最短时间控制问题与最小范数控制问题的等价性

献给齐民友教授 90 华诞

汪更生

天津大学应用数学中心, 天津 300072

E-mail: wanggs62@yeah.net

收稿日期: 2018-02-06; 接受日期: 2018-06-14; 网络出版日期: 2018-12-27

国家自然科学基金 (批准号: 11571264) 资助项目

摘要 本文介绍我们得到的关于时间最优控制问题与范数最优控制问题之间等价性的一些最新发展, 以及它的一些应用.

关键词 最短时间控制 最小范数控制 最优控制的等价性

MSC (2010) 主题分类 49J20, 93C20

1 引言

控制论是 20 世纪 40 年代由美国数学家 Wiener^[1] 创立的一门学科. 1954 年, 我国科学家钱学森出版了经典著作 [2], 给出了控制理论在工程中的应用方向. 在科学技术高速发展的今天, 控制论已成为许多现代技术的底层基础, 例如, 日新月异的人工智能学科的基础就是数学与控制论. 微分系统的控制理论的出现标志着现代控制理论的诞生, 以下三个里程碑式的工作奠定了现代控制理论的基础: 其一, Pontryagin 等^[3] 于 1958 年提出了解决最优控制问题的新方法, 被称为 Pontryagin 最大值原理. 该工作给出了常微分控制系统的参量 (如初始状态、目标状态和控制变量等) 被约束时, 使得系统的性能指标达到最小的控制和轨线所满足的必要条件, 其核心是一种新的变分法. 其二, Bellman^[4] 于 1956 年创建了动态规划方法, 用了一个朴实的发现: 整体最优导出局部最优, 将多阶段决策问题转化成若干单阶段决策问题, 这套动态规划理论影响深远. 其三, Kalman^[5] 于 1960 年建立了线性二次系统的最优控制理论, 为最优控制的反馈设计奠定了基础.

最短时间控制问题和最小范数控制问题均为最优控制问题. 前者可叙述为: 从控制约束集合中找一个控制使得控制系统的解在最短时间内将初始状态转移到给定的目标集合. 最短时间控制问题的研究对象包括: 最优控制的存在性; 最优控制与最优时间的特征; 最优控制的棒 - 棒性; 最优时间与最优控制的计算等. 后者可叙述为: 寻求一个无约束的控制使其具有如下两个性质: 其一, 它将控制对应

英文引用格式: Wang G S. Equivalence between minimal time control problems and minimal norm control problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 195–200, doi: 10.1360/N012018-00026

的解在固定时间区间里从初始状态转移到目标集; 其二, 它在所有具有第一个人性质的控制中具有最小范数. 由于最短时间控制问题的输入到输出是一个十分复杂的过程, 因此, 对其最优时间和最优控制的刻画十分困难. 为此, 我们介绍一种方法: 建立它与较简单的最小范数控制问题的等价性, 然后通过后者的研究得到前者的一些有用的信息.

关于最短时间控制问题与最小范数控制问题之间的关联的研究从 20 世纪 60 年代就由美国加州大学洛杉矶分校的教授 Fattorini 开展了 (参见文献 [6]), 后来, 他在其数十年的研究基础上写了一本相关著作 [7]. 在 Fattorini 的研究中, 系统是抽象空间上的时不变发展方程; 控制是整体进入系统的 (这意味着: 其一, 控制空间与状态空间一致; 其二, 控制算子为恒等算子); 目标集为状态空间中的一类特殊的点. 他在一定的条件下得到了最小范数控制问题的最优控制是最短时间控制问题的最优控制. 1999 年, 德国数学家 Gozzi 和意大利数学家 Loreti 因为研究 Bellman 函数正则性的需要, 得到了最短时间控制问题与最小范数控制问题的等价性, 即它们拥有相同的最优控制 (参见文献 [8]). 在文献 [8] 中, 控制系统是一抽象空间中的时不变发展方程; 控制算子是一线性有界算子; 目标集是状态空间的原点; 而控制函数属于 $L^p(\mathbb{R}^+; U)$ (其中 $1 < p < \infty$, 控制空间 U 为 Hilbert 空间). 对于 $p = \infty$ 的情形, 文献 [8] 没能给出相应的等价性, 而这是最短时间控制问题中最重要的情形. 关于由 Bellman 函数诱发出的等价性研究, 参见文献 [9–11]. 2012 年, Wang 和 Zuazua^[12] 得到了 L^∞ 型控制的热传导方程的最短时间控制问题与最小范数控制问题的等价性 (其中目标集是状态空间中的原点), 并且通过这一等价性, 刻画了最优时间和最优控制. 由于我们当时的认知不够, 在证明等价性时用了文献 [13] 中的棒 - 棒性. 在文献 [12] 后, 文献 [14–20] 等对不同的时不变控制系统且目标为原点的情形, 以及时变系统但目标是以原点为球心的闭球的情形得到了上述的等价性. 对于时不变系统, 当目标为原点时, Wang 和 Zhang^[21] 发现了一个比较本质的条件, 它保证了上述等价性成立. 当目标集为状态空间中任一有界、凸闭且有内点的集合时, 上述等价性是不能由前面文献中的方法得到的, 原因之一是它们不具原点的特殊性. Qin 和 Wang^[22] 给出了一个新方法, 由此导出一般抽象空间中时不变发展方程在目标为一般有界、凸闭且含内点时的最小范数控制问题与最短时间控制问题的等价性定理. 当控制系统为时变且目标集为原点 (或不含内点的集合) 时, 问题要复杂许多. 技术上看, 由于系统的平移不变性被破坏了, 用来研究时不变系统且目标为原点的上述等价性的许多关键结论都不对了 (或无法验证了). 事实上, 人们似乎还没有弄清楚真正本质困难在哪里. Wang 等^[23] 对非常特殊的一类时变热传导方程, 在目标为原点的情形, 得到了上述等价性. 这类方程满足一个解函数空间完备化的条件, 后者能推出等价性. 然而, 这个条件不一定是本质的. 因此, 对于时变发展方程, 最短时间控制问题的研究还远远不够成熟.

2 问题的数学描述以及主要结果

2.1 问题的数学描述

令状态空间 X 和控制空间 U 为两个实 Hilbert 空间. 设 $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ 为一闭线性算子, $B : U \rightarrow X$ 为有界线性算子. 称 A 和 B 分别为系统算子和控制算子. 考虑如下控制系统:

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$y'(t) = Ay(t) + Bv(t), \quad t \in (0, T) \quad (\text{其中 } T > 0). \quad (2.2)$$

在 (2.1) 和 (2.2) 中, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$, $v \in L^\infty(0, T; U)$ 为控制函数 (简称控制). 这两个系统除了定义区间不同外, 长得一样. 关于上述系统, 我们作如下假设:

(H₁) 算子 A 生成 X 上的一个 C_0 半群 $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$;

(H₂) 算子 A 有倒向唯一性, 即若存在 $t > 0$ 和 $z \in X$ 使得 $e^{At}z = 0$, 则 $z = 0$;

(H₃) 对任意 $T > 0$, 系统 (2.2) 具有 L^∞ 零能控性, 即任给 $T > 0, y_0 \in X$, 存在控制 $v \in L^\infty(0, T; U)$ 使得 (2.2) 有解满足 $y(0) = y_0, y(T) = 0$.

我们将用 $y(\cdot; y_0, u)$ 表示 (2.1) 对应控制 u 和初始条件 $y(0) = y_0$ 的解; 用 $y(\cdot; y_0, v)$ 表示 (2.2) 对应控制 v 和初始条件 $y(0) = y_0$ 的解. 任给 $M > 0, y_0 \in X$, 定义下列最短时间控制问题:

$$(TP)_{y_0}^M : T(M, y_0) \triangleq \inf_{u \in \mathcal{U}_M} \{t > 0 : y(t; y_0, u) \in S\},$$

其中 S 为 X 中的一个非空子集, 而 $\mathcal{U}_M \triangleq \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U) : \|u(t)\|_U \leq M \text{ a.e. } t > 0\}$. 称 $\mathcal{U}_M$ 和 S 为控制约束集和目标集. 在问题 $(TP)_{y_0}^M$ 中, 称 $T(M, y_0)$ 为最短时间; 称 $u \in \mathcal{U}_M$ 为允许控制, 如果存在 $t > 0$ 使得 $y(t; y_0, u) \in S$; 称 $u^* \in \mathcal{U}_M$ 为最优控制, 如果 $y(T(M, y_0); y_0, u^*) \in S$. 上述问题是系统 (2.1) 对应的一个最短时间控制问题. 当 y_0 固定时, $M \rightarrow T(M, y_0)$ 给出了定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的函数, 称为最短时间函数, 它在 $(TP)_{y_0}^M$ 的研究中起着重要作用.

下面介绍方程 (2.2) 对应的最小范数控制问题. 给定 $T > 0$, 定义

$$(NP)_{y_0}^T : N(T, y_0) \triangleq \inf\{\|v\|_{L^\infty(0, T; U)} : y(T; y_0, v) \in S\}.$$

在上面的问题中, $N(T, y_0)$ 称为最优范数; $v \in L^\infty(0, T; U)$ 称为一个允许控制, 如果 $y(T; y_0, v) \in S$; $v^* \in L^\infty(0, T; U)$ 称为一个最优控制, 如果它是允许控制并且 $\|v^*\|_{L^\infty(0, T; U)} = N(T, y_0)$. 当 y_0 固定时, $T \rightarrow N(T, y_0)$ 给出了一个定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的函数, 称为最小范数函数, 它在 $(TP)_{y_0}^M$ 的研究中也起着重要作用.

最后, 我们介绍问题 $(TP)_{y_0}^M$ 与 $(NP)_{y_0}^T$ 的等价性. 称这两个问题等价, 如果 (i) 它们都有最优控制; (ii) 每一个 $(TP)_{y_0}^M$ 的最优控制, 当限制到 $(0, T)$ 时, 是 $(NP)_{y_0}^T$ 的最优控制; (iii) 每一个 $(NP)_{y_0}^T$ 的最优控制, 当零延拓到 $\mathbb{R}^+$ 后, 是 $(TP)_{y_0}^M$ 的最优控制.

2.2 主要结果

本小节的主要目的是介绍两个我们近年得到的有关最短时间控制问题与最小范数控制问题的等价性定理. 这些结果一方面借鉴了前人的相关经验, 另一方面含有我们的想法.

在将要介绍的第一个定理中, 取 $S = \{0\} \subset X$. 于是可以假设 $y_0 \neq 0$, 否则问题是平凡的. 在这种情形下, 我们可以发现函数 $T \rightarrow N(T, y_0)$ 是从 $(0, \infty)$ 到 $(0, \infty)$ 的单调下降函数. 由此, 我们可以定义 $\hat{N}(y_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t, y_0)$.

定理 2.1 假设 (H₁)–(H₃) 成立. 令 $S = \{0\} \subset X$ 且 $y_0 \in X \setminus \{0\}$, 则下列命题成立:

- (i) 当 $M \leq \hat{N}(y_0)$ 时, $(TP)_{y_0}^M$ 没有允许控制;
- (ii) 当 $M > \hat{N}(y_0)$ 时, $(TP)_{y_0}^M$ 与 $(NP)_{y_0}^{T(M, y_0)}$ 等价;
- (iii) 当 $T > 0$ 时, $(NP)_{y_0}^T$ 与 $(TP)_{y_0}^{N(T, y_0)}$ 等价.

关于定理 2.1, 我们给出以下注释.

(a₁) 当控制函数空间 $L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ 由 $L^p(\mathbb{R}^+; U)$ ($1 < p < \infty$) 取代时, (这时 $\mathcal{U}_M = \{u : \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^+; U)} \leq M\}$) 相应的等价性结果, 即 (ii) 和 (iii), 在文献 [8] 中得到了. 对于 L^∞ 情形, 文献 [12] 得到了热传导方程的相应结果, 其证明利用了 $(TP)_{y_0}^M$ 问题的棒 - 棒性, 后者在文献 [13] 中得到. 临界值 $\hat{N}(y_0)$ 是在文献 [23] 中提出的.

(a₂) 在文献 [21] 中, 我们发现等价性的证明不需要最短时间控制问题的棒 - 棒性, 而只需要某种“弱能控性”, 它比 (H₃) 弱, 它可以描述为 ($\widehat{H}_3$): 任给 $0 < \hat{t} < T$, $u \in L^p(0, T; U)$ (其中 $p \in [2, \infty)$), 存在 $v \in L^\infty(0, T; U)$ 使得 $y(T; y_0, \chi_{(0, \hat{t})} u) = y(T; y_0, \chi_{(\hat{t}, T)} v)$, 其中 $\chi_{(\cdot, \cdot)}$ 表示区间 $(\cdot, \cdot)$ 上的特征函数. 值得指出的是, 在有限维情形 (即 $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$), 任意矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 满足 ($\widehat{H}_3$).

(a₃) 定理 2.1 的证明是基于最小范数函数 (或最短时间函数) 的下列性质: 它是从 $(0, \infty)$ 到 $(0, \infty)$ (或 $(\widehat{N}(y_0), \infty)$ 到 $(0, \infty)$) 的连续且严格单调下降的函数; 它是最短时间函数 (或最小范数函数) 的反函数. 值得指出的是, 当系统为时变时, 例如, $y' = Ay + D(t)y + Bu$ (其中 $D(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L(X))$), 我们不知道上述结果是否成立, 主要是我们不知如何证明最小范数函数的左连续性. 这也是为什么时变系统的最短时间的研究比时不变系统的要困难的原因之一.

接下来介绍本文的第二个定理. 设目标集 $S \in \mathcal{F}$, 其中 $\mathcal{F}$ 是由 X 中全体有界、凸闭且有内点的集合构成的集合族. 于是, 我们的目标不再局限于 X 的原点. 记

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &\triangleq \{(M, T) \in [0, \infty) \times (0, \infty) : T = T(M, y_0)\}, \\ \mathcal{K} &\triangleq \{(M, T) \in [0, \infty) \times (0, \infty) : M = 0, N(T, y_0) = 0\}.\end{aligned}$$

定理 2.2 假设 (H₁)–(H₃) 成立. 令 $y_0 \in X$ 和 $S \in \mathcal{F}$ 满足 $y_0 \notin S$, 则下列结论成立:

(i) 当 $(M, T) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{K}$ 时, $(TP)_{y_0}^M$ 与 $(NP)_{y_0}^T$ 是等价的; 零控制不是它们的最优控制; 并且有 $M = N(T, y_0)$, $T = T(M, y_0)$.

(ii) 当 $(M, T) \in \mathcal{K}$ 时, $(TP)_{y_0}^M$ 与 $(NP)_{y_0}^T$ 是等价的; 零控制是它们唯一的最优控制.

(iii) 当 $(M, T) \in [0, \infty) \times (0, \infty) \setminus (\mathcal{G} \cup \mathcal{K})$ 时, $(TP)_{y_0}^M$ 与 $(NP)_{y_0}^T$ 不等价.

关于定理 2.2, 我们给出下列注释:

(b₁) 这个定理首先由 Qin 和 Wang^[22] 给出, 其中条件比 (H₁)–(H₃) 强, 例如, 要求 A 生成一个解析半群. 后来, 我们在撰写专著 [24] 时, 认识到 (H₁)–(H₃) 可以推出定理 2.2 中的等价性结果.

(b₂) 由于目标集 S 的位置不再是原点, 最小范数函数 $T \rightarrow N(T, y_0)$ 不再具有单调性了. 因此, 证明定理 2.1 (以及相关结论) 的方法对定理 2.2 行不通. 为此, 我们借助了经典的旭日引理 (the raising sun lemma) 的思想, 发现了一个证明定理 2.2 的方法. 具体地, 给定 $M > 0$, 定义 $\mathcal{J}_M \triangleq \{t \in \mathbb{R}^+ : N(t, y_0) \leq M\}$. 我们得到下列结论: 若 $y_0 \in X$ 和 $S \in \mathcal{F}$ 满足 $y_0 \notin S$, 则对任意 $M > 0$, 有 $T(M, y_0) = \inf \mathcal{J}_M$.

(b₃) 在情形 $S = \{0\}$ 或情形 S 是以 $\{0\}$ 为中心的闭球以及 A 生成压缩半群下, 集合 $\mathcal{G}$ 是连通的, 并且 $\mathcal{K} = \emptyset$. 然而, 对于一般的 $S \in \mathcal{F}$, 我们有例子说明 $\mathcal{G}$ 不是连通的并且 $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

3 应用

本节介绍几个等价性定理的应用.

应用一: 在最短时间控制问题中, 当 M 和 S 给定时, 我们可以定义函数 $y_0 \rightarrow T(M, y_0)$, 称为 Bellman 函数. 这个函数在利用动态规划方法研究 $(TP)_{y_0}^M$ 问题时起着重要的作用. 关于 Bellman 函数的研究有许多方法, 也有较长的历史, 等价性定理 2.1 在其正则性的研究中起着重要的作用. 我们不详细介绍这些方法和结果, 可参见文献 [8–11, 25–27].

应用二: 等价性定理可以帮助我们设计一套关于最优时间和最优控制的算法. 值得指出的是, 在没有等价性帮助的情形下, 很难给出最优时间和最优控制的好算法. Lu 等^[28] 成功地利用等价性定理给出了线性常微分方程最短时间控制问题的最优时间和最优控制的漂亮算法. 相关内容可参见文献 [22].

应用三: 我们介绍如下策略: 第一步, 通过定理 2.1, 将比较难的问题 $(TP)_{y_0}^M$ 转化为比较容易的问题 $(NP)_{y_0}^T$. 第二步, 建立一个适当的泛函使得 $(NP)_{y_0}^T$ 的最优控制可由这个泛函的极小点刻画. 这实质上是 Lions 的对偶方法的一个深化, 在文献 [12, 29] 中有详细的介绍. 第三步, 通过对这个泛函性质的深入研究得到 $(TP)_{y_0}^M$ 问题所需性质. 这一策略在文献 [12] 中首次被提出, 后来被逐步发展 [14–24].

为说明以上策略的效益, 我们考虑具有内部控制的热传导方程. 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界开区域, 其边界 $\partial\Omega$ 光滑; $\omega \subset \Omega$ 为非空开集 (或正可测集); χ_ω 为 ω 的特征函数. 考虑内部控制热传导方程

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = \chi_\omega u, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.1)$$

令 $X = L^2(\Omega)$, $U = L^2(\Omega)$, $A = \Delta$ ($D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$), $B = \chi_\omega$, 则 (3.1) 可以放在 (2.1) 的框架中. 记对应于 (3.1) 的 $(TP)_{y_0}^M$ 和 $(NP)_{y_0}^T$ 为 $(\widehat{TP})_{y_0}^M$ 和 $(\widehat{NP})_{y_0}^T$ (目标集 $S = \{0\} \subset L^2(\Omega)$). 我们希望得到 $(\widehat{TP})_{y_0}^M$ 的最优时间和最优控制的充要条件. 这是用传统研究最优控制的方法无法得到的. 为此, 我们转而研究 $(\widehat{NP})_{y_0}^M$ 问题. 任给 $T > 0$, 定义下列倒向方程:

$$\begin{cases} \varphi_t + \Delta \varphi = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \varphi = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.2)$$

任给 $z \in L^2(\Omega)$, 记 $\varphi(\cdot, T, z)$ 为 (3.2) 的满足末端条件 $\varphi(T) = z$ 的解. 定义 $L^1(0, T; L^2(\omega))$ 的子空间: $X_T \triangleq \{\chi_\omega \varphi(\cdot, T, z) : z \in L^2(\Omega)\}$. 令 Y_T 为 X_T 在范数 $\|\cdot\|_{L^1(0, T; L^2(\omega))}$ 下的完备化空间. 然后在 Y_T 上定义泛函 J_T 如下: $J_T(\chi_\omega \varphi) \triangleq \frac{1}{2}(\|\chi_\omega \varphi\|_{L^1(0, T; L^2(\omega))})^2 + \langle y_0, \varphi(0) \rangle_{L^2(\Omega)}$, $\chi_\omega \varphi \in Y_T$. 可以证明: (i) J_T 有唯一非零极小点 $\chi_\omega \varphi^*$ (这个极小点在 Y_T 中); (ii) $\varphi^* \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^2(\omega))$; (iii) $(NP)_{y_0}^T$ 的唯一的最优控制 v_T^* 可表示为 $v_T^*(t) = N(T, y_0) \frac{\chi_\omega \varphi^*(t)}{\|\chi_\omega \varphi^*\|_{L^1(0, T; L^2(\omega))}}$, $t \in (0, T)$.

由上述关于 J_T 的性质, 我们可以运用定理 2.1 得到 $(TP)_{y_0}^M$ 的最优时间和最优控制的一个充要条件.

定理 3.1 令 $y_0 \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$, $M > \widehat{N}(y_0)$, 则 t^* 和 u^* 为 $(TP)_{y_0}^M$ 的最优时间和最优控制当且仅当 $M = \int_0^{t^*} \|\chi_\omega \varphi^*(t)\|_{L^2(\omega)} dt$, $\langle u^*(t), \chi_\omega \varphi^*(t) \rangle_{L^2(\Omega)} = \max_{v^0 \in B_M(0)} \langle v^0, \chi_\omega \varphi^*(t) \rangle_{L^2(\Omega)}$, $t \in (0, t^*)$, 其中 $\chi_\omega \varphi^*$ 为 J_{t^*} 的唯一极小点, $B_M(0)$ 为 $L^2(\Omega)$ 中以 0 为中心、 M 为半径的闭球.

参考文献

- Wiener N. Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine. Cambridge: MIT Press, 1948
- Tsien H S. Engineering Cybernetics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954
- Pontryagin L S, Boltyanski V G, Gamkrelidze R V, et al. The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York: John Wiley & Sons, 1962
- Bellman R. Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press, 1957
- Kalman R E. On the general theory of control systems. In: Automatic and Remote Control. Proceedings of the First International Congress of the International Federation of Automatic Control (Moscow, 1960). London: Butterworth, 1961, 481–492
- Fattorini H O. Time-optimal control of solutions of operational differential equations. J SIAM Control Ser A, 1964, 2: 54–59
- Fattorini H O. Infinite Dimensional Linear Control Systems: The Time Optimal and Norm Optimal Problems. North-Holland Mathematics Studies, vol. 201. Amsterdam: Elsevier B V, 2005
- Gozzi F, Loreti P. Regularity of the minimum time function and minimum energy problems: The linear case. SIAM J Control Optim, 1999, 37: 1195–1221
- Cârjă O. On the minimal time function for distributed control systems in Banach spaces. J Optim Theory Appl, 1984, 44: 397–406

- 10 Cârjă O. The minimal time function in infinite dimensions. *SIAM J Control Optim*, 1993, 31: 1103–1114
- 11 Gyurkovics E. Hölder condition for the minimum time function of linear systems. In: *System Modelling and Optimization* (Copenhagen, 1983). *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 59. Berlin: Springer, 1984, 383–392
- 12 Wang G, Zuazua E. On the equivalence of minimal time and minimal norm controls for internally controlled heat equations. *SIAM J Control Optim*, 2012, 50: 2938–2958
- 13 Wang G. L^∞ -null controllability for the heat equation and its consequences for the time optimal control problem. *SIAM J Control Optim*, 2008, 47: 1701–1720
- 14 Kunisch K, Wang L. Time optimal control of the heat equation with pointwise control constraints. *ESAIM Control Optim Calc Var*, 2013, 19: 460–485
- 15 Kunisch K, Wang L. Time optimal controls of the linear Fitzhugh-Nagumo equation with pointwise control constraints. *J Math Anal Appl*, 2012, 395: 114–130
- 16 Tucsnak M, Wang G, Wu C. Perturbations of time optimal control problems for a class of abstract parabolic systems. *SIAM J Control Optim*, 2016, 54: 2965–2991
- 17 Yu H. Approximation of time optimal controls for heat equations with perturbations in the system potential. *SIAM J Control Optim*, 2014, 52: 1663–1692
- 18 Yu H. Equivalence of minimal time and minimal norm control problems for semilinear heat equations. *Systems Control Lett*, 2014, 73: 17–24
- 19 Zhang C. The time optimal control with constraints of the rectangular type for linear time-varying ODEs. *SIAM J Control Optim*, 2013, 51: 1528–1542
- 20 Zhang Y. Two equivalence theorems of different kinds of optimal control problems for Schrödinger equations. *SIAM J Control Optim*, 2015, 53: 926–947
- 21 Wang G, Zhang Y. Decompositions and bang-bang properties. *Math Control Relat Fields*, 2017, 7: 73–170
- 22 Qin S, Wang G. Equivalence between minimal time and minimal norm control problems for the heat equation. *SIAM J Control Optim*, 2018, 56: 981–1010
- 23 Wang G, Xu Y, Zhang Y. Attainable subspaces and the bang-bang property of time optimal controls for heat equations. *SIAM J Control Optim*, 2015, 53: 592–621
- 24 Wang G, Wang L, Xu Y, et al. *Time Optimal Control of Evolution Equations. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, vol. 92. Subseries in Control. Cham: Birkhäuser/Springer, 2018
- 25 Cârjă O, Lază A I. On the continuity of the state constrained minimal time function. *Electron J Qual Theory Differ Equ*, 2014, 2014: 1–16
- 26 Durea M, Panțiruc M, Strugariu R. Minimal time function with respect to a set of directions: Basic properties and applications. *Optim Methods Softw*, 2016, 31: 535–561
- 27 Lază A I. On the regularity of the state constrained minimal time function. *An Științ Univ Al I Cuza Iași Mat (NS)*, 2011, 57: 151–160
- 28 Lu X, Wang L, Yan Q. Computation of time optimal control problems governed by linear ordinary differential equations. *J Sci Comput*, 2017, 73: 1–25
- 29 Fabre C, Puel J P, Zuazua E. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1995, 125: 31–61

Equivalence between minimal time control problems and minimal norm control problems

Gengsheng Wang

Abstract This paper presents some of our new developments about the equivalence between time optimal control problems and norm optimal control problems. Besides, several applications of this equivalence are given.

Keywords minimal time control, minimal norm control, equivalence of optimal controls

MSC(2010) 49J20, 93C20

doi: 10.1360/N012018-00026