论 文

具有通信受限的网络控制系统量化反馈控制

祝超群^{①②*}, 郭戈^①^① 大连海事大学信息科学技术学院, 大连 116026^② 兰州理工大学电信学院, 兰州 730050

* 通信作者. E-mail: chaoqunzhu@yeah.net

收稿日期: 2013-09-01; 接受日期: 2013-11-08

国家自然科学基金 (批准号: 61174060, 61273107)、大连市领军人才 (批准号: 841252) 和中央高校基本科研 (批准号: 3132013334) 资助项目

摘要 针对一类通信受限的网络控制系统, 研究量化反馈控制器及动态调度策略的联合设计问题. 考虑到介质访问约束和信号量化误差的影响, 将网络控制系统建模为等价的离散时间切换系统; 通过 Lyapunov 稳定理论推导出保证系统鲁棒稳定的模式及量化依赖型充分条件, 并给出了量化反馈控制器的设计方法; 在此基础上, 设计了基于实时状态的动态通信调度策略, 实现了网络控制系统的镇定控制. 最后通过仿真实例验证了所提出方法的有效性.

关键词 网络控制系统 通信约束 量化反馈 H_∞ 鲁棒控制 动态调度

1 引言

在网络控制系统 (networked control system, NCS) 中, 传感器、控制器和执行器等系统组件通过实时网络进行信息交换. 与传统的控制系统相比, NCS 系统具有低成本, 低功耗, 安装和维护简便以及易于实现远程控制等优点. 因此, NCS 系统在大型工业制造、航空航天和电力系统等领域得到普遍的应用 [1~3]. 由于将网络嵌入到实时控制回路之中, 不可避免地引入了多种通信限制, 如网络传输引起的诱导时延 [4,5]、信道竞争导致的介质访问约束 [6~13]、源于数字网络传送信号的量化误差 [14~19] 以及由于网络的不可靠性产生的丢包现象 [20~22] 等等. 在这些通信约束的基础上, 如何对 NCS 系统进行稳定性分析与控制器综合, 是当前的研究重点.

本文针对存在介质访问约束的 NCS 系统, 研究其中的量化反馈控制器与动态调度策略的联合设计问题. 所谓介质访问约束, 是指由于网络带宽的限制, 在每个控制周期只有部分传感器和执行器能够获得信道与控制器进行数据交换. 此时, NCS 系统的控制综合必须同时兼顾镇定控制器的设计以及确定合理的访问调度策略. Brockett^[6] 首次采用通信序列来描述网络介质的访问顺序, 对具有访问约束的系统进行通信调度. 后来, Zhang^[7] 等通过选择通信序列保持系统的能控和能观性, 借助分离原则实现了一种基于状态观测的反馈控制器设计. 随后, Hristu-Varsakelis^[8] 针对具有通信受限的 NCS 系统, 设计了具有时延补偿的最优状态反馈控制器和通信序列, 解决了此类系统的镇定控制问题. 上述通信序列都局限于周期性的静态序列, 很难适应网络中信息流的时变性, 不利于通信资源的合理利用. 因此, 动态调度策略的研究非常必要. Walsh 等提出了 MEF-TOD 动态调度策略^[10], 指出当多个节点

引用格式: 祝超群, 郭戈. 具有通信受限的网络控制系统量化反馈控制. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 633–646, doi: 10.1360/112012-608

竞争网络信道时, 误差范数最大的节点将获得通信信道. 这种调度策略可应用于具有耦合动态的 NCS 系统, 但所得到的结果过于保守. 近来, Lu^[11] 等基于反馈控制与实时调度理论, 提出了一种静态和动态调度相结合的通信策略. 最近, Guo^[12,13] 等针对控制与通信调度高度耦合的 NCS 系统, 实现了输出反馈控制器与动态调度序列的联合设计. 由于介质访问序列是基于反馈策略在线确定的, 因此可以避免静态调度中出现的问题.

众所周知, 信号量化普遍存在于基于计算机的数字控制系统中. 由于受到量化精度的影响, 不可避免地存在量化误差, 这在很大程度上影响着控制系统性能. 因此, NCS 系统的量化问题受到了广泛地关注^[14~19]. 上世纪中期, Kalman 在采样数据系统中首次考虑量化因素对控制性能的影响, 指出如果控制器采用有限水平的量化器, 那么闭环系统会呈现出极限环和混沌行为^[14]. 近来, Elia^[16] 等采用静态时不变对数量化器, 建立了量化密度与系统不稳定极点的关系, 设计了输出反馈控制器. 然而, 该方法仅适用于单输入单输出系统, 且很难扩展到多输入多输出系统. 随后, 考虑到对数量化器的量化误差是在有界的扇形区域内, Fu 等以系统控制性能为指标对多输入多输出系统进行了量化 H_∞ 反馈控制器的设计^[17]. 由于采用与量化误差无关的定常 Lyapunov 函数, 该方法具有一定的保守性. 最近, 在文献 [17] 的基础上, Gao 等提出了一种新的量化反馈控制系统的分析与综合方法, 借助量化依赖的 Lyapunov 函数, 在一定程度上降低了文献 [17] 的保守性.

以上文献都是将通信网络中的访问约束和信号量化独立起来进行研究, 这在一定程度上降低了问题的复杂性. 在网络控制实践中, 这两种通信约束往往都是同时存在的. 控制信号在传输之前, 需要经过量化器进行量化. 量化后的控制信号在传输过程中, 由于网络带宽有限, 只有部分控制信号能够被送到执行器执行. 如何针对访问约束和信号量化共存的 NCS 系统进行稳定性分析与控制器综合, 值得深入研究.

本文针对存在介质访问约束的 NCS 系统, 提出了一种新的量化反馈控制器与动态调度策略联合设计方法. 考虑到介质访问约束和信号量化误差的影响, 将网络控制系统建模为等价的离散时间切换系统, 通过 Lyapunov 稳定理论推导出保证系统鲁棒稳定的模式及量化依赖型充分条件, 并给出了量化反馈控制器的设计方法; 在此基础上, 设计了基于实时状态的动态通信调度策略, 实现了 NCS 系统的镇定控制.

2 系统描述

NCS 系统结构如图 1 所示. 被控对象的状态方程为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k) + D\omega(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^r$ 分别表示系统的状态、输入和输出; $\omega \in \mathbb{R}^d$ 是外界的未知扰动输入, 且满足 $\sum_0^\infty \omega^T(k)\omega(k) < \infty$; A, B, C, D 分别是适维常阵; ΔA 和 ΔB 是反映系统参数不确定性的未知常阵, 假设它们是范数有界的, 且有

$$[\Delta A \quad \Delta B] = HF(k)[E_1 \quad E_2],$$

其中, $H \in \mathbb{R}^{n \times \alpha}$; $F(k) \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ 是一个满足 $F^T(k)F(k) \leq I$ 的时变矩阵; $E_1 \in \mathbb{R}^{\beta \times n}$ 和 $E_2 \in \mathbb{R}^{\beta \times m}$ 分别是已知的适维常阵.

图 1 网络化控制系统结构

Figure 1 A basic NCS configuration

在 NCS 系统中, 被控对象通过共享网络与控制器进行连接. 由于网络通信资源的限制, 在控制器与被控对象之间存在着信号量化和介质访问约束. 为了简化问题, 假设系统状态是直接可量测的, 传感器与控制器之间不存在任何通信约束.

假设系统中的控制律由状态反馈给出, 即

$$v(k) = K(M_\rho^{(s)})x(k), \quad (2)$$

式中, $K(M_\rho^{(s)})$ 为待定的状态反馈矩阵. 采用的量化器 $f(\cdot)$ 为对数静态时不变型量化器, 结构如图 2 所示. 则相应的量化状态反馈为

$$\bar{u}(k) = f(v(k)) = [f_1(v_1(k)) \quad f_2(v_2(k)) \quad \cdots \quad f_m(v_m(k))]^T, \quad (3)$$

其中, 对数量化器 $f(\cdot)$ 满足对称性, 即 $f_i(-v_i) = -f_i(v_i)$, $i = 1, \dots, m$. 相应的量化级集合为

$$U_i = \{\pm u_l^{(i)}, u_l^{(i)} = \sigma_i^l u_0^{(i)}, l = \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{\pm u_0^{(i)}\} \cup \{0\},$$

其中, $u_0^{(i)} > 0$; σ_i 是与量化密度相关的一个参数, 一般称其为量化密度^[17], 且有 $0 < \sigma_i < 1$. 集合 U_i 将空间 $\mathbb{R}$ 分成一系列片段, 量化器函数 $f_i(v)$ 将每个片段映射成 U_i 的一个元素. 对数量化器 $f_i(\cdot)$ 的映射关系满足

$$f_i(v_i) = \begin{cases} u_l^{(i)}, & \frac{1}{1+\delta_i}u_l^{(i)} < v_i \leq \frac{1}{1-\delta_i}u_l^{(i)}, v_i > 0, \\ 0, & v_i = 0, \\ -f_i(-v_i), & v_i < 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\delta_i = (1 - \sigma_i)/(1 + \sigma_i)$. 则量化器的量化误差可定义为

$$e(k) = \bar{u}(k) - v(k) = f\left(K\left(M_\rho^{(s)}\right)x(k)\right) - K\left(M_\rho^{(s)}\right)x(k) = \Lambda(k)K\left(M_\rho^{(s)}\right)x(k), \quad (5)$$

其中,

$$\Lambda(k) = \text{diag}\left\{\Lambda_1(k), \Lambda_2(k), \dots, \Lambda_m(k)\right\} \quad (6)$$

图 2 对数量化器

Figure 2 Logarithmic quantizer

为量化误差矩阵. 由 (4) 式可知, $\Lambda_i(k) \in [-\delta_i, \delta_i]$. 也就是说, 矩阵 $\Lambda(k)$ 的每一个对角线元素都在区间 $[-\delta_i, \delta_i]$ 内任意取值. 因此, (6) 式可重新表示如下

$$\Lambda(k) = \sum_{w=1}^{N_1} \lambda_w(k) \Lambda^{(w)}, \lambda_w(k) \geq 0, \sum_{w=1}^{N_1} \lambda_w(k) = 1,$$

其中, $N_1 = 2^m$; $\Lambda^{(w)}$ 是元素为 $-\delta_i$ 或 δ_i 的对角矩阵. 所有 N_1 个 $\Lambda^{(w)}$ 矩阵合并后组成 $\Lambda(k)$. 则量化后的控制信号 $\bar{u}(k)$ 可表示为

$$\bar{u}(k) = (I + \Lambda(k)) K \left(M_\rho^{(s)} \right) x(k).$$

考虑到网络的介质访问约束, 定义二值调度函数 $\rho_i(k)$, 用来表示 k 时刻执行器 i 的介质访问状态. 当 $\rho_i(k) = 1$ 时, $u_i(k) = \bar{u}_i(k)$. 表示在 k 时刻给执行器 i 分配了通信信道, 控制信息获得更新; 当 $\rho_i(k) = 0$ 时, $u_i = 0$. 表示执行器 i 没有获得网络的访问权. 则执行器在 k 时刻的介质访问状态可用调度矩阵

$$M_\rho(k) = \text{diag} \left\{ \rho_1(k), \rho_2(k), \dots, \rho_m(k) \right\}$$

来表示. 由调度矩阵的定义可知

$$M_\rho(k) \in \left\{ M_\rho^{(s)}, s = 1, \dots, N_2, N_2 = C_m^p \right\},$$

其中, $M_\rho^{(s)}$ 为第 s 组执行器获得信道时的调度矩阵. 经过网络传输后, 可得

$$u(k) = M_\rho(k) \bar{u}(k) = M_\rho(k) (I + \Lambda(k)) K \left(M_\rho^{(s)} \right) x(k). \quad (7)$$

综合考虑信号量化和介质访问约束的影响, 以 $u(k)$ 作为被控系统的控制输入, 可得闭环系统动态为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + \Delta A) x(k) + (B + \Delta B) M_\rho(k) \sum_{w=1}^{N_1} \lambda_w(k) (I + \Lambda^{(w)}) \times K \left(M_\rho^{(s)} \right) x(k) + D\omega(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (8)$$

不考虑外界扰动的影响, 即 $\omega(k) = 0$ 时, 有

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)M_\rho(k) \sum_{w=1}^{N_1} \lambda_w(k) \left(I + \Lambda^{(w)}\right) \times K \left(M_\rho^{(s)}\right) x(k). \quad (9)$$

显然, 此时系统 (8) 等价于具有 N_2 个动态的切换系统. 定义一个映射 $s(k) : \mathbb{R} \mapsto \{1, \dots, N_2\}$, 可得

$$x(k+1) = A_{s(k)}x(k), \quad (10)$$

其中, $s(k)$ 为切换规则. $A_{s(k)}$ 从集合 $\{A_s : s = 1, \dots, N_2\}$ 中取值, 且有

$$A_s = (A + \Delta A) + (B + \Delta B)M_\rho^{(s)} \sum_{w=1}^{N_1} \lambda_w(k) \left(I + \Lambda^{(w)}\right) K \left(M_\rho^{(s)}\right).$$

为了便于对切换系统进行描述, 定义有限集 $\Omega_1 = \{1, 2, \dots, N_1\}$, $\Omega_2 = \{1, 2, \dots, N_2\}$ 以及一个子系统激活函数 $\xi(k) = [\xi_1(k), \dots, \xi_{N_2}(k)]$, 其中,

$$\xi_s(k) = \begin{cases} 1, & \text{选择第 } s \text{ 组执行器,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad s \in \Omega_2. \quad (11)$$

由 (11) 式可知, $\sum_{s=1}^{N_2} \xi_s(k) = 1$, 也就是说, 在每一个控制周期内, 只有一组执行器被激活. 则 (9) 式可表示为

$$x(k+1) = A(\xi(k))x(k), \quad (12)$$

其中, $A(\xi(k)) = \sum_{s=1}^{N_2} \xi_s(k) A_s$.

3 主要结果

本节对系统进行稳定性分析以及 H_∞ 鲁棒控制器的设计. 在下文中, 分别用 $N, M_s, K_s, G_{sw}, F_{sw}, P_{sw}$ 来表示 $N_1 \times N_2, M_\rho^{(s)}, K(M_\rho^{(s)}), G(M_\rho^{(s)}, \Lambda^{(w)}), F(M_\rho^{(s)}, \Lambda^{(w)})$ 和 $P(M_\rho^{(s)}, \Lambda^{(w)})$. 为了得出保证系统 (8) 鲁棒稳定的模式及量化依赖型充分条件, 下面先给出一个必要的引理 [23].

引理 1 给定适当维数矩阵 $Q = Q^T, H, E$ 和 $R = R^T > 0$, 则

$$Q + LSE + E^T S^T L^T < 0.$$

对所有满足 $F^T F \leq R$ 的矩阵 F 成立, 当且仅当存在一个标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Q + \varepsilon LL^T + \varepsilon^{-1} E^T R E < 0.$$

定义 1 对于闭环系统 (8), 当 $\omega(k) = 0$ 时, 如果存在通信调度矩阵 $M_\rho(k)$, 对数静态时不变量化器 $f(\cdot)$ 以及一个允许的控制序列 $v(k)$, 使得对于任意初值的 x_0 , 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 都有 $x(k) = 0$, 则称该系统是渐近稳定的.

定义 2 对于闭环系统 (8), 如果该系统是渐近稳定的, 并且存在一个标量 $\gamma > 0$, 在零初始条件下满足

$$\gamma^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} y^2(k) < \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \omega^2(k), \quad \forall \sum_{k=0}^{\infty} \omega^2(k) > 0,$$

则称该系统为扰动抑制度为 γ 的 H_∞ 鲁棒稳定.

3.1 不考虑外界扰动的情形

定理 1 考虑闭环系统 (8) 以及量化状态反馈 (7), 假设所用量化器 $f(\cdot)$ 为对数时不变型量化器. 当 $\omega(k) = 0$ 时, 若存在 N 个正定矩阵 $F_{sw} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $G_{sw} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 以及标量 $\varepsilon_s > 0$, 其中, $w, q \in \Omega_1$, $s, p \in \Omega_2$, 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} F_{sw} - G_{sw} - G_{sw}^T & \Pi_{12} & 0 & \Pi_{14} \\ * & -F_{pq} & \varepsilon_s H & 0 \\ * & * & -\varepsilon_s I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_s I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

其中, $\Pi_{12} = G_{sw}^T A^T + G_{sw}^T K_s^T (I + \Lambda^{(w)})^T M_s^T B^T$, $\Pi_{14} = G_{sw}^T E_1^T + G_{sw}^T K_s^T (I + \Lambda^{(w)})^T M_s^T E_2^T$. 则闭环系统 (8) 渐近稳定.

证明 定义 Lyapunov 函数为

$$V(x(k), k) = x^T(k) P(\xi(k)) x(k), \quad (14)$$

其中, $P(\xi(k)) = \sum_{w=1}^{N_1} \lambda_w(k) \sum_{s=1}^{N_2} \xi_s P_{sw}$, $P_{sw} = F_{sw}^{-1}$. 显然对于任意 $x(k) \neq 0$, $V(x(k), k)$ 是正定的. 若闭环系统 (8) 是渐近稳定的, 沿闭环系统 (8) 的任意轨线, $V(x(k), k)$ 的前向差分为

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(x(k+1), k+1) - V(x(k), k) \\ &= x^T(k+1) P(\xi(k+1)) x(k+1) - x^T(k) P(\xi(k)) x(k) < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

假设 (13) 式成立. 对 (13) 式应用 Schur 补引理, 可得

$$Q + \varepsilon_s L L^T + \varepsilon_s^{-1} E^T R E < 0, \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} F_{sw} - G_{sw} - G_{sw}^T & \Pi_{12} \\ * & -F_{pq} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix}, \\ E &= \begin{bmatrix} E_1 G_{sw} + E_2 M_s (I + \Lambda^{(w)}) K_s G_{sw} & 0 \end{bmatrix}, \quad R = I. \end{aligned}$$

取 $S = F$, 显然, $S^T S \leq I$. 由引理 1 可知, (16) 式等价于

$$Q + L S E + E^T S^T L^T < 0, \quad (17)$$

将矩阵 Q, L, E, S 代入 (17) 式, 可得

$$\begin{bmatrix} F_{sw} - G_{sw} - G_{sw}^T & G_{sw}^T \bar{A}_s^T \\ * & -F_{pq} \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

其中, $\bar{A}_s = (A + \Delta A) + (B + \Delta B) M_s (I + \Lambda^{(w)}) K_s$. 假设存在矩阵 $F_{sw} > 0$, G_{sw} 满足 (13) 式. 则有

$$(G_{sw} - F_{sw})^T F_{sw}^{-1} (G_{sw} - F_{sw}) \geq 0,$$

即

$$-G_{\text{sw}}^T F_{\text{sw}}^{-1} G_{\text{sw}} \leq F_{\text{sw}} - G_{\text{sw}}^T - G_{\text{sw}}. \quad (19)$$

将 (19) 式代入 (18) 式, 可得

$$\begin{bmatrix} -G_{\text{sw}}^T F_{\text{sw}}^{-1} G_{\text{sw}} & G_{\text{sw}}^T \bar{A}_s^T \\ * & -F_{\text{pq}} \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

显然, (20) 式等价于

$$\begin{bmatrix} G_{\text{sw}}^T & 0 \\ 0 & F_{\text{pq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_{\text{sw}}^{-1} & \bar{A}_s^T F_{\text{pq}}^{-1} \\ * & -F_{\text{pq}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{\text{sw}} & 0 \\ 0 & F_{\text{pq}} \end{bmatrix} < 0.$$

令 $P_{\text{sw}} = F_{\text{sw}}^{-1}$, $P_{\text{pq}} = F_{\text{pq}}^{-1}$, 可得

$$\begin{bmatrix} -P_{\text{sw}} & \bar{A}_s^T P_{\text{pq}} \\ * & -P_{\text{pq}} \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

在 $k+1$ 时刻, 可知 (21) 式对任意 $q \in \Omega_1$, $p \in \Omega_2$ 都成立. 当 $q = 1, 2, \dots, N_1$ 时, 给这组不等式两边同乘以 $\lambda_q(k+1)$; 当 $p = 1, 2, \dots, N_2$ 时, 给这组不等式两边同乘以 $\xi_p(k+1)$. 考虑到 $\sum_{q=1}^{N_1} \lambda_q(k+1) = 1$ 以及 $\sum_{p=1}^{N_2} \xi_p(k+1) = 1$, 将以上 N 个不等式求和, 可得

$$\begin{bmatrix} -P_{\text{sw}} & \bar{A}_s^T P(\xi(k+1)) \\ * & -P(\xi(k+1)) \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

其中, $P(\xi(k+1)) = \sum_{q=1}^{N_1} \lambda_q(k+1) \sum_{p=1}^{N_2} \xi_p P_{\text{pq}}$. 当 $w = 1, 2, \dots, N_1$ 时, 给这组不等式两边同乘以 $\lambda_w(k)$; 当 $s = 1, 2, \dots, N_2$ 时, 给这组不等式两边同乘以 $\xi_s(k)$. 将这 N 个不等式求和, 可得

$$\begin{bmatrix} -P(\xi(k)) & A^T(\xi(k))P(\xi(k+1)) \\ * & -P(\xi(k+1)) \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

对 (23) 式应用 Schur 补引理, 可得

$$A^T(\xi(k))P(\xi(k+1))A(\xi(k)) - P(\xi(k)) < 0. \quad (24)$$

显然, (24) 式保证了 (15) 式成立.

在稳定性分析的基础上, 接下来对闭环系统 (8) 进行鲁棒控制器的设计.

定理 2 考虑闭环系统 (8) 以及量化状态反馈 (7), 假设所用量化器 $f(\cdot)$ 为对数时不变型量化器. 当 $\omega(k) = 0$ 时, 若存在 N 个正定矩阵 $F_{\text{sw}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, N_2 个矩阵 $G_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V_s \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 以及标量 $\varepsilon_s > 0$, 其中, $w, q \in \Omega_1$, $s, p \in \Omega_2$, 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} F_{\text{sw}} - G_s - G_s^T & \bar{\Pi}_{12} & 0 & \bar{\Pi}_{14} \\ * & -F_{\text{pq}} & \varepsilon_s H & 0 \\ * & * & -\varepsilon_s I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_s I \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

其中, $\bar{\Pi}_{12} = G_s^T A^T + V_s^T (I + \Lambda^{(w)})^T M_s^T B^T$, $\bar{\Pi}_{14} = G_s^T E_1^T + V_s^T (I + \Lambda^{(w)})^T M_s^T E_2^T$. 并且, (7) 式中的状态反馈为

$$K_s = V_s G_s^{-1}, \quad (26)$$

则闭环系统 (8) 渐近稳定.

证明 令 (13) 式中的 $G_{sw} = G_s$, 其中, $w = 1, 2, \dots, N_1$. 可以看到, 矩阵变量 G_s 和 K_s 以非线性的形式出现. 采用变量替代法消去非线性项, 定义 $V_s = K_s G_s$, 即可从 (13) 式得到 (25) 式. 由定理 1 可知命题成立.

3.2 考虑外界扰动的情形

存在未知外界扰动时, 为闭环系统 (8) 进行稳定性分析, 并且设计扰动抑制度为 γ 的 H_∞ 鲁棒控制器.

定理 3 考虑闭环系统 (8) 以及量化状态反馈 (7), 假设所用量化器 $f(\cdot)$ 为对数时不变型量化器. 对于给定的标量 $\gamma > 0$, 若存在 N 个正定矩阵 $F_{sw} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $G_{sw} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 以及标量 $\varepsilon_s > 0$, 其中, $w, q \in \Omega_1, s, p \in \Omega_2$, 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} F_{sw} - G_{sw} - G_{sw}^T & 0 & \tilde{\Pi}_{13} & G_{sw}^T C^T & 0 & \tilde{\Pi}_{16} \\ * & -\gamma I & D^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -F_{pq} & 0 & \varepsilon_s H & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_s I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_s I \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

其中, $\tilde{\Pi}_{13} = G_{sw}^T A^T + G_{sw}^T K_s^T (I + \Lambda^{(w)})^T M_s^T B^T$, $\tilde{\Pi}_{16} = G_{sw}^T E_1^T + G_{sw}^T K_s^T (I + \Lambda^{(w)})^T M_s^T E_2^T$. 则闭环系统 (8) 为扰动抑制度为 γ 的 H_∞ 鲁棒稳定.

证明 定义 Lyapunov 函数为

$$V(x(k), k) = x^T(k) P(\xi(k)) x(k), \quad (28)$$

其中, $P(\xi(k)) = \sum_{w=1}^{N_1} \lambda_w(k) \sum_{s=1}^{N_2} \xi_s P_{sw}$, $P_{sw} = F_{sw}^{-1}$. 如果要求闭环系统 (8) 具有 γ 性能的 H_∞ 鲁棒稳定, 则要满足

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(x(k+1), k+1) - V(x(k), k) + \gamma^{-1} \|y(k)\|^2 - \gamma \|\omega(k)\|^2 \\ &= x^T(k+1) P(\xi(k+1)) x(k+1) - x^T(k) P(\xi(k)) x(k) + \gamma^{-1} \|y(k)\|^2 - \gamma \|\omega(k)\|^2 < 0. \end{aligned} \quad (29)$$

将 (12) 式代入 (29) 式, 可得

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{11} & \hat{\Pi}_{12} \\ * & \hat{\Pi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

其中, $\hat{\Pi}_{11} = A^T(\xi(k))P(\xi(k+1))A(\xi(k)) - P(\xi(k)) + \gamma^{-1}C^TC$, $\hat{\Pi}_{12} = A^T(\xi(k))P(\xi(k+1))D$, $\hat{\Pi}_{22} = D^TP(\xi(k+1))D - \gamma I$. 显然, (30) 式等价于

$$\begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{11} & \hat{\Pi}_{12} \\ * & \hat{\Pi}_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

对 (31) 式应用 Schur 补引理, 可得

$$\begin{bmatrix} -P(\xi(k)) & 0 & A^T(\xi(k))P(\xi(k+1)) & C^T \\ * & -\gamma I & D^TP(\xi(k+1)) & 0 \\ * & * & -P(\xi(k+1)) & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (32)$$

假设 (27) 式成立, 对 (27) 式应用 Schur 补引理, 可得

$$Q + \varepsilon_s LL^T + \varepsilon_s^{-1} E^T R E < 0, \quad (33)$$

其中,

$$Q = \begin{bmatrix} F_{sw} - G_{sw} - G_{sw}^T & 0 & \tilde{\Pi}_{13} & G_{sw}^T C^T \\ * & -\gamma I & D^T & 0 \\ * & * & -F_{pq} & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E = [E_1 G_{sw} + E_2 M_s(I + \Lambda^{(w)})K_s G_{sw} \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad R = I.$$

对 (33) 式应用引理 1, 整理后可得

$$\begin{bmatrix} F_{sw} - G_{sw} - G_{sw}^T & 0 & G_{sw}^T \bar{A}_s^T & G_{sw}^T C^T \\ * & -\gamma I & D^T & 0 \\ * & * & -F_{pq} & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (34)$$

对 (34) 式进行合同变换, 两边同乘以 $\text{diag}\{I, \gamma^{-1}I, I, \gamma^{-1}I\}$, 可得

$$\begin{bmatrix} F_{sw} - G_{sw} - G_{sw}^T & 0 & G_{sw}^T \bar{A}_s^T & \gamma^{-1}G_{sw}^T C^T \\ * & -\gamma^{-1}I & \gamma^{-1}D^T & 0 \\ * & * & -F_{pq} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^{-1}I \end{bmatrix} < 0. \quad (35)$$

假设存在矩阵 $F_{sw} > 0$, G_{sw} 满足式 (27). 则有

$$-G_{sw}^T F_{sw}^{-1} G_{sw} \leq F_{sw} - G_{sw}^T - G_{sw}. \quad (36)$$

将 (36) 式代入 (35) 式, 可得

$$\begin{bmatrix} -G_{\text{sw}}^T F_{\text{sw}}^{-1} G_{\text{sw}} & 0 & G_{\text{sw}}^T \bar{A}_s^T & \gamma^{-1} G_{\text{sw}}^T C^T \\ * & -\gamma^{-1} I & \gamma^{-1} D^T & 0 \\ * & * & -F_{\text{pq}} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

显然, (37) 式等于

$$\begin{bmatrix} G_{\text{sw}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\text{pq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^{-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_{\text{sw}}^{-1} & 0 & \bar{A}_s^T F_{\text{pq}}^{-1} & C^T \\ * & -\gamma I & D^T F_{\text{pq}}^{-1} & 0 \\ * & * & -F_{\text{pq}}^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_{\text{sw}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\text{pq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (38)$$

令 $P_{\text{sw}} = F_{\text{sw}}^{-1}$, $P_{\text{pq}} = F_{\text{pq}}^{-1}$, 可得

$$\begin{bmatrix} -P_{\text{sw}} & 0 & \bar{A}_s^T P_{\text{pq}} & C^T \\ * & -\gamma I & D^T P_{\text{pq}} & 0 \\ * & * & -P_{\text{pq}} & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (39)$$

采用与 (22)~(23) 式类似的步骤可得 (32) 式.

定理 4 考虑闭环系统 (8) 以及量化状态反馈 (7), 假设所用量化器 $f(\cdot)$ 为对数时不变型量化器. 对于给定的标量 $\gamma > 0$, 若存在 N 个正定矩阵 $F_{\text{sw}} \in R^{n \times n}$, N_2 个矩阵 $G_s \in R^{n \times n}$, $V_s \in R^{m \times n}$ 以及标量 $\varepsilon_s > 0$, 其中, $w, q \in \Omega_1$, $s, p \in \Omega_2$, 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} F_{\text{sw}} - G_s - G_s^T & 0 & \check{\Pi}_{13} & G_s^T C^T & 0 & \check{\Pi}_{16} \\ * & -\gamma I & D^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -F_{\text{pq}} & 0 & \varepsilon_s H & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_s I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_s I \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

其中, $\check{\Pi}_{13} = G_s^T A^T + V_s^T (I + \Lambda^{(w)})^T M_s^T B^T$, $\check{\Pi}_{16} = G_s^T E_1^T + V_s^T (I + \Lambda^{(w)})^T M_s^T E_2^T$. 并且, (7) 式中的状态反馈为

$$K_s = V_s G_s^{-1}, \quad (41)$$

则闭环系统 (8) 渐近稳定.

证明 考虑矩阵不等式 (27), 当 $w \in \Omega_1$ 时, 令 $G_{\text{sw}} = G_s$, 并且定义 $V_s = K_s G_s$, 即可从 (27) 式得到 (40) 式. 由定理 3 可知命题成立.

3.3 动态调度策略的设计

在完成了量化反馈控制器的设计后, 闭环系统 (12) 等价于一个典型的离散时间切换系统. 如何在这个切换系统的基础上进行动态调度策略的设计, 以保证闭环系统满足特定的性能需求, 是本小节要完成的任务.

显然, 切换系统 (12) 的系统矩阵 $A(\xi(k))$ 随着量化误差的变化存在一定程度的摄动, 摄动的幅度与量化密度的大小成反比例. 因此, 在每个控制周期内, $A(\xi(k))$ 都具有不同的值. 由 H_∞ 鲁棒控制器的设计过程可知, 闭环系统 (12) 能够满足任意切换条件下系统的稳定. 为了使系统状态以最快的速度回到平衡点, 根据最小投影策略^[24] 来确定下一个控制周期所使用的通信序列. 定义切换规则

$$s(k) = \arg \min_{s \in [1, 2, \dots, N_2]} \|x^T(k) \xi_s(k) A_s x(k)\|, \forall k \in [0, 1, \dots, k_f], \quad (42)$$

切换规则 (42) 可以根据系统状态动态地确定通信调度矩阵, 在控制过程的每一步都保证了系统状态获得最快的收敛速度. 也就是说, 该切换规则能使状态在最短时间内收敛到平衡点, 从而获得最优的系统性能.

本文的提出的量化反馈控制器与动态调度策略的协同设计方法, 在执行子系统切换时, 无须划分状态切换区域. 消除了文献 [12] 在处理高维系统时出现的状态区域划分障碍, 在仿真的过程中更加易于实施.

4 仿真算例

为了验证文中所给出方法的有效性, 下面给出相应的仿真算例. 考虑具有如下参数的线性离散时不变系统

$$A = \begin{bmatrix} -0.5420 & -0.2424 \\ 0.3972 & -0.3218 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1.2023 & 3.1142 \\ 0.7875 & -1.7012 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.3238 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.7532 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.5620 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9545 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$F(k) = \begin{bmatrix} \sin(0.5 * k) & 0 \\ 0 & \cos(0.5 * k) \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2500 \end{bmatrix}.$$

选择对数量化器 (4) 的量化参数 $u_0^{(1)} = u_0^{(2)} = 10$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.6667$, 则有 $\delta_1 = \delta_2 = 0.2$. 假设在任意时刻 k , 控制器与执行器之间只有一个通信信道, 相应的通信调度矩阵为

$$M_\rho^{(1)} = \text{diag}\{1, 0\}, \quad M_\rho^{(2)} = \text{diag}\{0, 1\}.$$

根据定理 2, 利用 LMI 工具箱求解 (25)~(26) 式可得如下控制器增益

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.6278 & 0.0419 \\ -0.2486 & 0.1102 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.1527 & 0.5453 \\ 0.2491 & -0.0094 \end{bmatrix}.$$

图 3 (网络版彩图) 状态轨迹
Figure 3 (Color online) State evolution

图 4 (网络版彩图) 输入通信序列
Figure 4 (Color online) Input communication sequence

图 5 (网络版彩图) 控制输出量化误差
Figure 5 (Color online) Quantized error of control values

图 6 (网络版彩图) H_∞ 性能下状态轨迹
Figure 6 (Color online) State evolution showing H_∞ performance

选择系统初始状态为 $x(0) = [3 \ -2]^T$. 在控制器 (26) 的作用之下, 闭环系统 (8) 的状态轨迹和动态通信序列分别如图 3 和图 4 所示. 从图 3 中可以看出, 相应的闭环系统是渐近稳定的. 控制器输出的量化误差如图 5 所示.

接下来对闭环系统的 H_∞ 扰动抑制能力进行验证. 假设在零初始条件下, 即 $x(0) = [0 \ 0]^T$, 且外界干扰信号输入为

$$\omega(k) = \begin{cases} \sin(0.25 * (k - 10)), & 15 \leq k \leq 35, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (43)$$

根据定理 3, 可得最优扰动抑制度 $\gamma_{\min} = 1.7489$. 相应的 H_∞ 控制器增益为

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.6292 & 0.0444 \\ -0.1029 & 0.0422 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.0678 & 0.4097 \\ 0.2542 & -0.0175 \end{bmatrix}.$$

此时的状态曲线如图 6 所示.

5 结论

本文针对存在通信受限的 NCS 系统, 研究了其中的量化反馈控制器与动态通信调度策略的联合设计问题. 在此类 NCS 系统中, 控制器输出经过量化后才可以通过网络传输. 而且由于网络资源的限制, 在每个控制周期中, 只有部分控制信号能够被传送到执行器执行, 未获得信道的控制信号被设置为零值. 在这些通信约束的基础上, 首先借助调度矩阵和扇形界限法将 NCS 系统建模为等价的切换系统; 然后, 基于 Lyapunov 稳定理论推导出保证系统鲁棒镇定的模式及量化依赖型充分条件, 并设计了任意切换稳定的量化反馈控制器; 最后, 根据最小时间原则动态地确定通信调度策略, 实现了 NCS 系统的镇定控制. 仿真结果表明, 本文所提出的方法是有效的.

参考文献

- 1 Hespanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Y G. A survey of recent results in networked control systems. *P IEEE*, 2007, 95: 138–162
- 2 Yue D, Han Q L, Peng C. State feedback controller design of networked control systems. *IEEE Trans Circuits-II*, 2004, 51: 640–644
- 3 Rehbindler H, Sanfridson M. Scheduling of a limited communication channel for optimal control. *Automatica*, 2004, 40: 491–500
- 4 Gao H J, Chen T W. A new delay system approach to network-based control. *Automatica*, 2008, 44: 39–52
- 5 Martins E C, Jota F G. Design of networked control systems with explicit compensation for time-delay variations. *IEEE Trans Syst Man Cy C*, 2010, 43: 308–318
- 6 Brockett R W. Stabilization of motor networks. In: *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, 1995. 1484–1488
- 7 Zhang L, Hristu-Varsakelis D. Communication and control co-design for networked control systems. *Automatica*, 2006, 42: 953–958
- 8 Hristu-Varsakelis D. Short-period communication and the role of zero-order holding in networked control systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2008, 53: 1285–1290
- 9 Walsh G, Ye H. Scheduling of networked control systems. *IEEE Control Syst Mag*, 2001, 21: 57–65
- 10 Hristu-Varsakelis D, Kumar P R. Interrupt-based feedback control over a shared communication medium. In: *Proceedings of Decision and Control*, Las Vegas, 2002. 3223–3328
- 11 Lu Z B, Guo G. Communications and control co-design: a combined dynamic-static scheduling approach. *Sci China Inf Sci*, 2012, 55: 2495–2507
- 12 Guo G, Jin H. A switching system approach to actuator assignment with limited channels. *Int J Robust Nonlin*, 2010, 20: 1407–1426
- 13 Guo G. A switching system approach to sensor and actuator assignment for stabilization via limited multi-packet transmitting channels. *Int J Control*, 2011, 84: 78–93
- 14 Kalman R E. Nonlinear aspects of sampled-data control systems. In: *Proceedings of Symposium Nonlinear Circuit Theory*, Brooklyn, 1956. 273–313
- 15 Brockett R W, Liberzon D. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2000, 45: 1279–1289
- 16 Elia N, Mitter K. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Trans Autom Control*, 2001, 46: 1384–1400
- 17 Fu M Y, Xie L H. The sector bound approach to quantized feedback control. *IEEE Trans Autom Control*, 2005, 50: 1698–1711
- 18 Gao H, Chen T W. A new approach to quantized feedback control systems. *Automatica*, 2008, 44: 534–542
- 19 Fu M Y, de Souza C E. State estimation for linear discrete-time systems using quantized measurements. *Automatica*, 2009, 45: 2937–2945

- 20 Smith S C, Seiler P. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2003, 48: 2163–2171
- 21 Seiler P, Sengupta R. An H_∞ approach to networked control. *IEEE Trans Autom Control*, 2005, 50: 356–364
- 22 Xu H, Jagannathan S, Lewis F L. Stochastic optimal control of unknown linear networked control system in the presence of random delays and packet losses. *Automatica*, 2012, 48: 1017–1030
- 23 Xie L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. *Int J Control*, 1996, 63: 741–750
- 24 Pettersson S, Lennartson B. Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy. In: *Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, 2001. 223–228

Quantized feedback control of networked systems with constrained communication capacity

ZHU ChaoQun^{1,2*} & GUO Ge¹

1 *School of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China;*

2 *School of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China*

*E-mail: chaoqunzhu@yeah.net

Abstract This paper is concerned with the joint design of quantized feedback control and dynamic scheduling for networked control systems with constrained communication capacity. A new discrete-time switched system is proposed to the networked control system subject to both communication constraints and input quantization. By using Lyapunov stability theory, sufficient conditions of mode- and quantization-dependent robust stabilization and a quantized feedback controller are derived for networked control system. Based on the model of switched system, a dynamic scheduling policy is designed to guarantee the asymptotic stability of close-loop system. An illustrative example is finally given to show the effectiveness of the proposed method.

Keywords networked control system, communication constraints, quantized feedback, H-infinity robust control, dynamic scheduling

ZHU ChaoQun was born in 1977. He received the Ph.D. degree in Control Theory and Control Engineering from the Dalian Maritime University, Dalian, in 2013. Currently, he is a lecturer of Lanzhou University of Technology. His research interests include networked control systems theory, and autonomous vehicle and mobile robot control.

GUO Ge was born in 1972. He received the B.E. and Ph.D. degrees, in Automatic Instrument and Equipment and in Control Theory & Control Engineering, respectively, from Northeastern University, Shenyang, in 1994 and 1998. Currently, he is a professor of Dalian Maritime University. His research interests include networked control system theory, autonomous vehicle and mobile robot control, and process control. He is the Editor-in-Chief of *International Journal of Systems, Control and Communications*, an Associate editor of *Information Sciences* and an Editorial Board Member *Journal of Dalian Maritime University*.