中国科学 : 数学　2012 年　第 42 卷　第 12 期 : 1237～1250
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

剩余有限 minimax 可解群的几乎正则自同构

刘合国*, 徐涛
湖北大学数学与计算机科学学院, 武汉 430062
E-mail: ghliu@hubu.edu.cn, gtxutao@163.com

收稿日期: 2012-06-15; 接受日期: 2012-08-27; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10971054) 和湖北省高层次人才工程基金 (批准号: 070-016533) 资助项目

摘要　设 G 是一个剩余有限的 minimax 可解群, α 是 G 的几乎正则自同构, 则 $G/[G,\alpha]$ 是有限群, 并且

(1) 当 $\alpha^p=1$ 时, G 有一个指数有限的幂零群其幂零类不超过 $h(p)$, 其中 $h(p)$ 是只与素数 p 有关的函数.

(2) 当 $\alpha^2=1$ 时, G 有一个指数有限的 Abel 特征子群且 $[G,\alpha]'$ 是有限群.

关键词　剩余有限　minimax 可解群　几乎正则自同构

MSC (2010) 主题分类　20F18

1　引言

设 α 是群 G 的一个自同构. 如果 α 没有非平凡的不动点, 那么 α 是正则自同构. 如果 α 有有限多个不动点, 那么 α 是几乎正则自同构.

关于有限群的正则自同构, Burnside 证明了一个经典的结果, 有限群 G 有一个 2 阶正则自同构当且仅当 G 是奇阶 Abel 群. 对于素数阶的正则自同构, Thompson [1] 证明了如果有限群 G 有一个素数阶的正则自同构, 那么 G 是幂零群. 这是有限群论里的一个著名结果.

在无限群中, Higman [2] 证明了有一个 2 阶正则自同构的局部幂零群是 Abel 群. 对于具有 2 阶几乎正则自同构的周期群, Hartley 和 Meixner [3] 证明了下面的命题.

命题 1　设 G 是一个周期群, α 是 G 的一个 2 阶几乎正则自同构且 $|C_G(\alpha)|=m$, 则 G 包含一个指数最多是 $f(m)$ 的幂零群且其幂零类不超过 2, 其中 $f(m)$ 是只与 m 有关的函数.

对于具有几乎正则自同构的多重循环群, Endimioni 和 Moravec [4–6] 证明了以下命题.

命题 2　设 G 是一个多重循环群, α 是 G 的一个 2 阶几乎正则自同构, 则 G 包含一个指数有限的 Abel 特征子群 H, 使得对于任意的 $h\in H$, 有 $\alpha(h)=h^{-1}$.

命题 3　设 G 是一个多重循环群, α 是 G 的一个素数 p 阶几乎正则自同构, 则 G 包含一个指数有限的幂零群 H, 且 H 的幂零类不超过 $h(p)$, 其中 $h(p)$ 是只与 p 有关的函数, 称为 Higman 函数.

命题 4　设 G 是一个多重循环群, α 是 G 的一个几乎正则自同构, 则 $G/[G,\alpha]$ 是有限群.

命题 5　设 G 是一个多重循环群, α 是 G 的一个 2 阶几乎正则自同构, 则 $[G,\alpha]'$ 是有限群.

命题 6　设 G 是一个有限生成的幂零群, 如果 Aut$G$ 的 Fitting 子群包含一个几乎正则自同构, 那么 G 是中心子群的有限扩张.

英文引用格式: Liu H G, Xu T. On almost regular automorphisms of residually finite minimax soluble groups (in Chinese). Sci Sin Math, 2012, 42(12): 1237–1250, doi: 10.1360/012012-325

如果群 G 有一个有限长的次正规群列其因子要么满足极小条件要么满足极大条件, 那么称 G 为 minimax 群 (参见文献 [7]). 在本文中, 我们将证明下面的结果, 它们推广了 Endimioni 和 Moravec 的相应结果.

定理 1 设 G 是一个剩余有限的 minimax 可解群, α 是 G 的一个素数 p 阶几乎正则自同构, 则 G 存在一个指数有限的特征子群 H, 且 H 是幂零类不超过 $h(p)$ 的幂零群, 其中 $h(p)$ 是只与 p 有关的函数, 称为 Higman 函数.

定理 2 设 G 是一个剩余有限的 minimax 可解群, α 是 G 的一个 2 阶几乎正则自同构, 则 G 存在一个指数有限的 Abel 特征子群.

定理 3 设 G 是一个剩余有限的 minimax 可解群, α 是 G 的一个几乎正则自同构, 则 $G/[G,\alpha]$ 是有限群.

定理 4 设 G 是一个剩余有限的 minimax 可解群, α 是 G 的一个 2 阶几乎正则自同构, 则 $[G,\alpha]'$ 是有限群.

定理 5 设 G 是一个剩余有限的 minimax 幂零群, 如果 Aut$G$ 的 Fitting 子群包含一个几乎正则自同构, 那么 G 是 Abel 群的有限扩张, 也是挠群被 Abel 群的扩张.

直接应用定理 1–4, 我们可以得到下面的推论.

推论 1 设 G 是剩余有限的 minimax 可解群, g 是 G 中的一个素数 p 阶元素. 如果 g 在 G 中的中心化子是有限的, 那么 G 存在一个指数有限的幂零群且其幂零类不超过 $h(p)$. 其中 $h(p)$ 是只与 p 有关的函数, 称为 Higman 函数.

推论 2 设 G 是剩余有限的 minimax 可解群, g 是 G 的一个对合. 如果 g 在 G 中的中心化子是有限的, 那么 G 存在一个指数有限的 Abel 特征子群.

推论 3 设 G 是一个剩余有限的 minimax 可解群, g 是 G 的一个元素且 g 在 G 中的中心化子是有限的, 则 $G/[G,g]$ 是有限群.

推论 4 设 G 是一个剩余有限的 minimax 可解群, g 是 G 的一个对合且 g 在 G 中的中心化子是有限的, 则 $[G,g]'$ 是有限群.

我们给出 Abel 群的谱的概念, 并引入可解群的谱.

设 A 是一个 Abel 群, A 的谱定义为

$$S_p(A)=\{p \mid \text{存在 } C<B\leqslant A, \text{使得 } B/C \text{ 是拟循环 } p\text{- 群}\}.$$

由此, 对于可解群 G, 设 G 的导出列为 $G=G^{(0)}>G^{(1)}>G^{(2)}>\cdots>G^{(d)}=1$, 我们把 G 的谱定义为

$$S_p(G)=\bigcup_{0\leqslant i\leqslant d-1} S_p(G^{(i)}/G^{(i+1)}).$$

本文采用的其它符号和术语都是标准的, 参见文献 [7].

2 定理 1 和 2 的证明

引理 1 设 N 忠实地作用在 G 上, H 是 G 的正规 Abel 子群且其幂指数是 m^k, 其中 m,k 是正整数. 如果 N 平凡地作用在正规群列 $G\geqslant H\geqslant H^m\geqslant H^{m^2}\geqslant\cdots\geqslant H^{m^{k-1}}\geqslant H^{m^k}=1$ 上, 那么 N 的幂指数整除 m 的某个方幂.

证明　对 k 进行归纳. 当 $k=1$ 时, N 忠实地作用在 G 上且稳定子群列 $G \geqslant H \geqslant H^m = 1$. 根据文献 [8] 的第一章命题 11 得到

$$N \leqslant \mathrm{Der}(G/H, H),$$

其中 $\mathrm{Der}(G/H,H)$ 是 G/H 到 H 的所有导子构成的 Abel 群. 因为此时 H 的幂指数是 m, 可以验证 $\mathrm{Der}(G/H,H)$ 的幂指数整除 m, 所以 N 的幂指数整除 m.

一般地, $N/C_N(H)$, $N/C_N(G/H^{m^{k-1}})$ 分别忠实地作用在 H, $G/H^{m^{k-1}}$ 上. 归纳地假设 $N/C_N(H)$ 和 $N/C_N(G/H^{m^{k-1}})$ 的幂指数都整除 m 的某个方幂. 由

$$N/C_N(H) \cap C_N(G/H^{m^{k-1}}) \leqslant N/C_N(H) \times N/C_N(G/H^{m^{k-1}})$$

可知 $N/C_N(H) \cap C_N(G/H^{m^{k-1}})$ 的幂指数整除 m 的某个方幂. 注意到 $C_N(G/H^{m^{k-1}})$ 平凡地作用在 G/H 上, 于是 $C_N(H) \cap C_N(G/H^{m^{k-1}})$ 忠实地作用在 G 上且稳定子群列 $G \geqslant H \geqslant 1$. 由文献 [8] 的第一章命题 11 知

$$C_N(H) \cap C_N(G/H^{m^{k-1}}) \leqslant \mathrm{Der}(G/H, H).$$

容易验证 $\mathrm{Der}(G/H,H)$ 的幂指数整除 m 的某个方幂, 随之 $C_N(H) \cap C_N(G/H^{m^{k-1}})$ 的幂指数整除 m 的某个方幂. 因此 N 的幂指数整除 m 的某个方幂. □

引理 2　设 G 是剩余有限的 minimax 可解群, 则 G 包含一个指数有限的无挠特征子群.

证明　事实上, minimax 可解群 G 是有限秩的. 由 [9, 定理 1] 知有限秩的可解群 G 有如下形式的正规列

$$G \geqslant G_1 > G_2 > \cdots > G_s > G_{s+1} > \cdots \geqslant G_{s+t} = 1,$$

其中 $|G:G_1| < \infty$, 对于 $1 \leqslant i \leqslant s-1$, G_i/G_{i+1} 是有限秩的无挠 Abel 群, 对于 $s \leqslant j \leqslant s+t-1$, G_j/G_{j+1} 是有限秩的无限挠 Abel 群. 注意到剩余有限群对子群的封闭性, G_{s+t-1} 是剩余有限的 minimax Abel 群. 又 G_{s+t-1} 是有限秩的无限挠 Abel 群, 故 $G_{s+t-1}=1$. 同样地, 容易得到 $G_s = 1$. 因此 G 有如下的正规列

$$G \geqslant G_1 > G_2 > \cdots > G_s = 1,$$

其中 $|G:G_1| < \infty$, 对于 $1 \leqslant i \leqslant s-1$, G_i/G_{i+1} 是有限秩的无挠 Abel 群. 进而 G_1 是在 G 中指数有限的无挠群. 不妨设 G/G_1 的幂指数是 e, 其中 e 是正整数, 则 $G^e \leqslant G_1$. 从而 G^e 是无挠群且 $G^e \ \mathrm{char}\ G$. 注意到有限秩的群对商群的封闭性, G/G^e 是具有限幂指数的有限秩的可解群, 故 G/G^e 是有限群. 因此 G 包含一个指数有限的无挠特征子群. □

引理 3　设 G 是剩余有限的 minimax 可解群, 则对于每个 $p \bar{\in} S_p(G)$, G 存在一个指数有限的特征子群 H_p, 使得 H_p 是剩余有限 p- 群.

证明　从引理 2 的证明过程可以知道剩余有限的 minimax 可解群 G 有如下的正规列

$$G \geqslant G_n > G_{n-1} > \cdots > G_1 > G_0 = 1,$$

其中 $|G:G_n| < \infty$, 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, G_i/G_{i-1} 是无挠 minimax Abel 群. 记 $K_0 = G_0 = 1$, $K_1 = G_1$. 任取 $p \bar{\in} S_p(G)$. 注意到 minimax Abel 群 K_1 是有限秩的以及有限秩的群对商群的封闭性, 可知 K_1/K_1^p 是具有限幂指数的有限秩的 Abel 群, 故 K_1/K_1^p 是有限群. 从而

$$|G : C_G(K_1/K_1^p)| \leqslant |\mathrm{Aut}(K_1/K_1^p)| < \infty.$$

由 K_1 是无挠 minimax Abel 群可知 $K_1 \leqslant C_G(K_1/K_1^p)$, 因此

$$K_1 = G_1 \leqslant G_2 \cap C_G(K_1/K_1^p).$$

记 $K_2 = G_2 \cap C_G(K_1/K_1^p)$, 则 $K_2 \lhd G$, 并且

$$|G_2 : K_2| = |G_2 : G_2 \cap C_G(K_1/K_1^p)| \leqslant |G : C_G(K_1/K_1^p)| < \infty.$$

对 $2 < i \leqslant n$, 记

$$K_i = G_i \cap C_G(K_1/K_1^p) \cap C_G(K_2/K_2^pK_1) \cap \cdots \cap C_G(K_{i-1}/K_{i-1}^pK_{i-2}),$$

则 $K_i \lhd G$. 对于 $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $K_j/K_j^pK_{j-1}$ 是有限幂指数的 minimax 可解群, 于是 $K_j/K_j^pK_{j-1}$ 是有限群. 故

$$|G : C_G(K_j/K_j^pK_{j-1})| \leqslant |\mathrm{Aut}(K_j/K_j^pK_{j-1})| < \infty.$$

从而

$$\left|G : \bigcap_{j=1}^{i-1} C_G(K_j/K_j^pK_{j-1})\right| \leqslant \prod_{j=1}^{i-1} |G : C_G(K_j/K_j^pK_{j-1})| < \infty.$$

进而

$$|G_i : K_i| = \left|G_i : G_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} C_G(K_j/K_j^pK_{j-1})\right| \leqslant \left|G : \bigcap_{j=1}^{i-1} C_G(K_j/K_j^pK_{j-1})\right| < \infty.$$

这表明 K_i 在 G_i 中的指数有限. 因为 $|G : G_n| < \infty$, 所以

$$|G : K_n| = \left|G : G_n \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} C_G(K_j/K_j^pK_{j-1})\right| < \infty.$$

断言对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, $K_{i-1} < K_i$ 且 K_i/K_{i-1} 是无挠 minimax Abel 群.

对 i 进行归纳. 当 $i = 1$ 时, 显然成立. 当 $i = 2$ 时, $K_1 \leqslant G_2 \cap C_G(K_1/K_1^p) = K_2$, 且

$$K_2/K_1 = G_2 \cap C_G(K_1/K_1^p)/K_1 = G_2 \cap C_G(K_1/K_1^p)/G_1 \leqslant G_2/G_1.$$

因此 K_2/K_1 是无挠 minimax Abel 群.

归纳地假设 $K_{n-2} < K_{n-1}$ 且 K_{n-1}/K_{n-2} 是无挠 minimax Abel 群. 容易验证

$$K_{n-1} \leqslant C_G(K_{n-1}/K_{n-1}^pK_{n-2}).$$

由此得到

$$\begin{aligned}
K_{n-1} &= G_{n-1} \cap C_G(K_1/K_1^p) \cap C_G(K_2/K_2^pK_1) \cap \cdots \cap C_G(K_{n-2}/K_{n-2}^pK_{n-3}) \\
&= G_{n-1} \cap C_G(K_1/K_1^p) \cap C_G(K_2/K_2^pK_1) \cap \cdots \cap C_G(K_{n-2}/K_{n-2}^pK_{n-3}) \\
&\quad \cap C_G(K_{n-1}/K_{n-1}^pK_{n-2}) \\
&\leqslant G_n \cap C_G(K_1/K_1^p) \cap C_G(K_2/K_2^pK_1) \cap \cdots \cap C_G(K_{n-1}/K_{n-1}^pK_{n-2}) \\
&= K_n.
\end{aligned}$$

又 $|G_{n-1}:K_{n-1}|<\infty$ 及 $|G_n:K_n|<\infty$, 故 $K_{n-1}<K_n$. 因此

$$\begin{aligned}K_n/K_{n-1}&=G_n\cap\cdots\cap C_G(K_{n-1}/K_{n-1}^pK_{n-2})/G_{n-1}\cap\cdots\cap C_G(K_{n-2}/K_{n-2}^pK_{n-3})\\&\leqslant G_n\cap\cdots\cap C_G(K_{n-2}/K_{n-2}^pK_{n-3})/G_{n-1}\cap\cdots\cap C_G(K_{n-2}/K_{n-2}^pK_{n-3})\\&\leqslant G_n/G_{n-1}.\end{aligned}$$

这表明 K_n/K_{n-1} 是无挠 minimax Abel 群. 从而 G 存在正规群列

$$G\geqslant K_n>K_{n-1}>\cdots>K_1>K_0=1,$$

其中 $|G:K_n|<\infty$, 对 $1\leqslant i\leqslant n$, K_i/K_{i-1} 是无挠 minimax Abel 群. 注意到

$$K_n=G_n\cap C_G(K_1/K_1^p)\cap C_G(K_2/K_2^pK_1)\cap\cdots\cap C_G(K_{n-1}/K_{n-1}^pK_{n-2}),$$

可知对于 $1\leqslant i\leqslant n-1$, 有 $[K_i,K_n]\leqslant K_i^pK_{i-1}$.

记

$$U=C_G(G/K_n)\cap C_G(K_1/K_1^p)\cap C_G(K_2/K_2^pK_1)\cap\cdots\cap C_G(K_n/K_n^pK_{n-1}).$$

容易验证 $U\lhd G$ 且 $|G:U|<\infty$. 下证 U 是剩余有限 p- 群.

事实上, $S_p(K_1)\subseteq S_p(G)$. 显然 $p\bar{\in}S_p(K_1)$. 又 K_1 是无挠 minimax Abel 群, 故 K_1 是剩余有限 p-群. 因此 $\bigcap_{t=1}K_1^{p^t}=1$. 任取 $1\neq u\in U$, 则 $[G,u]\neq 1$. 于是存在自然数 s, 使得 $[G,u]\leqslant K_1^{p^s}$ 不成立, 即 $u\bar{\in}C_U(G/K_1^{p^s})$. 记 $B=G/K_1^{p^s}$, $B_i=K_i/K_1^{p^s}$, 则 B 有如下正规列

$$1<B_1<B_2<\cdots<B_n\leqslant B,$$

其中 $|B:B_n|=|G:K_n|<\infty$, 对于 $2\leqslant i\leqslant n$, $B_i/B_{i-1}\simeq K_i/K_{i-1}$ 是无挠 minimax Abel 群, $B_1=K_1/K_1^{p^s}$ 是有限群且其幂指数是 p^s.

断言 B_n 有如下形式的正规列

$$1=A_0<A_1<A_2<\cdots<A_{n-1}<B_n,$$

其中 $|B_n:A_{n-1}|$ 整除 p 的某个方幂, 对于 $1\leqslant i\leqslant n-1$, A_i/A_{i-1} 是无挠 minimax Abel 群.

从 B_1 是幂指数为 p^s 的有限群可以得到 $B_2/C_{B_2}(B_1)\leqslant \mathrm{Aut}(B_1)$ 是有限群. 由于 B_2 是 minimax 可解群, $B_2/B_2^{p^s}$ 是有限幂指数的 minimax 可解群, $B_2/B_2^{p^s}$ 是幂指数为 p^s 的有限群. 由

$$B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}\cap B_1=1$$

可知

$$B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}=B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}/B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}\cap B_1\simeq B_1B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}/B_1\leqslant B_2/B_1.$$

这说明 $B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}$ 是无挠 minimax Abel 群. 明显地, $\bar{B}_n=B_n/B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}$ 有下面的正规列

$$1<\bar{B}_2<\bar{B}_3<\cdots<\bar{B}_n,$$

其中对于 $3\leqslant i\leqslant n$, $\bar{B}_i/\bar{B}_{i-1}\simeq B_i/B_{i-1}$ 是无挠 minimax Abel 群. 注意到

$$|B_2:B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}|\leqslant|B_2:B_2^{p^s}|,$$

$\bar{B}_2 = B_2/B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}$ 是幂指数整除 p 的某个方幂的有限群.

这样可以归纳地假设 $\bar{B}_n$ 存在正规列

$$1 = \bar{C}_0 < \bar{C}_1 < \bar{C}_2 < \cdots < \bar{C}_{n-2} < \bar{B}_n,$$

其中 $|\bar{B}_n : \bar{C}_{n-2}|$ 整除 p 的某个方幂, 对于 $1 \leqslant i \leqslant n-2$, $\bar{C}_i/\bar{C}_{i-1}$ 是无挠 minimax Abel 群. 注意到 $B_2^{p^s}(C_{B_2}(B_1))^{p^s}$ 是无挠 minimax Abel 群, 因此 B_n 存在正规列

$$1 = A_0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_{n-1} < B_n,$$

其中 $|B_n : A_{n-1}| = |\bar{B}_n : \bar{C}_{n-2}|$ 整除 p 的某个方幂, 对于 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, A_i/A_{i-1} 是无挠 minimax Abel 群. 从而 B 有下面形式的正规列

$$1 = A_0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_{n-1} < B_n \leqslant B,$$

其中 $|B : B_n| < \infty$, $|B_n : A_{n-1}|$ 整除 p 的某个方幂, 对于 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, A_i/A_{i-1} 是无挠 minimax Abel 群.

事实上, $p \bar{\in} S_p(A_1)$. 又 A_1 是无挠 minimax Abel 群, 因此 A_1 是剩余有限 p- 群. 故 $\bigcap_{m=1} A_1^{p^m} = 1$. 记 $U_1 = U/C_U(B)$. 考虑映射 $\theta : U \to U_1$. 显然 $1 \neq \theta(u) = uC_U(B) \in U_1 \leqslant \mathrm{Aut}(B)$. 于是 $[B, \theta(u)] \neq 1$. 从而存在自然数 n, 使得 $[B, \theta(u)] \leqslant A_1^{p^n}$ 不成立, 即 $\theta(u) \bar{\in} C_{U_1}(B/A_1^{p^n})$. 这时我们考虑 $B/A_1^{p^n}$ 以及 $U_1/C_{U_1}(B/A_1^{p^n})$, 重复上述过程, 可以归纳地证明 G 有正规列

$$G \geqslant K_n > \cdots > M > 1,$$

其中 $|K_n : M|$ 整除 p 的某个方幂, $u \bar{\in} C_U(G/M)$. 记 $\bar{U} = U/C_U(G/M)$. 容易看到要证明 U 是剩余有限 p- 群, 只需证明 $\bar{U}$ 是有限 p- 群即可.

记 $\bar{G} = G/M$. 显然 $\bar{G}$ 有下面的正规列

$$\bar{G} \geqslant \bar{K}_n > \bar{K}_{n-1} > \cdots > \bar{K}_1 > \bar{K}_0 = 1,$$

其中 $\bar{K}_i = K_iM/M$, 对 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $[\bar{K}_i, \bar{K}_n] \leqslant \bar{K}_i{}^p \bar{K}_{i-1}$. 容易验证 $[\bar{G}, \bar{U}] \leqslant \bar{K}_n$, $[\bar{K}_i, \bar{U}] \leqslant \bar{K}_i^p \bar{K}_{i-1}$.

断言 $\bar{U}$ 的幂指数整除 p 的某个方幂. 对 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时, 有 $\bar{G} \geqslant \bar{K}_1 \geqslant 1$, 此时 $[\bar{G}, \bar{U}] \leqslant \bar{K}_1$, $[\bar{K}_1, \bar{U}] \leqslant \bar{K}_1^p$. 由 $\bar{K}_1$ 是 minimax Abel 群可以验证对 $i \geqslant 0$,

$$[\bar{K}_1^{p^i}, \bar{U}] \leqslant [\bar{K}_1, \bar{U}]^{p^i} \leqslant (\bar{K}_1^p)^{p^i} = \bar{K}_1^{p^{i+1}}.$$

由于 $\bar{K}_1$ 的幂指数整除 p 的某个方幂, 对于某个确定的正整数 m, $\bar{U}$ 平凡地作用于子群列

$$\bar{G} \geqslant \bar{K}_1 \geqslant \bar{K}_1^p \geqslant \cdots \geqslant \bar{K}_1^{p^m} = 1.$$

又 $\bar{U} \leqslant \mathrm{Aut}(\bar{G})$, 由引理 1 知 $\bar{U}$ 的幂指数整除 p 的某个方幂.

一般地, $\bar{U}/C_{\bar{U}}(\bar{K}_1)$ 忠实地作用在 $\bar{K}_1$ 上, 由引理 1 知 $\bar{U}/C_{\bar{U}}(\bar{K}_1)$ 的幂指数整除 p 的某个方幂. $\bar{U}/C_{\bar{U}}(\bar{G}/\bar{K}_1)$ 忠实地作用在 $\bar{G}/\bar{K}_1$ 上, 归纳地假设 $\bar{U}/C_{\bar{U}}(\bar{G}/\bar{K}_1)$ 的幂指数整除 p 的某个方幂. 由

$$\bar{U}/C_{\bar{U}}(\bar{K}_1) \cap C_{\bar{U}}(\bar{G}/\bar{K}_1) \leqslant \bar{U}/C_{\bar{U}}(\bar{K}_1) \times \bar{U}/C_{\bar{U}}(\bar{G}/\bar{K}_1)$$

可知 $\bar{U}/C_{\bar{U}}(\bar{K}_1)\cap C_{\bar{U}}(\bar{G}/\bar{K}_1)$ 的幂指数整除 p 的某个方幂. 注意到 $C_{\bar{U}}(\bar{K}_1)\cap C_{\bar{U}}(\bar{G}/\bar{K}_1)$ 忠实地作用在 $\bar{G}$ 上且稳定子群列 $\bar{G}\geqslant\bar{K}_1\geqslant 1$. 根据文献 [8] 的第一章命题 11 知

$$C_{\bar{U}}(\bar{K}_1)\cap C_{\bar{U}}(\bar{G}/\bar{K}_1)\leqslant \mathrm{Der}(\bar{G}/\bar{K}_1,\bar{K}_1).$$

容易验证 $C_{\bar{U}}(\bar{K}_1)\cap C_{\bar{U}}(\bar{G}/\bar{K}_1)$ 的幂指数是 p 的某个方幂. 进而 $\bar{U}$ 的幂指数整除 p 的某个方幂. 又 $\bar{U}$ 是 minimax 可解群, 于是 $\bar{U}$ 是有限 p- 群.

注意到 U 在 G 中的指数有限, 不妨设 $|G:U|=n$, 其中 n 是正整数, 则 $G^n\leqslant U$ 是剩余有限 p- 群且 G^n char G. 又有限幂指数的 minimax 可解群 G/G^n 是有限群, 故 G 包含一个指数有限的特征子群 H_p, 使得 H_p 是剩余有限 p- 群. □

引理 4　设 A 是剩余有限的 minimax Abel 群, α 是 A 的一个几乎正则自同构, 则 A 存在一个指数有限的特征子群 H, 使得对于 H 中的任意元素都有形式 $a^{-1}\alpha(a)$, 其中 $a\in A$.

证明　设 T 是 A 的挠子群. 由 [10, 引理 10.31] 知 T 满足极小条件且是 A 的直和项. 不妨设 $A=T\oplus B$. 注意到剩余有限群对子群的封闭性, T 是剩余有限的挠 Abel 子群, 故 T 不包含拟循环群. 因此 T 是有限群. 考虑 A 的自同态 $\varphi: A\to A$ $(a\mapsto a^{-1}\alpha(a))$. 因为

$$\mathrm{Ker}\varphi=\{a\in A\mid a^{-1}\alpha(a)=1\}=\{a\in A\mid \alpha(a)=a\}=C_A(\alpha),$$

所以 $|\mathrm{Ker}\varphi|=|C_A(\alpha)|<\infty$. 因此 $\mathrm{Ker}\varphi\leqslant T$. 由同态基本定理知

$$A/\mathrm{Ker}\varphi=T\oplus B/\mathrm{Ker}\varphi\simeq \mathrm{Im}\varphi.$$

所以 $\mathrm{Im}\varphi\geqslant B$, 故

$$|A:\mathrm{Im}\varphi|\leqslant|A:B|=|T|<\infty.$$

于是存在 $N\leqslant\mathrm{Im}\varphi$, 使得 $N\lhd A$ 且 A/N 是有限群. 不妨设 A/N 的幂指数是 e, 其中 e 是正整数, 则 $A^e\leqslant N\leqslant\mathrm{Im}\varphi$ 且 A^e char A. 由于 A/A^e 是有限幂指数的 minimax Abel 群, A/A^e 是有限群. 取 $H=A^e$, 则 A 包含一个指数有限的特征子群 H, 使得对于 H 中的任意元素都有形式 $a^{-1}\alpha(a)$, 其中 $a\in A$. □

引理 5　设 G 是一群, α 是 G 的一个几乎正则自同构, H 是 G 的 α- 不变有限正规子群, 则 α 诱导了 G/H 的几乎正则自同构 $\bar{\alpha}$ 且 $|C_{G/H}(\bar{\alpha})|\leqslant|C_G(\alpha)|$.

证明　显然 α 诱导了 G/H 的自同构 $\bar{\alpha}$. 只需证 $|C_{G/H}(\bar{\alpha})|<\infty$ 即可. 记 $C/H=C_{G/H}(\bar{\alpha})$. 考虑映射 $\varphi: C\to H$ $(g\mapsto g^{-1}\alpha(g))$. 一方面, 对于任意的 $x\in C_G(\alpha)$, 有

$$\varphi(xg)=(xg)^{-1}\alpha(xg)=g^{-1}x^{-1}\alpha(x)\alpha(g)=g^{-1}\alpha(g).$$

因此陪集 $C_G(\alpha)g$ 中的任一元素都有相同的象 $g^{-1}\alpha(g)$. 另一方面, 若 $g_1^{-1}\alpha(g_1)=g_2^{-1}\alpha(g_2)$, 则 $\alpha(g_1g_2^{-1})=g_1g_2^{-1}$, 所以 $g_1g_2^{-1}\in C_G(\alpha)$. 故 $C_G(\alpha)g_1=C_G(\alpha)g_2$. 因此 $|C:C_G(\alpha)|\leqslant|H|$. 从而

$$|C_{G/H}(\bar{\alpha})|=|C:H|\leqslant|C_G(\alpha)|<\infty.$$ □

引理 6　设 G 是一群, α 是 G 的一个几乎正则自同构, A 是 G 的剩余有限 minimax Abel 正规子群且 $\alpha(A)=A$, 则 α 诱导了 G/A 的几乎正则自同构 $\bar{\alpha}$.

证明　由引理 4 知剩余有限的 minimax Abel 子群 A 存在一个指数有限的特征子群 A_0, 使得对于 A_0 中的任意元素都有形式 $a^{-1}\alpha(a)$, 其中 $a\in A$. 因为 $\alpha(A_0)=A_0$, 所以 α 诱导了 G/A_0 的自同构

$\bar{\alpha}_0$. 下证 $|C_{G/A_0}(\bar{\alpha}_0)| < \infty$. 任取 $gA_0 \in C_{G/A_0}(\bar{\alpha}_0)$, 则 $\bar{\alpha}_0(gA_0) = gA_0$. 从而 $g^{-1}\alpha(g) \in A_0$. 所以存在某个 $a \in A$, 使得 $g^{-1}\alpha(g) = a^{-1}\alpha(a)$. 注意到 $|A : A_0| < \infty$, 可设

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} x_i A_0,$$

则对于 $a \in A$, 有 $a = x_i a_0$, 其中 $a_0 \in A_0$. 因此

$$g^{-1}\alpha(g) = a_0^{-1} x_i^{-1} \alpha(x_i a_0),$$

即

$$\alpha(g a_0^{-1} x_i^{-1}) = g a_0^{-1} x_i^{-1}.$$

故 $g a_0^{-1} x_i^{-1} \in C_G(\alpha)$. 所以存在某个 $y \in C_G(\alpha)$, 使得 $y = g a_0^{-1} x_i^{-1}$, 从而 $gA_0 = y x_i A_0$. 因此

$$|C_{G/A_0}(\bar{\alpha}_0)| \leqslant |A : A_0||C_G(\alpha)| < \infty.$$

因为 A/A_0 是 G/A_0 的 $\bar{\alpha}_0$- 不变正规子群且 $|A : A_0| < \infty$, 由引理 5 知 $\bar{\alpha}_0$ 诱导了 G/A 的几乎正则自同构 $\bar{\alpha}$. □

引理 7 设 A 是剩余有限的 minimax Abel 群, α 是 A 的一个素数 p 阶几乎正则自同构, 则 A 包含一个指数有限的无挠特征子群 H, 使得对于任意的 $h \in H$, 有 $h\alpha(h)\alpha^2(h)\cdots\alpha^{p-1}(h) = 1$. 如果 A 是无挠的, 那么对任意的 $a \in A$, 有 $a\alpha(a)\alpha^2(a)\cdots\alpha^{p-1}(a) = 1$.

证明 由 [10, 引理 10.31] 知 minimax Abel 群 A 的挠子群 T 满足极小条件且是 A 的直和项. 由于 T 是剩余有限的挠 Abel 群, T 肯定不包含拟循环群, 故 T 是有限群. 设 $A = T \oplus H$, 则

$$|A : H| = |T| < \infty$$

且 H char A. 考虑无挠 Abel 群 H 的自同态

$$\varphi : H \longrightarrow H, \quad h \longmapsto h\alpha(h)\alpha^2(h)\cdots\alpha^{p-1}(h).$$

此时对任意的 $h \in H$, 有 $\alpha(\varphi(h)) = \varphi(h)$. 这表明 $\varphi(h) \in C_H(\alpha)$. 于是

$$|\mathrm{Im}\varphi| \leqslant |C_H(\alpha)| \leqslant |C_A(\alpha)| < \infty.$$

又 H 是无挠 Abel 群, 这就迫使 $\mathrm{Im}\varphi = 1$. 因此对于任意的 $h \in H$, 有

$$\varphi(h) = h\alpha(h)\alpha^2(h)\cdots\alpha^{p-1}(h) = 1.$$

故 A 包含一个指数有限的无挠特征子群 H, 使得对于任意的 $h \in H$, 有

$$h\alpha(h)\alpha^2(h)\cdots\alpha^{p-1}(h) = 1.$$

如果 A 是无挠的, 那么考虑 A 的自同态

$$\rho : A \longrightarrow A, \quad a \longmapsto a\alpha(a)\alpha^2(a)\cdots\alpha^{p-1}(a).$$

同样地, 可以得到

$$|\mathrm{Im}\rho| \leqslant |C_A(\alpha)| < \infty.$$

由 A 是无挠群知 $\mathrm{Im}\rho=1$. 此时对于 A 中任意的元素 a 都满足 $a\alpha(a)\alpha^2(a)\cdots\alpha^{p-1}(a)=1$.

设 X 是由 $\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ 生成的自由半群. 考虑自同构

$$\psi: X\longrightarrow X\quad (x_m\longmapsto x_1,\ x_i\longmapsto x_{i+1},\ 1\leqslant i\leqslant m-1).$$

令 $W_1=x_1$, 如下定义 X 中字的一个序列 $\{W_i\}$.

$$W_{i+1}=W_i\psi(W_i)\psi^2(W_i)\cdots\psi^{m-1}(W_i),\quad 其中\ i\geqslant 1.$$

这样有

$$\begin{aligned}W_2&=x_1x_2\cdots x_m,\\ W_3&=(x_1x_2\cdots x_m)(x_2x_3\cdots x_1)\cdots(x_mx_1\cdots x_{m-1}),\\ &\ \vdots\end{aligned}$$

容易验证字 W_n 的长是 m^{n-1}. □

引理 8 设 G 是剩余有限的 minimax 可解群, α 是 G 的一个素数 p 阶几乎正则自同构, 则 G 存在一个指数有限的特征子群 H, 使得对于任意的 $h\in H$, 有

$$W_{d+1}(h,\alpha(h),\alpha^2(h),\dots,\alpha^{p-1}(h))=1,$$

其中 d 是 G 的导长, W_{d+1} 的定义同上.

证明 对 G 的导长 d 进行归纳. 当 $d=1$ 时, G 是 minimax Abel 群, 由引理 7 知结论成立. 当 $d>1$ 时, 由引理 2 知 G 包含一个指数有限的无挠特征子群 M. 这样 $M^{(d-1)}$ 是 M 的剩余有限 minimax Abel 特征子群, 由引理 6 知 α 诱导了 $M/M^{(d-1)}$ 的几乎正则自同构 $\bar{\alpha}$. 因 $M/M^{(d-1)}$ 的导长 $\leqslant d-1$, 归纳地假设 $M/M^{(d-1)}$ 存在一个指数有限的特征子群 $H/M^{(d-1)}$, 使得对于任意的 $\bar{h}\in\bar{H}=H/M^{(d-1)}$, 有

$$W_d(\bar{h},\bar{\alpha}(\bar{h}),\bar{\alpha}^2(\bar{h}),\dots,\bar{\alpha}^{p-1}(\bar{h}))=\bar{1}.$$

即

$$W_d(\bar{h},\overline{\alpha(h)},\overline{\alpha^2(h)},\dots,\overline{\alpha^{p-1}(h)})=\bar{1}.$$

所以

$$W_d(h,\alpha(h),\alpha^2(h),\dots,\alpha^{p-1}(h))\in M^{(d-1)}.$$

记 $m=W_d(h,\alpha(h),\alpha^2(h),\dots,\alpha^{p-1}(h))$. 注意到 $M^{(d-1)}$ 是无挠群, 由引理 7 知

$$m\alpha(m)\alpha^2(m)\cdots\alpha^{p-1}(m)=1.$$

根据 W_{d+1} 的定义得到

$$W_{d+1}(h,\alpha(h),\alpha^2(h),\dots,\alpha^{p-1}(h))=1.$$

显然 H char M char G 且 $|G:H|=|G:M||M:H|<\infty$. □

引理 9 设 G 是剩余有限的 minimax 可解群, α 是 G 的一个素数 p 阶几乎正则自同构, 则 G 存在一个指数有限的特征子群 H, 使得以下成立.

(1) $\bigcap_{s=1}H^{q^s}=1$. 其中 $q\,\bar{\in}\,S_p(G)$.

(2) 对于任意的 $h \in H$, 有 $W_{d+1}(h, \alpha(h), \alpha^2(h), \ldots, \alpha^{p-1}(h)) = 1$. 其中 d 是 G 的导长.

(3) 若 $q \neq p$, 则 α 诱导了 H/H^{q^s} 的正则自同构 α_s.

证明 由引理 3 知对于每个 $q \bar{\in} S_p(G)$, G 存在一个指数有限的特征子群 H_q, 使得 H_q 是剩余有限 q- 群. 所以 $\bigcap_{s=1} H_q^{q^s} = 1$. 根据引理 8 知 G 存在一个指数有限的特征子群 H_1, 使得对于任意的 $h \in H_1$, 有

$$W_{d+1}(h, \alpha(h), \alpha^2(h), \ldots, \alpha^{p-1}(h)) = 1.$$

取 $H = H_q \cap H_1$. 则 H char G 且

$$|G : H| = |G : H_q \cap H_1| \leqslant |G : H_q||G : H_1| < \infty.$$

这样证得了 (1) 和 (2).

显然 α 诱导了 H/H^{q^s} 的自同构 α_s. 断言 α_s 是正则自同构. 只需证 $C_{H/H^{q^s}}(\alpha_s) = \bar{1}$ 即可. 任取 $\bar{h} \in C_{H/H^{q^s}}(\alpha_s)$, 则 $\alpha_s(\bar{h}) = \bar{h}$. 在商群 H/H^{q^s} 中, 有关系式

$$W_{d+1}(\bar{h}, \alpha_s(\bar{h}), \alpha_s^2(\bar{h}), \ldots, \alpha_s^{p-1}(\bar{h})) = \bar{h}^{p^d} = \bar{1}.$$

因为 $q \neq p$, 所以 $\bar{h} = \bar{1}$. □

现在我们来完成前面定理 1 和 2 的证明.

定理 1 的证明 取 $q \bar{\in} S_p(G)$ 且 $q \neq p$, 根据引理 9 知道 G 包含一个指数有限的特征子群 H, 且 α 诱导了 H/H^{q^s} 的正则自同构 α_s, 其中 $s \geqslant 1$. 容易看到 H/H^{q^s} 的幂指数是 q^s. 注意到有限幂指数的 minimax 可解群 H/H^{q^s} 是有限群, 根据 [11, 定理 7.25] 知道幂零群 H/H^{q^s} 的幂零类不超过 $h(p)$, 其中 $h(p)$ 是只与 p 有关的函数. 因此对于任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_{h(p)+1} \in H$, 有

$$[\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{h(p)+1}}] = \bar{1}.$$

即

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{h(p)+1}] \in H^{q^s}.$$

从而

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{h(p)+1}] \in \bigcap_{s=1} H^{q^s}.$$

由引理 9 的 (1) 知 $\bigcap_{s=1} H^{q^s} = 1$, 故 $[x_1, x_2, \ldots, x_{h(p)+1}] = 1$. 这表明 H 是幂零类不超过 $h(p)$ 的幂零群. □

定理 2 的证明 根据 [11, 引理 7.11] 知道 Higman 函数 $h(p)$ 在 $p = 2$ 时的取值是 1. 由定理 1 可以立即得到定理 2. □

3 定理 3 和 4 的证明

引理 10 设 A 是一个无挠 Abel 群, α 是 A 的几乎正则自同构, 则 $A = [A, \alpha]$.

证明 只需证 $A \leqslant [A, \alpha]$ 即可. 考虑 A 的自同态

$$\varphi : A \longrightarrow A, \quad a \longmapsto a^{-1}\alpha(a),$$

容易验证 $\mathrm{Ker}\varphi = C_A(\alpha)$. 注意到 A 是无挠 Abel 群, 于是 $\mathrm{Ker}\varphi = C_A(\alpha) = 1$. 故

$$A = A/\mathrm{Ker}\varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi \leqslant [A, \alpha].$$

引理 11 [12] 设 G 是一个群, α 是 G 的几乎正则自同构, A 是 G 的 α- 不变的无挠 minimax 正规 Abel 子群, 则 α 诱导了 G/A 的几乎正则自同构 $\bar{\alpha}$.

定理 3 的证明 设 G 的导长是 d, 则 G 有下面的导列

$$G = G^{(0)} > G^{(1)} > \cdots > G^{(d-1)} > G^{(d)} = 1,$$

对于 $0 \leqslant i \leqslant d-1$, $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ 是 minimax Abel 群. 记 $T/G^{(i+1)}$ 是 $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ 的挠子群, 显然 $T/G^{(i+1)}$ char $G^{(i)}/G^{(i+1)}$. 因此 G 有下面的特征群列

$$G > H_1 > H_2 > \cdots > H_{n-1} > H_n = 1,$$

其中商因子或者是无挠 minimax Abel 群, 或者是 minimax 无限挠 Abel 群, 或者是有限 Abel 群. 再由 [9, 定理 1] 的证明方法和 G 是剩余有限群可以得到 G 有如下形式的特征群列

$$G \geqslant G_n > G_{n-1} > \cdots > G_1 > G_0 = 1,$$

其中 $|G : G_n| < \infty$, 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, G_i/G_{i-1} 是无挠 minimax Abel 群. 容易验证对 $1 \leqslant i \leqslant n$, G_i 是无挠 minimax 群. 又 $C_{G_i}(\alpha) \leqslant C_G(\alpha)$, 由引理 11 知 α 诱导了 G_i/G_{i-1} 的几乎正则自同构 $\bar{\alpha}$.

断言 $G_i = [G_i, \alpha]$. 当 $i = 1$ 时, G_1 是无挠 Abel 群, 由引理 10 知结论成立. 当 $i > 1$ 时, 由归纳假设得到 $G_{i-1} = [G_{i-1}, \alpha] \leqslant [G_i, \alpha]$. 考虑无挠 Abel 群 G_i/G_{i-1} 的自同态

$$\varphi : G_i/G_{i-1} \longrightarrow G_i/G_{i-1}, \quad \bar{g} \longmapsto \bar{g}^{-1}\bar{\alpha}(\bar{g}),$$

根据引理 10 得到

$$G_i/G_{i-1} \leqslant [G_i/G_{i-1}, \bar{\alpha}] = [G_i, \alpha]G_{i-1}/G_{i-1} = [G_i, \alpha]/G_{i-1}.$$

因此 $G_i \leqslant [G_i, \alpha]$. 所以 $G_i = [G_i, \alpha]$.

注意到 $G_n = [G_n, \alpha] \leqslant [G, \alpha]$ 和 $[G/G_n, \bar{\alpha}] \lhd G/G_n$, 因此

$$G/G_n/[G/G_n, \bar{\alpha}] = G/G_n/[G, \alpha]G_n/G_n = G/G_n/[G, \alpha]/G_n \simeq G/[G, \alpha].$$

又 G/G_n 是有限群, 所以 $G/[G, \alpha]$ 是有限群. □

引理 12 [6] 设 G 是一个群, α 是 G 的一个 2 阶自同构, A 是 G 的 α- 不变正规 Abel 子群, 如果 $A \cap C_G(\alpha) = 1$, 则 $[[G, \alpha], A] = 1$.

定理 4 的证明 由定理 2 知道存在 G 的 Abel 特征子群 A, 使得 G/A 是有限群. 记 A 的挠子群为 T, 则 T 是有限群且 T char G. 由引理 5 知 α 诱导了 G/T 的几乎正则自同构 $\bar{\alpha}$, 即 $|C_{G/T}(\bar{\alpha})| < \infty$. 又 A/T 是无挠群, 因此 $A/T \cap C_{G/T}(\bar{\alpha}) = 1$. 由引理 12 知

$$[[G/T, \bar{\alpha}], A/T] = 1.$$

根据引理 10 得到

$$A/T = [A/T, \bar{\alpha}] \leqslant [G/T, \bar{\alpha}],$$

从而

$$A/T \leqslant C_{[G/T,\bar{\alpha}]}([G/T,\bar{\alpha}]) = \zeta([G/T,\bar{\alpha}]).$$

另一方面, 由

$$[G/T,\bar{\alpha}]/A/T = [G,\alpha]T/T/A/T \simeq [G,\alpha]T/A \leqslant G/A$$

得到 $[G/T,\bar{\alpha}]/A/T$ 是有限群. 于是 $[G/T,\bar{\alpha}]'$ 是有限群, 即 $[G,\alpha]'T/T$ 是有限群. 所以 $[G,\alpha]'$ 是有限群. □

4 定理 5 的证明

引理 13 设 G 是一个群, α 是 G 的一个自同构, 对任意的 $g\in G$, τ_g 是 G 的一个内自同构. 如果 $[\tau_g,\alpha]=1$, 那么 $g\alpha(g)^{-1}\in\zeta G$.

证明 对任意的 $x\in G$, 我们有

$$\begin{aligned} x=[\tau_g,\alpha](x) &= \tau_g^{-1}\alpha^{-1}\tau_g\alpha(x) \\ &= \tau_g^{-1}\alpha^{-1}(g^{-1}\alpha(x)g) \\ &= \tau_g^{-1}(\alpha^{-1}(g^{-1})x\alpha^{-1}(g)) \\ &= g\alpha^{-1}(g^{-1})x\alpha^{-1}(g)g^{-1}. \end{aligned}$$

从而

$$\alpha^{-1}(g)g^{-1}x = x\alpha^{-1}(g)g^{-1}.$$

进而

$$\alpha^{-1}(g)g^{-1}\in\zeta G.$$

注意到 ζG char G, 因此

$$g\alpha(g)^{-1} = \alpha(\alpha^{-1}(g)g^{-1})\in\zeta G.$$ □

引理 14 设 G 是一个剩余有限的 minimax 无挠幂零群, α 是 G 的一个几乎正则自同构. 如果对于任意的 $g\in G$, 存在某个 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $[\tau_{g,n}\,\alpha]=1$, 那么 G 是 Abel 群.

证明 假设 G 是非 Abel 群, 则存在某个 $a\in G$, 使得 $\tau_a\neq 1$. 设 m 是使得 $[\tau_{a,m}\,\alpha]=1$ 的最小正整数, 则 $[\tau_{a,m-1}\,\alpha]\neq 1$. 可设 $[\tau_{a,m-1}\,\alpha]=\tau_h\neq 1$, 其中 $h\in G$. 此时 $[\tau_h,\alpha]=1$. 由引理 13 知 $h\alpha(h)^{-1}\in\zeta G$, 因此存在某个 $x\in\zeta G$, 使得 $x=h\alpha(h)^{-1}$. 故 $\alpha(h)=x^{-1}h$. 注意到 α 诱导了 ζG 的几乎正则自同构, 根据引理 4 知道剩余有限的 minimax Abel 群 ζG 包含一个指数有限的特征子群 H, 使得对于 H 中的任意元素都有形式 $y^{-1}\alpha(y)$, 其中 $y\in\zeta G$. 设商群 $\zeta G/H$ 的幂指数是 e, 则

$$\alpha(h^e)=\alpha(h)^e=(x^{-1}h)^e=(x^{-1})^eh^e=(x^e)^{-1}h^e.$$

因为 $x^e\in H$, 所以存在某个 $y\in\zeta G$, 使得 $x^e=y^{-1}\alpha(y)$. 因此

$$\alpha(h^e)=(x^e)^{-1}h^e=(y^{-1}\alpha(y))^{-1}h^e=\alpha(y)^{-1}yh^e.$$

即

$$\alpha(yh^e)=yh^e.$$

从而

$$yh^e \in C_G(\alpha).$$

又 G 是无挠群, 故 $yh^e \in C_G(\alpha) = 1$. 于是 $h^e = y^{-1} \in \zeta G$. 注意到 $G/\zeta G$ 是无挠群, 于是 $h \in \zeta G$. 故 $\tau_h = 1$, 矛盾. 因此 G 是 Abel 群. □

定理 5 的证明　设 α 是 G 的一个几乎正则自同构且 $\alpha \in \mathrm{Fit}(\mathrm{Aut}G)$. 注意到 $G/\zeta G \simeq \mathrm{Inn}G$ 是幂零群, 因此 $\mathrm{Inn}G \leqslant \mathrm{Fit}(\mathrm{Aut}G)$. 所以对于任意的 $g \in G$, 存在某个 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $[\tau_{g},_n \alpha] = 1$.

(1) 事实上, G 是 minimax 可解群. 由引理 2 知 G 包含一个指数有限的无挠特征子群 H. 显然 α 诱导了 H 的几乎正则自同构, 由引理 14 知 H 是 Abel 群. 所以 G 是 Abel 群的有限扩张.

(2) 设 T 是 G 的挠子群, 则 T char G 且 T 是剩余有限的 minimax 幂零群.

断言 T 是有限群. 设 T 的幂零类是 c, 则 T 存在下面的上中心列

$$1 = \zeta_0 T < \zeta_1 T < \cdots < \zeta_c T = T.$$

对 c 进行归纳. 当 $c = 1$ 时, $\zeta_1 T = T$. 明显地, T 是剩余有限的 minimax 挠 Abel 群, T 满足子群极小条件, 又由于拟循环群肯定不是剩余有限的, 故 T 是有限群. 当 $c > 1$ 时, $T/\zeta_1 T$ 的幂零类是 $c-1$, 归纳地假设 $T/\zeta_1 T$ 是有限群. 而剩余有限的 minimax 挠 Abel 群 $\zeta_1 T$ 是有限群. 因此 T 是有限群.

断言 G/T 是剩余有限群. 任取 $1 \neq gT \in G/T$, 对任意的 $t \in T$, 有 $1 \neq gt \in G$. 注意到 G 是剩余有限群, 所以存在 $H_t \lhd G$, 使得 $gt \bar{\in} H_t$ 且 G/H_t 是有限群. 记 $H := \bigcap_{t \in T} H_t$, 则

$$G/H = G \Big/ \bigcap_{t \in T} H_t \leqslant \prod_{t \in T} G/H_t.$$

由于 T 和 G/H_t 都是有限群, 所以 G/H 是有限群. 易知 G/HT 也是有限群. 如果 $g \in HT$, 则存在某个 $h \in H$, $t \in T$, 使得 $g = ht$. 从而 $gt^{-1} = h \in H$, 这就矛盾于 H 的构造. 因此 $g \bar{\in} HT$. 随之 $gT \bar{\in} HT/T$, 而 $HT/T \lhd G/T$ 且

$$G/T/HT/T \simeq G/HT$$

是有限群, 所以 G/T 是剩余有限群.

由引理 5 知道 α 诱导了 G/T 的几乎正则自同构. 再根据引理 14 得到剩余有限的 minimax 无挠幂零群 G/T 是 Abel 群. 故 G 是挠群被 Abel 群的扩张. □

参考文献

1　Thompson J. Finite groups with fix-point-free automorphisms of prime order. Proc Nat Acad Sci, 1959, 45: 578–581
2　Higman G. Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements. J London Math Soc, 1957, 64: 321–334
3　Hartley B, Meixner T. Periodic groups in which the centralizer of an involution has bounded order. J Algebra, 1980, 64: 285–291
4　Endimioni G. On almost regular automorphisms. Arch Math, 2010, 94: 19–27
5　Endimioni G. Polycyclic group admitting an almost regular automorphisms of prime order. J Algebra, 2010, 323: 3142–3146
6　Endimioni G, Moravec P. On the centralizer and the commutator subgroup of an automorphism. Monatsh Math, 2012, 167: 165–174
7　Robinson D J S. A Course in the Theory of Groups, Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1996
8　Segal D. Polycyclic Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1983
9　刘合国. 关于具有限秩的可解群. 数学进展, 2000, 29: 55–60

10 Robinson D J S. Finiteness Conditions and Generalized Solvable Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1972
11 Khukhro E I. p-Automorphisms of Finite p-Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
12 Wehrfritz B A F. Almost fixed-point-free automorphisms of soluble groups. J Pure Appl Algebra, 2011, 60: 1112–1115

On almost regular automorphisms of residually finite minimax soluble groups

LIU HeGuo & XU Tao

Abstract Let G be a residually finite minimax soluble group and α be an almost regular automorphism of G. Then $G/[G,\alpha]$ is a finite group. If $\alpha^p = 1$, then G contains a nilpotent subgroup of finite index and of nilpotent class at most $h(p)$, where $h(p)$ is a function depending only on p. If $\alpha^2 = 1$, then G contains an abelian characteristic subgroup of finite index and $[G,\alpha]'$ is a finite group.

Keywords residually finite, minimax soluble group, almost regular automorphism

MSC(2010) 20F18

doi: 10.1360/012012-325