解集收缩到有限维的流形上, 那么人们可以采用低阶谱截断方法将复杂的大气、海洋偏微分方程组化为常微分方程组, 这样问题变得简化多了. 研究大气、海洋吸引子具有重要的实际意义, 例如, 它有助于阐明气候系统的适应和演变过程, 有助于人们提出长期预报模式设计的准则等, 详细内容见参考文献 [17, 18, 58–63].

早在 1979 年, 曾庆存院士就在文献 [5] 中应用 Galerkin 方法讨论了不带黏性的大气原始方程组的适定性问题, 得到了弱解的存在性. 20 世纪 90 年代初, 许多数学家开始从数学上研究大气、海洋原始方程组和耦合的大气海洋原始方程组. 在文献 [43] 中, 通过引入黏性和一些技术处理, Lions, Temam 和 Wang 得到了干大气原始方程组的新表示. 在气压坐标系下, 这一原始方程组的新表述与不可压流体的 Navier-Stokes 方程类似 (当然还是有些不同, 主要是: Navier-Stokes 方程的非线性项是 $(u\cdot\nabla)u$, 而大气原始方程组的新表示的非线性项含有 $(\int_\xi^1 \mathrm{div} v \mathrm{d}\xi')\frac{\partial v}{\partial \xi}$, $u$ 是 Navier-Stokes 方程的三维速度场, $v$ 是大气中水平方向上的速度场). 利用解决 Navier-Stokes 方程的方法 (即通常称的 Leray-Hopf 方法), 他们得到了干大气原始方程组新表述的初边值问题整体弱解的存在性. 而且, 在带垂直黏性的大气原始方程组的初边值问题存在整体强解的假设下, 他们做出了大气全局吸引子的 Hausdorff 和分形维数的估计. 在文献 [44, 46] 中, 他们分别建立了海洋原始方程组和文献 [45] 引入的耦合大气 - 海洋模型的一些数学理论 (他们主要解决了整体弱解的存在性, 在强解存在的假设下研究了全局吸引子的 Hausdorff 和分形维数的估计). 在文献 [64, 65] 中, 丑纪范院士和李建平教授研究了干和湿大气基本方程组解的渐近行为. 2008 年, 李建平教授和汪守宏教授对大气和海洋非线性无穷维动力系统的研究做了一个比较系统的回顾, 参见文献 [66].

近十年来, 一些数学家开始考虑大气、海洋三维黏性原始方程组的强解的整体存在性、唯一性和关于初始值的连续依赖性 (见文献 [47, 67–72] 和其中的引文). 在文献 [70] 中, Guillén-González 等巧妙地利用各向异性估计来处理非线性项 $(\int_\xi^1 \mathrm{div} v \mathrm{d}\xi')\frac{\partial v}{\partial \xi}$, 从而在初始数据充分小的假设下得到了海洋原始方程组的强解的整体存在性, 而且还证明了对所有初始数据 (没有充分小的假设) 强解的局部存在性. 在文献 [47] 中, Temam 和 Ziane 研究了大气、海洋和耦合的大气 - 海洋原始方程组的强解的局部存在性. 文献 [67–69] 主要用于考虑无量刚 Boussinesq 方程组及其修正模式 (这些模式可见文献 [3, 72]). 在文献 [67] 中, Cao 和 Titi 考虑了三维全球地转模式的整体适定性和有限维全局吸引子的存在性. 文献 [69] 的作者考虑了如下柱形区域中海洋三维黏性原始方程组强解的整体适定性,

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v+w\frac{\partial v}{\partial z}+fk\times v+\nabla p-\frac{1}{Re_1}\triangle v-\frac{1}{Re_2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}+T=0,\quad \mathrm{div} v+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+v\cdot\nabla T+w\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{1}{Rt_1}\triangle T-\frac{1}{Rt_2}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=Q,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=0,\ w=0,\ \frac{\partial T}{\partial z}=-\alpha_s T\quad \text{on } M\times\{0\}=\Gamma_u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=0,\ w=0,\ \frac{\partial T}{\partial z}=0\quad \text{on } M\times\{-1\}=\Gamma_b,$$

$$v\cdot\boldsymbol{n}=0,\ \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{n}=0,\ \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}=0\quad \text{on } \partial M\times[-1,0]=\Gamma_l,$$

其中未知函数是 $v$, $w$, $p$, $T$, $v=(v^{(1)},v^{(2)})$ 是水平方向上的速度, $w$ 是垂直方向上的速度, $p$ 是压力, $T$ 是温度, $f=f_0(\beta+y)$ 是 Coriolis 参数, $k$ 是垂直方向上的单位向量, $Re_1$, $Re_2$ 是 Reynolds 数, $Rt_1$, $Rt_2$ 是水平和垂直方向上热扩散系数, $Q$ 是给定的 $\Omega$ 上的函数, $\Omega$ 是柱形区域, $\Omega=M\times(-1,0)$, $M$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中边界光滑

的区域. Cao 和 Titi [69] 利用静力近似, 把水平方向上的速度场 $v$ 分解为正压流 $\bar{v}$ ($\bar{v}=\int_0^1 v\mathrm{d}\xi$) 和斜压流 $\tilde{v}$ ($\tilde{v}=v-\bar{v}$), 再经过一些复杂的计算得到了斜压流 $\tilde{v}$ 的 $L^6$- 范数关于时间局部一致的有界性. 利用斜压流 $\tilde{v}$ 的 $L^6$- 范数关于时间一致的有界性, Cao 和 Titi 完整地证明了海洋三维黏性原始方程组的强解的整体存在性、唯一性和关于初始值的连续依赖性. 从而, 人们从某种意义上可以说海洋三维黏性原始方程组比不可压 Navier-Stokes 方程来得简单, 这是与物理的观点一致的, 因为海洋的原始方程组是经过取静力近似而得到的.

2006 年, Guo 等人 [73] 研究了如下气压坐标系下的湿大气原始方程组

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\nabla_v v+W(v)\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{f}{R_0}k\times v+\int_\xi^1\frac{bP}{p}\mathrm{grad}[(1+cq)T]\mathrm{d}\xi'$$

$$+\mathrm{grad}\Phi_s-\triangle v-\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\nabla_v T+W(v)\frac{\partial T}{\partial \xi}-\frac{bP}{p}(1+cq)W(v)-\triangle T-\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}=Q_1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\nabla_v q+W(v)\frac{\partial q}{\partial \xi}-\triangle q-\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2}=Q_2,$$

$$\int_0^1 \mathrm{div} v\,\mathrm{d}\xi=0,$$

其中未知函数是 $v$, $\omega$, $\Phi$, $T$, $q$, $v=(v_\theta,v_\varphi)$ 是水平方向上的速度, $\omega=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=W(v)$ 是气压 $p-$ 坐标系下垂直方向上的速度, $\Phi=gz$ 是地势, $T$ 是温度, $q=\frac{\rho_1}{\rho}$ 是空气中水汽的混合比, $\rho_1$ 是空气中水汽的密度, $f=2\cos\theta$ 是科氏参数, $k$ 是垂直方向上的单位向量, $\overline{T}$ 是参考的空气温度, $\mu_i,\nu_i,c$ 是正的常数 ($i=1,2,3,c\approx 0.618$), $Q_1$ 是热源, $Q_2$ 是水汽的源, $W(v)(t;\theta,\varphi,\xi)=\int_\xi^1 \mathrm{div}v(t;\theta,\varphi,\xi')\mathrm{d}\xi'$. 郭和黄证明了湿大气原始方程组弱解的整体存在性, 并利用上述方程组关于时间平移不变的特性, 在弱解的基础上得到了关于时间平移半群的大气吸引子 (弱意义下的大气吸引子). 2008 年, 利用流体静力近似, Guo 等人 [74] 得到了干大气原始方程组强解的整体存在性、唯一性, 同时也得到了其对应无穷维动力系统关于解半群的全局吸引子存在性; 2009 年, 通过精细的能量估计, 我们在文献 [75] 证明了干大气原始方程组光滑解的整体存在性, 从而比较完整地解决了三维干大气原始方程组的定性理论. 在文献 [76], 我们解决了湿大气原始方程组的整体适定性问题, 也研究了强解的长时间行为, 从而得到了湿大气的存在性.

近几年来, 人们研究了带其他边界条件的大气、海洋原始方程组的整体适定性, 例如文献 [77,78], 同时也研究了带部分耗散的大气、海洋原始方程组的定性理论, 参见文献 [79].

## 4 大气、海洋随机动力学中的一些数学模型

在长期天气预报和气候预测中, 随机因素的作用是至关重要的, 把大气过程看作随机过程比较合理, 此时, 人们只能预报大气相关物理量的期望、方差等. 类似地, 在长期海洋预报中, 可以把海洋过程看作随机过程. 为了更加客观地预测气候变化, 1975 年后, 人们提出了一些随机气候模式, 建立了描述气候随机变化的 Langevin 方程及相应的 Fokker-Planck 方程, 这方面的工作可以参见文献 [80–82]. 1980 后, 人们建立了简化随机气候模式, 揭示了随机力对气候系统变化的影响, 可以参见文献 [83–86].

近十年来, 人们又开始重视随机气候模式的研究. Majda 及其合作者从数学上对随机气候模式做了大量理论和数值计算方面的工作, 取得了许多重要的成果, 参见文献 [87–92]. 周秀骥院士在文献 [93] 中指出: 起源于分子热运动的宏观微尺度随机力是大气本身固有的属性; 太阳辐射作为决定大气运动与变化的主要因子, 它的变化具有随机性, 是大气随机强迫因子, 它对气候变化具有决定性影响; 地 - 气相互作用是一个时变的非线性相互反馈的耦合过程, 形成了下边界对大气复杂的随机强迫作用. 所以, 人们在长期天气预报和气候预测中有必要考虑随机力的因素、太阳辐射和地表的随机强迫.

下面, 主要介绍大气、海洋随机动力学中的一些数学模型 (主要包括随机准地砖方程、随机大气海洋原始方程组) 的定性理论的研究进展. 2001 年起, Duan 等人 [94–96] 考虑了大气、海洋动力学中一些随机偏微分方程 (如随机的二维和三维准地转方程) 的定性理论. 2008 年, Guo 等人 [97] 考虑带随机外力、

摩擦和耗散的二维准地转方程,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)(\triangle\psi-F\psi+\beta_0 y)$$
$$=\frac{1}{R_e}\triangle^2\psi-\frac{r}{2}\triangle\psi+f(x,y,t),$$

其中 $F$ 是 Froude 数, $\beta_0$ 是 Rossby 参数, $R_e$ 为 Reynolds 数, $r$ 是 Ekman 耗散常数. $f(x,y,t)=-\frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}}$ 是随机力, 随机过程 $W$ 关于时间是双边的 Wiener 过程, 它的形式为

$$W(t)=\sum_{i=1}^{+\infty}\mu_i\omega_i(t)e_i,$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots$ 是完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ (它的期望记为 $E$) 中独立布朗运动系列, $\mu_i$ 满足

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\mu_i^2}{\lambda_i^{\frac{1}{2}-2\beta_1}}<+\infty,\ 对某一\ \beta_1>0.$$

我们证明了上述随机准地转方程对应的动力系统的随机吸引子的存在性. 后来, 文献 [98] 研究了无界带形区域中随机准地转方程, 得到了同样的结果. 关于大气、海洋科学中一些二维的随机数学模型的研究, 可以参见文献 [99,100] 及其中的引文.

我们研究了带随机外力的海洋原始方程组的适定性及其对应的无穷维随机动力系统的全局吸引子的存在性, 我们的结论适用于带随机外力且受到太阳辐射的随机强迫的大气原始方程组; 在 4.3 节, 我们研究了带随机边界的海洋原始方程组的定性理论, 随机边界表示大气对海洋的随机强迫作用, 这是符合把大气运动看作随机过程的.

2009 年, Guo 等人 [101] 研究了带随机力的海洋三维原始方程组:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v+\Phi(v)\frac{\partial v}{\partial z}+fk\times v+\nabla p_b-\int_{-1}^{z}\nabla T\,\mathrm{d}z'$$
$$-\triangle v-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\Psi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(v\cdot\nabla)T+\Phi(v)\frac{\partial T}{\partial z}-\triangle T-\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=Q,$$

$$\int_{-1}^{0}\nabla\cdot v\,\mathrm{d}z=0.$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\tau,\ \frac{\partial T}{\partial z}=-\alpha_u T\qquad \text{on }\Gamma_u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=0,\ \frac{\partial T}{\partial z}=0\quad \text{on }\Gamma_b,$$

$$v\cdot\boldsymbol{n}=0,\ \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{n}=0,\ \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}=0\quad \text{on }\Gamma_l,$$

其中 $\Psi=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$, $W$ 是关于时间双边的 Wiener 过程, 我们得到了该随机偏微分方程组的整体适定性, 及其对应的无穷维随机动力系统的随机吸引子存在性, 该结果也适用于带加性白噪声型随机边界的三维海洋原始方程组, 参见文献 [102]. 上述两个结果适用于该节的结论适用于带随机外力和受到太阳辐射的随机强迫的大气原始方程组. 后来, Gao 等人 [103,104] 研究了带加性白噪声的三维大气、海洋原始方程组的不变测度的存在性和随机吸引子的维数估计, 改进了文献 [101] 的结果. Debussche 等人 [105] 也研究了一些带乘性白噪声的三维大气、海洋原始方程组的定性理论.

## 5 小结

本文主要介绍了大气、海洋动力学中一些非线性偏微分方程及其 (随机) 无穷维动力系统的研究进展, 其中包括我们取得的一些研究成果. 我们希望本文有助于人们了解大气、海洋动力学的一些数学模型的研究成果和尚未解决的关键问题, 希望更多大气、海洋动力学中数学模型的定性理论被建立. 这些理论将在数值预报的可靠性分析中发挥着重要的作用, 也对设计更好的大气、海洋数值预报模式提供理论参考.

**致谢** 这里我们要特别感谢曾庆存院士、穆穆院士、刘式适教授、李建平教授等许多专家学者的大力支持、指导和帮助, 同时也非常感谢审稿人的宝贵意见和建议.

## 参考文献


1 Gill A E. Atmosphere-ocean Dynamics. New York: Academic Press, 1982
2 Holton J R. An Introduction to Dynamic Meteorology. 3rd ed. New York: Academic Press, 1992
3 Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. 2nd ed. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1987
4 Richardson L F. Weather Prediction by Numerical Press. Cambridge: Cambridge University Press, 1922
5 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础. 北京: 科学出版社, 1979
6 Bjerknes V. Das problem von der wettervorhersage, betrachtet vom standpunkt der mechanik under der physik. Meter Z, 1904, 21: 1–7
7 Charney J G, Fjortaft R, Neumann J Von. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. Tellus, 1950, 2: 237–254
8 Charney J G, Philips N A. Numerical integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic simple baroclinic flows. J Meteor, 1953, 10: 71–99
9 Cox M D. A Primitive Equation, Three-Dimensional Model(GFDL Ocean Group, 1984). Technical Report, No 1
10 Itoo H, Kurihara Y, Asai T, et al. Numerical test of finite-difference form of primitive equations for barotrophic case. J Meteo Soc Japn, 1962, 40: 2
11 Kasahara A, Washington W M. NCAR global general circulation model of the atmosphere. Mon Wea Rec, 1967, 95: 389–402, 958–968
12 Lorenz E N. Energy and numerical weather prediction. Tellus, 1960, 12: 364–373
13 Reiser H. Barochinic forecasting with the primitive equation. In: The Proceedings of Int Symp on Num Weather Pred. Tokyo, 1962
14 Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations, I. The basic experiment. Mon Wea Rev, 1963, 91: 98–164
15 Shuman F G, Hovermale J B. A six-level primitive equation model. J Appl Meteor, 1968, 7: 525–531
16 Washington W M, Parkinson C L. An introduction to three-dimensional climate modeling. Oxford, New York: Oxford University Press, 1986
17 Li J, Chou J. The qualitative theory on the dynamical equations of atmospheric motion and its applications. Chin J Atmos Sci, 1998, 22(4): 348–360
18 Li J, Chou J. The global analysis theory of climate system and its applications. Chin Sci Bull, 2003, 48(10): 1034–1039
19 Bennett A F, Kloeden P E. The simplified quasi-geostrophic equations: Existence and uniqueness of strong solutions. Mathematika, 1980, 27: 287–311
20 Bennett A F, Kloeden P E. The dissipative quasi-geostrophic equations. Mathematika, 1981, 28: 265–285
21 Mu M. Global classical solutions of initial-boundary value problems for nonlinear vorticity equation and its applications. Acta Math Sci, 1986, 6: 201–218
22 Mu M. Global classical solutions of initial-boundary value problems for generalized vorticity equations. Sci Sin Ser A, 1987, 30: 359–371
23 Wang S. On the 2-D model of large-scale atmospheric motion: Well-posedness and attractors. Nonl Anal TMA, 1992, 18(1): 17–60
24 Wang S. Attractors for the 3-D baroclinic quasi-geostrophic equations of large-scale atmosphere. J Math Anal Appl, 1992, 165(1): 266–283
25 Bourgeois A J, Beale J T. Validity of the quasigeostrophic model for large-scale flow in the atmosphere and ocean. SIAM J Math Anal, 1994, 25: 1023–1068
26 Majda A, Wang X. Validity of the one and one-half layer quasi-geostrophic model and effective topography. Comm PDE, 2005, 30: 1305–1314
27 Liu Y, Mu M, Shepherd T. Nonlinear stability of continuously stratified quasi-geostrophic flow. J Fluid Mech, 1996, 325: 419–439
28 Mu M. Nonlinear stability of two-dimensional quasigeostrophic motions. Geophys Astrophys Fluid Dyn, 1992, 65: 57–76
29 Wolansky G. Existence, uniqueness and stability of stationary barotropic flow with forcing and dissipation. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 19–46
30 Wolansky G. The barotropic vorticity equation under forcing and dissipation: Bifurcations of nonsymmetric responses and multiplicity of solutions. SIAMJ Appl Math, 1989, 49(6): 1585–1607
31 Held I M, Pierrehumbert R T, Gerner S, et al. Surface quasi-geostrophic dynamics. J Fluid Mech, 1995, 282: 1–20
32 Constantin P, Majda A, Tabak E. Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar. Nonlinearity, 1994, 7: 1495–1533
33 Constantin P, Majda A, Tabak E. Singular front formation in a model for quasigeostrophic flow. Phys Fluids, 1994, 6: 9–11
34 Cordoba D. Nonexistence of simple hyperbolic blow-up for the quasi-geostrophic equation. Ann Math, 1998, 148: 1135–1152
35 Constantin P, Wu J. Behavior of solutions of 2D quasi-geostrophic equations. SIAM J Math Anal, 1999, 30: 937–948
36 Constantin P, Cordoba D, Wu J. On the critical dissipative quasi-geostrophic equation. Indiana Univ Math J, 2001, 50: 97–107
37 Wu J. Global solutions of the 2D dissipative quasi-geostrophic equations in Besov spaces. SIAM J Math Anal, 2004, 36(3): 1014–1030
38 Wu J. The two-dimensional quasi-geostrophic equation with critical or supercritical dissipation. Nonlinearity, 2005, 18: 139–154
39 Chae D. On the regularity conditions for the dissipative quasi-geostrophic equations. SIAM J Math Anal, 2006, 37(5): 1649–1656
40 Kiselev A, Nazarov F, Volberg A. Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation. Invent Math, 2007, 167(3):

445–453
41 Abidi H, Hmidi T. On the global well -posedness of the critical quasi-geostrophic equation. SIAM J Math Anal, 2008, 40(1): 167–185
42 Caffarelli L, Vasseur A. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostroophic equation. Ann Math, 171(3): 1903–1930
43 Lions J L, Temam R, Wang S. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. Nonlinearity, 1992, 5: 237–288
44 Lions J L, Temam R, Wang S. On the equations of the large-scale ocean. Nonlinearity, 1992, 5: 1007–1053
45 Lions J L, Temam R, Wang S. Models of the coupled atmosphere and ocean(CAO I). Comput Mech Adv, 1993, 1: 1–54
46 Lions J L, Temam R, Wang S. Mathematical theory for the coupled atmosphere-ocean models(CAO III). J Math Pures Appl, 1995, 74: 105–163
47 Temam R, Ziane M. Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics. In: Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. Science Direct, 2005, 3: 535–658
48 Contantin P, Nie Q, Schorghofer N. Nonsingular surface quasi-geostrophic flows. Phys Lett A, 1998, 241(3): 168–172
49 Contantin P, Nie Q, Schorghofer N. Front formation in atctive scalar. Phys Rev E, 1999, 60(3): 2858–2863
50 Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1979
51 Resnick S. Dynamical Problems in Nolinear Edvective Partial Differeatial Equation. Dissertation for Doctoral Degree. Chicago: University of Chicago, 1995
52 Chae D, Lee J. Global well-posedness in the super-critical dissipative quasi-geostrophic equations. Comm Math Phys, 2003, 233(2): 297–311
53 Cordoba A, Cordoba D. A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations. Comm Math Phys, 2004, 249: 511–528
54 Hmidi T, Keraani S. Global solutions of the super-critical 2D quasi-geostrophic equations in Besov spaces. Adv Math, 2007, 214: 618–638
55 Ju N. Existence and uniqueness of the solution to the dissipative 2D quasi-geostrophic equations in the Sobolev space. Comm Math Phys, 2004, 251: 365–376
56 Ju N. Global solutions to the-two-dimensional quasi-geostrophic equation with critical or super-critical dissipation. Math Ann, 2006, 334: 627–642
57 Chen Q, Miao C, Zhang Z. A new Bernstein inequality and the 2D dissipative quasi-geostrophic Equation. Comm Math Phys, 2007, 271: 821–838
58 Nicolis C, Nicolis G. Is there a climatic attractor? Nature, 1984, 311: 529–532
59 Nicolis C, Nicolis G. Evidence for climatic attractors. Nature, 1987, 326: 523
60 Essex C, Lookman T, Nerenberg M A H. The climate attractor over short timescales. Nature, 1987, 326: 64–66
61 Tsonis A A, Elsner J B. The weather attractor over very short timescales. Nature, 1988, 333: 545–547
62 Lorenz E N. Dimension of weather and climate attractors. Nature, 1991, 353: 241–244
63 Lorenz E N. An attractor embedded in the atmosphere. Tellus, 2006, 58A: 425–429
64 Li J F, Chou J F. Existence of atmosphere attractors. Sci China Ser D, 1997, 40(2): 215–224
65 Li J F, Chou J F. Asymptotic behavior of solutions of the moist atmospheric equations (in Chinese). Acta Meteor Sin, 1998, 56(2): 61–72 [李建平, 丑纪范. 湿大气方程组解的渐近性质. 气象学报, 1998, 56(2): 61–72]
66 Li J, Wang S. Some mathematical and numerical issues in geophysical fluid dynamics and climate dynamics. Comm Comp Phys, 2008, 3(4): 759–793
67 Cao C, Titi E S. Global well-posedness and finite dimensional global attractor for a 3-D planetary geostrophic viscous model. Comm Pure Appl Math, 2003, 56: 198–233
68 Cao C, Titi E S, Ziane M. A "horizontal" hyper-diffusion 3-D thermocline planetary geostrophic model: Well-posedness and long-time behavior. Nonlinearity, 2004, 17: 1749–1776
69 Cao C, Titi E S. Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large-scale ocean and atmosphere dynamics. Ann Math, 2007, 166: 245–267
70 Guillén-González F, Masmoudi N, Rodríguez-Bellido M A. Anisotropic estimates and strong solutions for the primitive equations. Diff Int Equ, 2001, 14: 1381–1408
71 Hu C, Temam R, Ziane M. The primimitive equations of the large scale ocean under the small depth hypothesis. Disc Cont Dyn Sys, 2003, 9(1): 97–131
72 Samelson R, Temam R, Wang S. Some mathematical properties of the planetary geostrophic equations for large-scale ocean circulation. Appl Anal, 1998, 70(1-2): 147–173
73 Guo B, Huang D. Existence of weak solutions and trajectory attractors for the moist atmospheric equations in geophysics. J Math Phys, 2006, 47: 083508
74 Huang D, Guo B. On the existence of atmospheric attractors. Sci China Ser D-Earth Sci, 2008, 51(3): 469–480
75 Guo B, Huang D. On the 3D viscous primitive equations of the large-scale atmosphere. Acta Math Sci, 2009, 29(4): 846–866

76 Guo B, Huang D. Existence of the universal attractor for the 3-D viscous primitive equations of large-scale moist atmosphere. J Diff Equ, 2011, 251(3): 457–491
77 Kukavica I, Ziane M. On the regularity of the primitive equations of the ocean. Nonlinearity, 2007, 20(12): 2739–2753
78 Evans L C, Gastler R. Some results for the primitive equations with physical boundary conditions. Z Angewandte Math Phys, 2013, 64(6): 1729–1744
79 Cao C, Titi E S. Global well-posedness of the 3D Primitive equations with partial vertical turbulence mixing heat diffusion. Comm Math Phys, 2012, 310(2): 537–568
80 Leith C E. Climate response and fluctuation dissipation. J Atmos Sci, 1975, 32: 2022–2025
81 Hasselmann K. Stochastic climate models. Part I: Theory. Tellus, 1976, 28: 473–485
82 Frankignoul C, Hasselmann K. Stochastic climate models. Part II: Application to sea-surface temperature anomalies and thermocline variability. Tellus, 1977, 29: 289–305
83 李麦村, 黄嘉佑. 大气关于海温准三年及准半年周期震荡的随机气候模式. 气象学报, 1984, 42(2): 168–176
84 Penland C, Matrosova L. A balance condition for stochastic numerical-models with applications to El Niño-Southern oscillation. J Climate, 1994, 7(9): 1352–1372
85 Griffies S, Tziperman E. A linear thermohaline oscillator driven by stochastic atmospheric forcing. J Climate, 1995, 8(10): 2440–2453
86 Kleeman R, Moore A. A theory for the limitation of ENSO predictability due to stochastic atmospheric transients. J Atmos Sci, 1997, 54(6): 753–767
87 Majda A, Timofeyev I, Vanden-Eijnden E. Models for stochastic climate prediction. Proc Natl Acad Sci USA, 1999, 96: 14687–14691
88 Majda A, Timofeyev I, Vanden-Eijnden E. A mathematical framework for stochastic climate models. Comm Pure Appl Math, 2001, 54: 891–974
89 Majda A, Wang X. The emergence of large-scale coherent structure under small-scale random bombardments. Comm Pure Appl Math, 2001, 59: 467–500
90 Majda A, Timofeyev I, Vanden-Eijnden E. A priori tests of a stochastic mode reduction strategy. Phys D, 2002, 170: 206–252
91 Majda A, Timofeyev I, Vanden-Eijnden E. Systematic strategies for stochastic mode reduction in climate. J Atmos Sci, 2003, 60: 1705–1722
92 Franzke C, Majda A, Vanden-Eijnden E. Low-order stochastic mode reduction for a realistic barotropic model climate. J Atmos Sci, 2005, 62: 1722–1745
93 周秀骥. 大气随机动力学与可预报性. 气象学报, 2005, 63(5): 806–811
94 Duan J, Gao H, Schmalfuss B. Stochastic dynamics of a coupled atmosphere-ocean model. Stoch Dyn, 2002, 2(3): 357–380
95 Duan J, Kloeden P E, Schmalfuss B. Exponential stability of the quasi-geostrophic equation under random perturbations. Prog Probability, 2001, 49: 241–256
96 Duan J, Schmalfuss B. The 3D quasi-geostrophic fluid dynamics under random forcing on boundary. Comm Math Sci, 2003, 1: 133–151
97 Huang D, Guo B, Han Y. Random attractors for a quasi-geostrophic dynamical system under stochastic forcing. Int J Dyn Syst Differ Equ, 2008, 1(3): 147–154
98 Lu H, Lv S, Xin J, et al. A random attractor for the stochastic quasi-geostrophic dynamical system on unbounded domains. Nonl Anal TMA, 2013, 90: 96–112
99 Glatt-Holtz N, Temam R. Pathwise solutions of the 2-D stochastic primitive equations. Appl Math Opti, 2011, 63(3): 401-433
100 Gao H, Sun C. Large deviations for the stochastic primitive equations in two space dimensions. Comm Math Sci, 2012, 10: 575–593
101 Guo B, Huang D. 3D stochastic primitive equations of the large-scale ocean: Global well-posedness and attractors. Comm Math Phys, 2009, 286: 697–723
102 Guo B, Huang D. On the primitive equations of large-scale ocean with stochastic boundary. Diff Int Equ, 2010, 23: 373–398
103 Gao H, Sun C. Random attractor for the 3D viscous stochastic primitive equations with additive noise. Stoch Dyn, 2009, 9: 293–313
104 Gao H, Sun C. Hausdorff dimension of random attractor for stochastic Navier-Stokes-Voight equations and primitive equations. Dyn PDE, 2010, 7(4): 307–326
105 Debussche A, Glatt-Holtz N, Temam R, et al. Global existence and regularity for the 3D stochastic primitive equations of the ocean and atmosphere with multiplicative white noise. Nonlinearity, 2012, 25(7): 2093–2118

# Study on some partial differential equations in the atmospheric and oceanic dynamics

GUO BoLing[1], HUANG DaiWen[1*] & HUANG ChunYan[2]

[1] *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China;*
[2] *School of Statistics and Mathematics, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China*

We review some development of study on some partial differential equations in the atmospheric and oceanic dynamics. Firstly, we give some mathematical results of the surface quasi-geostrophic equations. Secondly, we recall some results on the global well-posedness and long-time dynamics for the three-dimensional viscous primitive equations describing the large-scale atmospheric and oceanic motions. At last, we review some results of stochastical partial differential equations in the atmospheric and oceanic dynamics, which include the existence and uniqueness of global strong solutions to the initial boundary value problem for the stochastic primitive equations, and the existence of random attractors for the corresponding random dynamical system.

**surface quasi-geostrophic equations, primitive equations, stochastical partial differential equations, global well-posedness, global attractors**

**PACS:** 02.30Jr, 02.30.Sa, 02.50.Fz

**doi:** 10.1360/SSPMA2014-00114