中国科学(A 辑)
第 32 卷 第 8 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2002 年 8 月

可压缩均匀各向同性湍流的直接数值模拟*

李新亮**
(清华大学工程力学系 SMC 气动技术中心, 北京 100084)

傅德薰 马延文
(中国科学院力学研究所, LNM 国家重点实验室; 北京 100080)

摘要 采用 8 阶精度的中心差分格式及 7 阶精度的迎风偏斜格式对 $Re_\lambda = 72 \sim 153$, $M_t = 0.2 \sim 0.7$ 的均匀各向同性湍流进行了直接数值模拟, 建立了湍流数据库. 与他人的计算结果吻合十分理想, 说明方法的有效性. 数值结果表明, 采用适当的迎风型差分格式可以克服起动问题(start-up problem)对湍流 Mach 数的限制, 提高可计算的湍流 Mach 数, 是可压湍流直接数值模拟的有效方法.

分析了压缩性效应对湍流统计量的影响, 发现压缩性使得湍动能的衰减加快. 探讨了可压湍流中微激波产生的机理, 对流场进行了标度律分析. 发现在本文的 Reynolds 数和湍流 Mach 数条件下, 流场中扩展自相似性仍然成立, 同时发现压缩性对标度指数影响不大.

关键词 直接数值模拟 均匀各向同性湍流 压缩性效应 微激波 标度律

直接数值模拟(DNS)作为湍流机理研究的重要手段, 在湍流研究中发挥着越来越重要的作用. 但限于目前的计算条件, 直接数值模拟还只能限于较低 Reynolds 数和简单的几何边界条件[1]. 均匀各向同性湍流是一种最简单并具有代表性的湍流, 也是目前研究最多的一种情况. 从 1972 年起, 人们对这种湍流进行了多次直接数值模拟, 并从中积累了许多对湍流的认识(见 Moin 在文献[1]中的综述). 到目前为止的湍流直接数值模拟研究中, 大部分是不可压的, 可压湍流的直接数值模拟结果还很少. 考虑到可压湍流对于航空航天等领域的重要性, 对其进行直接数值模拟研究是相当重要的.

文献[2]采用 10 阶精度的对称 Padé 格式对可压缩均匀各向同性湍流进行了直接数值模拟, 并分析了流场中随机产生的微激波(Eddy Shocklet). 为了抑制混淆误差, 该文采用旋度-对称型对流项[3]. 由于受起动问题(start-up problem)的限制, 该文的数值计算不得不限制在 $M_t < 0.5$ 之内. 所谓起动问题, 是指当湍流 Mach 数足够高时, 数值计算中出现负的压力和温度, 使计算无法继续进行下去. 造成该问题的原因是由于当湍流 Mach 数足够高时, 流场中产生了随机微激波, 如果数值方法的激波捕捉能力较差, 则会在激波区产生非物理的高频数值振荡, 以致

2001-12-14 收稿
* 国家自然科学基金(批准号: 59876002)、国家"攀登"计划和国家重点基础研究专项经费(批准号: G1999032805)及国家博士后基金资助项目
** E-mail: lixl@mail.tsinghua.edu.cn

温度和压力出现负值, 使得数值计算无法进行下去. 文献[2]尝试了不同的压力和温度初始条件, 都无法避免起动问题.

相对于中心型差分格式, 迎风型差分具有较好的抑制高频非物理振荡的能力, 有利于激波的捕捉. 迎风型差分格式的另一个优点是它能够抑制计算过程中的混淆误差 1). 但迎风型差分也有不足之处, 迎风型差分的缺点在于存在耗散误差. 在湍流的直接数值模拟中, 过大的数值耗散会造成湍流的过度衰减, 从而影响计算结果. 但相对而言, 高精度的迎风差分格式对于其波数捕捉范围内的波的数值耗散是很低的, 只要波数范围控制得当, 完全可以将数值耗散控制在允许的范围内 2). Rai 和 Moin 在文献[4]中采用了 5 阶精度的迎风偏斜差分格式对槽道湍流进行了直接数值模拟, 相近网格数上的结果与采用谱方法的结果吻合甚好; 另外文献[5,6]分别采用迎风紧致差分进行了可压缩平面混合层及可压缩槽道流的直接数值模拟均取得了较好的结果, 说明适当形式的迎风型差分完全可以应用到湍流的直接数值模拟中.

本文运用 7 阶迎风偏斜差分离散对流项, 与 Rai 和 Moin 在文献[4]中采用的 5 阶迎风偏斜差分相比, 该格式的耗散误差更小, 可分辨的波数范围更高. 本文将其与 8 阶中心差分格式相结合, 进行了 $Re_\lambda = 72 \sim 153$, $M_t = 0.2 \sim 0.7$ 的可压均匀各向同性湍流的直接数值模拟, 包括速度导数偏斜因子在内的各统计量和湍动能的衰减速率与文献[2]吻合得十分理想, 说明在本湍流的波数范围内, 与物理耗散相比, 该迎风差分格式的数值耗散是可以忽略的.

本文发现, 由于湍流的间歇性, 流场的最大当地 Mach 数要远高于整个流场的平均 Mach 数; 在流场的平均 Mach 数并非很高时, 流场中就可能出现间歇的局部超音速区, 作者推测这可能是流场中微激波产生的重要原因.

标度律是近期湍流研究的热点, 所谓标度律是指充分发展的湍流惯性区内速度差的统计矩与两点距离的幂次关系. 标度律反映了充分发展湍流内在的普适的规律性[7]. 本文利用所得到的湍流场进行了湍流标度律的研究, 发现即使微激波存在的情况下, 流场中扩展自相似性仍然成立. 同时发现在本文的湍流 Mach 数范围内压缩性效应对标度指数的影响不大.

1　数值模拟

1.1　控制方程、初边值条件及网格

考虑边长为 2π 的立方体区域, 该区域内充满黏性可压缩流体, 初始时刻流体存在复杂的运动. 在没有外力的作用下, 该区域内的流体运动会在黏性的作用下逐渐衰减. 本文将对这种运动进行直接数值模拟.

按某种湍能谱布置流场初始时刻的速度、密度、压力和温度, 求解控制流动的 N-S 方程. 随着计算的发展, 初值对流场的影响逐渐减弱, 当到达一定的无量纲时间后, 初值中的非物理扰动基本可以忽略. 这时的数值流场便十分接近真实的流动, 本文将存储这些流场, 建立可压均匀各向同性湍流数据库并对流动进行分析.

流动的控制方程为无量纲的可压缩 N-S 方程:

1) 李新亮, 傅德薰, 马延文. 迎风紧致格式的混淆误差分析及其同谱方法的比较. 计算物理(待发表)

2) 李新亮. 槽道湍流的直接数值模拟. 博士论文. 北京: 中国科学院力学研究所, 2000

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial z}=\frac{\partial \boldsymbol{E}_v}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_v}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}_v}{\partial z}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{U}=[\rho,\rho u,\rho v,\rho w,e]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{E}_v,\boldsymbol{F}_v,\boldsymbol{G}_v$ 分别为方程的无黏项和黏性项[8], 流体黏性系数与温度的关系采用 Sutherland 公式.

以 Taylor 微尺度定义的 Reynolds 数为

$$Re_\lambda=\frac{u'\lambda\langle\rho\rangle}{\langle\mu\rangle},\ \text{其中}\ u'=\left\langle(u_1^2+u_2^2+u_3^2)/3\right\rangle^{1/2},\quad \lambda^2=\frac{u'^2}{\left\langle\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2\right\rangle}.$$

湍流 Mach 数定义为: $M_{\mathrm{t}}=\dfrac{\left\langle u_1^2+u_2^2+u_3^2\right\rangle^{1/2}}{\langle c\rangle}$, 其中 c 为当地音速. $\langle\bullet\rangle$ 为某一时刻流场中某物理量的平均值.

假设初始速度场散度为零且满足能谱 $E(k)=Ak^4\exp(-2k/k_0^2)$ ($E(k)$为谱空间以 k 为半径球壳上能谱密度的积分)[2].

各热力学量(密度、压力、温度)均匀分布. 这种初值条件是文献[2]中采用最多的一种.

沿 x,y,z 3 个方向均采用周期边界条件, 沿 3 个方向采用均匀网格.

1.2 数值求解

对(1)式的无黏项进行流通矢量分裂[8], 分裂后采用 7 阶精度的迎风型差分求解. 对于正通量采用如下的差分格式:

$$u'=(a_1u_{j+3}+a_2u_{j+2}+a_3u_{j+1}+a_4u_j+a_5u_{j-1}+a_6u_{j-2}+a_7u_{j-3}+a_8u_{j-4})/\Delta,$$

其中Δ为网格间距, u' 为 u 导数的差分逼近. 各系数为 a_1 = 0.00952380952380952381; a_2 = –0.1; a_3 = 0.6; a_4 = 0.25; a_5 = –1.0; a_6 = 0.3; a_7 = –0.066666666666666667; a_8 = 0.00714285714285714286 对于负通量:

$$u'=(b_1u_{j+4}+b_2u_{j+3}+b_3u_{j+2}+b_4u_{j+1}+b_5u_j+b_6u_{j-1}+b_7u_{j-2}+b_8u_{j-3})/\Delta$$

其中 b_1 = –0.00714285714285714286; b_2 = 0.066666666666666667; b_3 = –0.3; b_4 = 1.0; b_5 = –0.25; b_6 = –0.6; b_7 = 0.1; b_8 = –0.00952380952380952381.

本文对这种格式进行了 Fourier 分析[9]并同文献[4]采用的 3 阶及 5 阶精度的迎风偏斜格式进行了比较. 图 1 和 2 分别为这些格式的耗散误差和色散误差, 可以看出与 5 阶格式相比, 本

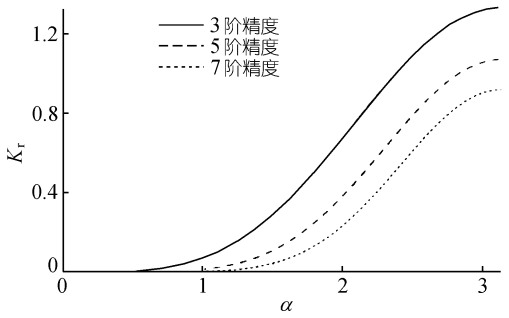

图 1 不同差分格式的耗散误差

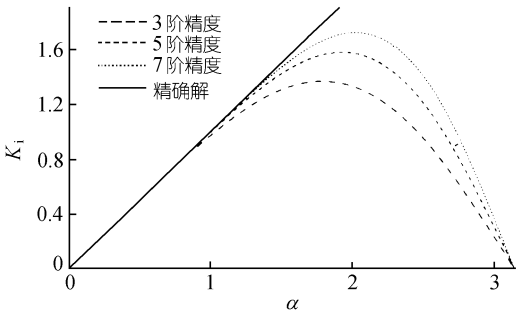

图 2 不同差分格式的色散误差

文采用的 7 阶格式的耗散误差及色散误差更小, 所分辨的波数范围更高.

对于黏性项, 采用 8 阶精度的中心差分格式, 该格式的具体形式为

$$u' = (c_1(u_{j+1} - u_{j-1}) + c_2(u_{j+2} - u_{j-2}) + c_3(u_{j+3} - u_{j-3}) + c_4(u_{j+4} - u_{j-4}))/\Delta$$

$c_1 = 0.8$, $c_2 = -0.2$, $c_3 = 0.0380952380952380952$, $c_4 = -0.00357142857142857142 8$.

对于时间项采用 3 阶精度的 R-K 方法[6], 时间步长统一取为 $\Delta t = 0.001$.

2　可压均匀各向同性湍流的统计分析

本文计算的几种情况(见表 1):

表 1　本文的计算条件

CASE	Re_λ	M_t	(A,K_0)	网格数
D1	72	0.5	(0.00013,8)	128^3
D2	72	0.2	(0.00013,8)	128^3
D3	72	0.6	(0.00013,8)	128^3
D4	72	0.7	(0.00013,8)	128^3
D5	153	0.3	(0.00055,6)	256^3
D6	153	0.4	(0.00055,6)	256^3
D7	153	0.6	(0.00055,6)	256^3

表 1 中的 A 和 K_0 为初始能谱 $E(k)$中的系数, 其含义为能谱的最大幅值及最大幅值对应的波数[2].

D1~D4 的数值计算在由作者自行建立的 SMC 清华大学气动技术中心 16 节点微机群上进行(采用 8 节点并行), D5~D7 在科学与工程计算国家重点实验室(LSEC)的 128 节点大型微机群上进行(采用 32 节点并行). 编程工具为消息传递型并行编程语言 MPI Fortran 77 (采用了 MPICH 和 LamMPI 两个版本), 平均运行时间: D1~D4 为 43 s/时间步, D5~D7 为 103 s/时间步. 在使用 MPI 编程时, 为了防止消息阻塞出现的死锁, 作者将一个长消息切割成若干短消息来发送, 这样既可以避免进程间多对多通信时出现的死锁现象, 还可以提高程序的并行效率.

图 3 为 D1 时间发展过程中归一化湍动能 $K(t)/K_0$ 及速度导数偏斜因子的变化情况. 其中湍动能的定义为: $K(t) = (1/2)\langle \rho u_i u_i \rangle$, K_0 为初始时刻的湍动能. 速度导数偏斜因子定义为 $S_3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\left\langle (\partial u_1/\partial x_1)^3 \right\rangle}{\left\langle (\partial u_1/\partial x_1)^2 \right\rangle^{3/2}}$. 图中横坐标为无量纲时间 t/τ, $\tau = \sqrt{\frac{32}{A}}(2\pi)^{1/4} K_0^{-7/2}$ 为初始时刻的大涡转换时间(large-eddy-turnover time)[2]. 图中的符号为文献[2]中对应的结果. 从中可以看出, 本文计算的湍动能随时间的衰减情况与文献[2]完全吻合, 这说明在该网格分辨率下, 迎风差分所带来的数值耗散与物理耗散相比是可以忽略的(湍动能并未因存在数值耗散而加快衰减). 从图中还可以看出, 速度导数的偏斜因子与文献[2]吻合得十分理想. 偏斜因子是一个高阶统计量, 它对流场中的小尺度十分敏感, 该量与文献[2]的吻合验证了本文结果.

图 4 为湍流 Mach 数和以初始时刻湍流 Mach 数归一化的扰动密度均方根随无量纲时间的变化. 归一化的密度脉动均方根为定义为: $\sqrt{\langle \rho'^2 \rangle}/M_t^2(0)$, 其中 $\rho' = \rho - \langle \rho \rangle$ 为密度脉动. 图中的符号为文献[2]中相应的量, 从中可以看出, 这两个量与文献[2]吻合十分理想.

图 3 和 4 说明了本文采用的迎风格式对于本湍流的直接数值模拟是有效的，同时也验证了本文的数值结果.

图 5 为 D1~D4 湍动能随时间的变化，可以看出，在初始时刻，高湍流 Mach 数流动湍动能衰减更快些，这说明压缩性对湍动能有耗散作用，作者推测这可能与本流动中形成的微激波有关”. 随着时间的发展，湍动能及湍流 Mach 数都在变小，这时 D1~D4 之间的差距也在变小.

图 6 为 D1~D4 的 Re_λ变化情况，可以看出，在初始时刻，高湍流 Mach 数流动的 Re_λ衰减更快些.

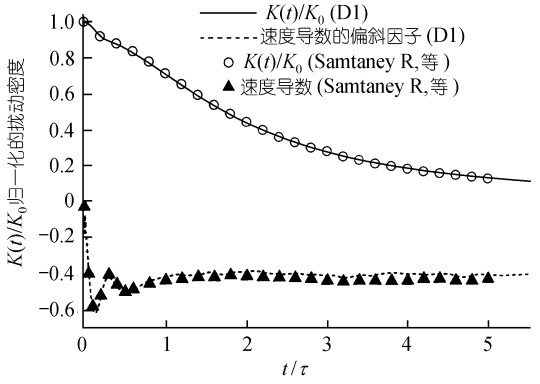

图 3 平均湍动能及速度导数的偏斜因子随时间的变化情况

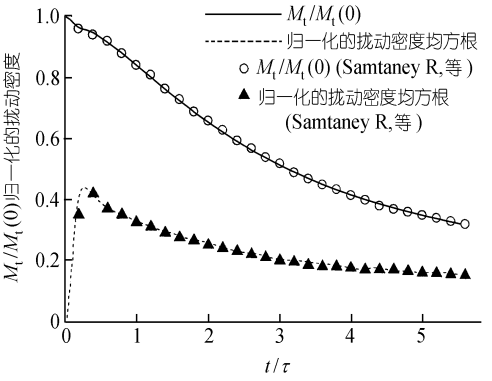

图 4 湍流 Mach 数及归一化的扰动密度均方根随时间的变化

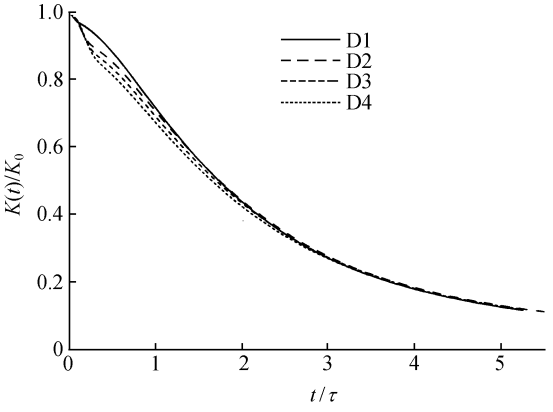

图 5 不同湍流 Mach 数流动的湍动能随时间的衰减情况

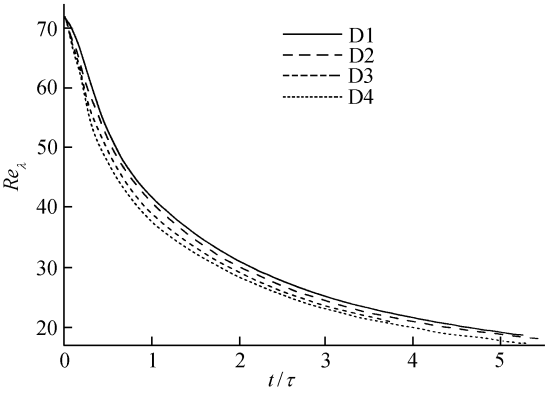

图 6 不同湍流 Mach 数流动的 Re_λ随时间的衰减情况

图 7 为 D1~D4 速度导数偏斜因子得变化情况. 与对湍动能及 Re_λ的影响相比，湍流 Mach 数对速度导数的偏斜因子影响更加明显，这是因为偏斜因子对小尺度量更加敏感. 从图 7 还可以看出，随着湍流 Mach 数的增加，速度导数的偏斜因子的变化幅度更大.

图 8 为 D5~D7 湍动能随时间的变化情况. 图中符号为文献[2]中 $Re_\lambda = 153$, $M_t = 0.4$ 的结果. 从图中可以看出，本文结果(D6)与文献[2]结果完全吻合. 从图中还可以看出，对于 $Re_\lambda = 153$

的情况，高湍流 Mach 数流动的湍动能衰减得仍略快些，这与 $Re_\lambda = 72$ 的结论是一致的.

由于湍流的间歇性，湍流速度会出现瞬间的强脉冲(即某时刻某位置处，速度的脉动量大大超过了该脉动量的均方根值)，这时会造成可压湍流中的局部高 Mach 数区. 表 2 反映了 D1~D7 在 $t/\tau = 1$ 时各流场的湍流 Mach 数 M_t，最大 Mach 数 $Ma_{\max}$ 和平均 Mach 数 $\overline{Ma}$. 湍流 Mach 数是利用速度的均方根及平均音速定义. 平均 Mach 数是各点本地 Mach 数的平均值即: $\overline{Ma} = \langle Ma \rangle$. 湍流 Mach 数和平均 Mach 数都反映了流场的平均压缩性特征，从表 2 中可以看出，两者相差不大.

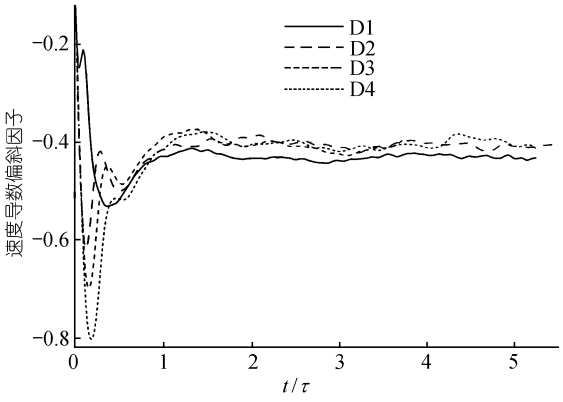

图 7　速度导数偏斜因子随时间的变化情况

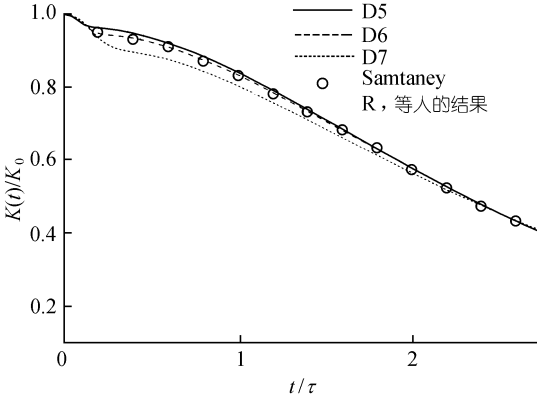

图 8　D5~D7 湍动能随时间的变化图

从表 2 可以看出在流场 F1~F7 中，最大当地 Mach 数要远高于整个流场的平均 Mach 数及湍流 Mach 数，这是由于湍流的间歇性造成的. 表中除了 F2 和 F5 外，其他流场都存在局部超音速区，这些局部超音区的存在是流场中出现微激波的必要条件. 因此，作者推测湍流间歇性是可压湍流中出现微激波的重要原因.

表 2　$t/\tau = 1$ 时各流场的湍流 Mach 数、最大 Mach 数和平均 Mach 数

流场编号	计算编号	Re_λ	M_t	$Ma_{\max}$	$\overline{Ma}$
F1	D1	40.56	0.42	1.32	0.38
F2	D2	41.75	0.17	0.49	0.16
F3	D3	39.0	0.50	1.88	0.45
F4	D4	37.67	0.57	2.14	0.52
F5	D5	77.43	0.28	0.83	0.25
F6	D6	77.12	0.37	1.14	0.33
F7	D7	73.87	0.54	1.71	0.49

需要指出，对于本问题，通常认为 $t/\tau > 0.5$ 时，流场受初值的影响就很小了，当 $t/\tau = 1$ 时的流场可以认为是物理的[2].

图 9 为流场 F6 沿 z 轴中截面的脉动压力 p' 分布图，其中 $p' = \dfrac{p - \langle p \rangle}{\langle p \rangle}$，可以看出该图中存

在很多高压力梯度区，这些区域就有可能是微激波．当然，微激波区域除了具有很大的压力(密度、速度、温度)梯度之外，还应满足以下条件：(ⅰ) 处于强压缩区，(ii) 处于 $M_n > 1$ 和 $M_n < 1$ 的交界面($M_n = v_n / c$ 为用法向速度计算的本地 Mach 数，$\boldsymbol{n}$ 为压力梯度方向)．另外为了精确的刻画微激波，还应要求为激波两侧的各物理量满足激波关系式．文献[2]从以上这些条件出发，给出了挑选流场中微激波的算法并对流场中的微激波进行了概率密度分析．

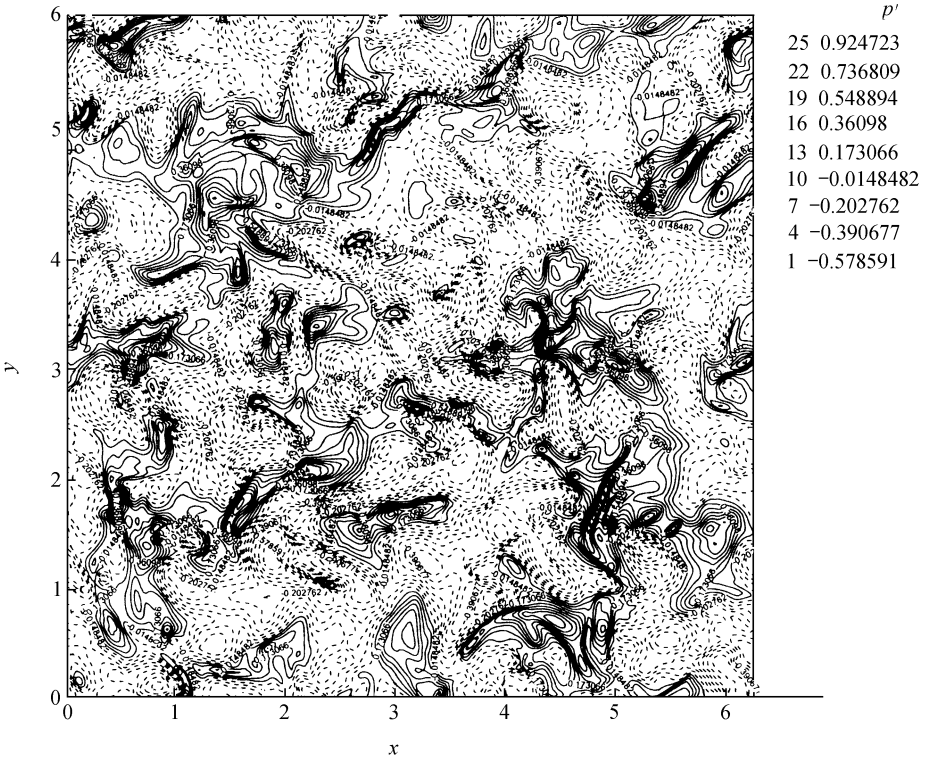

图 9 流场 F7 中脉动压力的分布图

本文不准备对微激波的特征进行分析，而是强调微激波的产生与湍流间歇性的关系．作者推测湍流间歇性是形成可压湍流中微激波的重要原因．以往的文献通常只强调微激波与流场中的涡的联系，将其称为“涡微激波(Eddy Shocklet)”，作者推测，可压湍流中的微激波与湍流间歇性之间的联系十分密切，从这个角度出发，似乎将其称为“间歇微激波(Intermittent Shocklet)”或“间歇激波(Intermittent shock)”更加明确．

3 可压均匀各向同性湍流的标度律分析

标度律是近期湍流研究的热点，所谓标度律是指充分发展湍流惯性区内两点间速度差的统计矩(称为速度结构函数)与两点距离之间的幂次关系，即 $\langle |\delta u_l|^p \rangle \sim l^{\zeta_p}$，其中 $\delta u_l = u(x+l) - u(x)$ 为距离 l 的两点间的速度差，ζ_p 即为标度指数．标度律的适用范围是湍流惯性区，即远大于耗散尺度并远小于积分尺度的区域．由于受数值计算条件及实验条件的限制，目前的数值模拟及湍流实验的 Reynolds 数都不可能很高，湍流惯性区并不明显，这就给标度指数的计算和测量带来了很大困难．扩展自相似性(ESS)的发现解决了这个困难．所谓扩展

自相似性, 是指速度差统计矩之间的幂次关系, 即: $\langle |\delta u_l|^p \rangle \sim \langle |\delta u_l|^q \rangle^{\zeta_{p,q}}$, $\zeta_{p,q} = \zeta_p / \zeta_q$ 称为相对标度指数(通常取 $p = 3$). 扩展自相似性的适用范围比普通标度律广泛得多. ESS 的发现大大提高了标度指数计算及测量的准确度和可信度. 目前文献上所见到的标度指数通常都是相对标度指数.

图 10 反映了流场 F7 中的扩展自相似性. 图中横坐标为 $\lg\left\langle |\delta u_l|^3 \right\rangle$, 纵坐标为 $\lg\left\langle |\delta u_l|^p \right\rangle$. 从中可以看出, 对于不同的 p, 两者均呈非常明显的线性关系, 这说明 p 阶速度结构函数和 3 阶速度结构函数之间呈幂次关系, 即扩展自相似性成立. 这说明在对于可压湍流, 在流动中有微激波存在的情况下, 扩展自相似性仍然是成立的. 图 9 中各直线的斜率即为相对标度指数 ζ_p / ζ_3, 本文采用最小二乘法来求这些标度指数.

图 11 为流场 F1~F7 各阶标度指数的分布, 从图中可以看出, 各标度指数之间的差距并不大, 这说明了标度指数的普适性, 图中的实线为 SL 标度律理论的预测值, 虚线为 K41 理论的预测值[7], 可以看出本文的结果与 SL 理论更加接近.

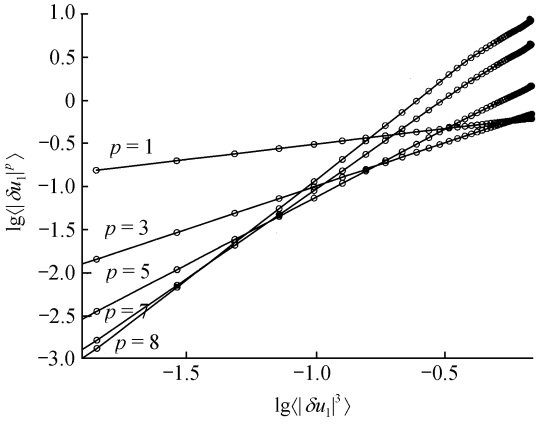

图 10　流场 F7 的扩展自相似性

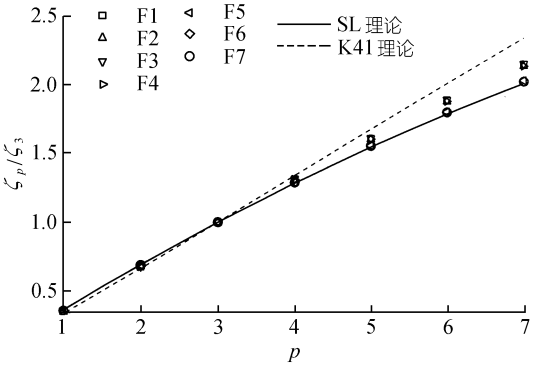

图 11　流场 F1~F7 的(相对)标度指数

4　结论

(ⅰ) 采用高精度迎风型差分格式可以有效地进行可压湍流的直接数值模拟(包括流场中含有微激波的情况). 与中心型格式相比, 迎风型格式可以有效克服起动问题的限制, 可计算的湍流 Mach 数更高.

(ⅱ) 压缩性效应使得本湍流的衰减加快.

(ⅲ) 对于可压湍流, 在流场中有微激波存在的情况下, 流动的扩展自相似性仍然成立.

(ⅳ) 在本文计算的 Reynolds 数和湍流 Mach 数条件下, 压缩性效应对(相对)标度指数的影响不大.

由于湍流的间歇性, 流场中会随机出现局部高 Mach 数的区域. 作者推测湍流间歇性是形成可压湍流中微激波的重要原因.

致谢　感谢工程与科学计算国家重点实验室(LSEC)为本文的计算提供机时, LSEC 的张林波研究员对本文程序改进提供的帮助, 陈十一教授和何国威研究员为本文计算初值的选取进

行的指导.

参 考 文 献

1 Moin P, Mahesh K. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. Annu Rev Fluid Mech, 1998.30: 535~78

2 Samtaney R, Pullin D I, Kosovic B. Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics. Phys Fluids, 2001, 13(5): 1415 ~ 1430

3 Morinishi Y, Lund T S, Vasilyev O V, et al. Full conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow. J Comp Phys, 1998, 143: 90 ~ 124

4 Rai M M, Moin P. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes. J Comput Phys, 1991, 96: 15 ~ 53

5 傅德薰，马延文，张林波．可压混合层流动转捩到湍流的直接数值模拟．中国科学, A 辑, 2000, 30(2): 161 ~ 168

6 李新亮，马延文，傅德薰．可压缩槽道湍流的直接数值模拟及标度律分析．中国科学, A 辑, 2001, 31(2): 153 ~ 164

7 佘振苏，苏卫东．湍流的层次结构和标度律．力学进展, 1999, 29(3): 289~304

8 傅德薰 主编，计算空气动力学，北京：宇航出版社, 1994. 160 ~ 162

9 Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. J Comp Phys, 1992, 103: 16 ~ 42