

# 关于 $U$ -统计量和 Von-Mises 统计量的极限性质

陈 希 孺

(中国科技大学数学系)

## 摘 要

本文在核的  $r$  阶矩 ( $r \geq 1$ ) 有限的条件下, 获得了  $U$ -统计量的  $r$  阶矩的数量级. 利用这个结果, 完全解决了在上述条件下  $U$ -统计量的  $a. e.$  收敛速度问题. 另一方面, 在核的上述假定下得出了  $U$ -统计量和 Von-Mises 统计量的联系公式, 并解决了 Von-Mises 统计量的收敛速度问题. 特别, 在三阶矩有限的条件下建立了 Von-Mises 统计量的 Berry-Esseen 界限.

本文目的是在核的  $r$  阶矩 ( $r \geq 1$  不必为整数) 有限的条件下, 讨论  $U$ -统计量的极限性质. 迄今为止有关  $U$ -统计量的工作, 多是在核的一、二、三阶矩有限的条件下进行的(中心极限定理、Berry-Esseen 界限、重对数律、不变原理、强大数律等). 这些研究结果是  $U$ -统计量与 iid. (独立同分布) 变量的算术均值很相似. 自然要问: 这种相似性是否能推广到一些目前尚未加以研究的情况下. 本文对此作了肯定的回答. 以上提到的许多结果, 以及本文的结果, 给人以强烈的印象, 即在这个问题上可以作的工作还很多.

本文的另一方面是讨论与  $U$ -统计量密切关联的, 所谓 Von-Mises 统计量的大样本性质, 同样是在核的  $r$  阶矩存在的条件下进行的. 我们将证明, 对目前的一些研究成果, 凡是对  $U$ -统计量成立的大样本性质, 对 Von-Mises 统计量一般也成立. 特别是, 解决了关于这种统计量的 Berry-Esseen 界限的问题.

## 一、 $U$ -统计量的 $r$ 阶矩

设  $U_n$  是以  $\varphi(x_1, \dots, x_m)$  为核的  $U$ -统计量, 即

$$U_n = U_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_m \leq n} \varphi(X_{a_1}, \dots, X_{a_m}), \quad (1)$$

此处  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  为一串 iid. 变量,  $\varphi(x_1, \dots, x_m)$  为其变元的一对称函数. 我们总假定  $\varphi(X_1, \dots, X_m)$  的均值存在有限并记之为:

$$\theta = E[\varphi(X_1, \dots, X_m)].$$

**定理 1.** 设  $\varphi$  满足条件

$$E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] < \infty \text{ 对某个 } r, 1 \leq r < 2, \quad (2)$$

则有

$$1) E[|U_n - \theta|^r] = o(n^{1-r}). \quad (3)$$

2) 存在只与  $m$  有关而与  $n, r, \varphi$  和  $X_1$  的分布无关的常数  $C_m$ , 使

$$E[|U_n - \theta|^r] \leq C_m E[|\varphi(X_1, \dots, X_m) - \theta|^r] n^{1-r}. \quad (4)$$

又若  $\varphi$  除满足 (2) 式外, 还满足

$$E[\varphi(x, X_2, \dots, X_m)] = 0, \text{ 对一切 } x, \quad (5)$$

则 (3), (4) 式中的  $n^{1-r}$  可改为  $n^{2(1-r)}$  (注意在条件 (5) 式之下必有  $\theta = 0$ ).

证. 为了证明本定理, 以及后面的需要, 将下面的已知事实列为一个引理.

**引理 1.** 1) 设  $X_1, X_2, \dots$  为一串 iid. 变量, 又存在  $r, 1 \leq r < 2$ , 使  $E[|X_1|^r] < \infty$ ,  $EX_1 = 0$ , 则

$$E[|X_1 + \dots + X_n|^r] = o(n). \quad (6)$$

2) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  满足条件

$$E(X_1) = 0, \quad E(X_i | X_1, \dots, X_{i-1}) = 0, \quad i = 2, \dots, n, \quad (7)$$

又  $1 \leq r < 2$ , 则有

$$E[|X_1 + \dots + X_n|^r] \leq 2 \sum_{i=1}^n E[|X_i|^r]. \quad (8)$$

证明分别见文献 [1] 和 [2].

我们先来证明定理的后一部分, 以下将看到, 由此不难推出定理的前一部分. 先考虑  $m = 2$  的情况. 有

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} U_n &= \varphi(X_1, X_2) + [\varphi(X_1, X_3) + \varphi(X_2, X_3)] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + [\varphi(X_1, X_n) + \varphi(X_2, X_n) + \dots + \varphi(X_{n-1}, X_n)] \\ &= V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}, \end{aligned}$$

由 (5) 式推出  $E(V_1) = 0$ . 因为  $V_1, \dots, V_{i-1}$  只与  $X_1, \dots, X_i$  有关, 而且

$$E[\varphi(X_j, X_{i+1}) | X_1, \dots, X_i] = 0, \text{ 当 } 1 \leq j \leq i,$$

由条件期望的基本性质不难推出

$$E[V_i | V_1, \dots, V_{i-1}] = 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

于是由 (8) 式得

$$E\left[\left|\binom{n}{2} U_n\right|^r\right] \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} E[|V_i|^r].$$

考虑  $E[|V_i|^r | X_{i+1} = y]$ . 在给定  $X_{i+1} = y$  的条件下,  $V_i = \varphi(X_1, y) + \dots + \varphi(X_i, y)$ , 为  $i$  个独立同分布变量之和. 由周知的事实<sup>[3]</sup>, 有

$$E[|V_i|^r | X_{i+1} = y] \leq E[|V_{n-1}|^r | X_n = y],$$

由此可知,

$$E\left[\left|\binom{n}{2} U_n\right|^r\right] \leq 2(n-1)E[|V_{n-1}|^r]. \quad (9)$$

又由引理 1 知,

$$E[|V_{n-1}|^r | X_n = y] \leq 2(n-1)E[|\varphi(y, X_2)|^r], \quad (10)$$

且存在  $G_n(y)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(y) = 0$ , 使

$$E[|V_{n-1}|^r | X_n = y] = G_n(y)(n-1)E[|\varphi(y, X_2)|^r]. \quad (11)$$

由 (10), (11) 式知  $G_n(y)$  (对  $n$  和  $y$ ) 有界, 于是根据控制收敛定理易得  $E[|V_{n-1}|^r] = o(n)$ . 以此代入 (9) 式, 即得  $E[|U_n|^r] = o(n^{2(1-r)})$ . 再由 (10) 式知,

$$E[|V_{n-1}|^r] \leq 2nE[|\varphi(X_1, X_2)|^r],$$

代入 (9) 式, 得

$$\begin{aligned} E[|U_n|^r] &\leq 2^{r+1}[n(n-1)]^{1-r}E[|\varphi(X_1, X_2)|^r] \\ &\leq 4^rE[|\varphi(X_1, X_2)|^r]n^{2(1-r)} \leq 16E[|\varphi(X_1, X_2)|^r]n^{2(1-r)}, \end{aligned}$$

这证明了定理的后半部当  $m=2$  的情况. 一般情况用归纳法. 设定理后半部的结论对只包含  $m-1$  个变量的核成立. 令

$$\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_m) = \varphi(x_1, \dots, x_m) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \phi(x_i, x_j), \quad (12)$$

其中  $\phi(x, y) = E[\varphi(x, y, X_3, \dots, X_m)]$ , 而记

$$D_i = \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_m \leq n} \tilde{\varphi}(X_i, X_{a_1}, \dots, X_{a_m}), \quad i = 1, \dots, n,$$

并以  $\tilde{U}_n$  记以  $\tilde{\varphi}$  为核的  $U$ -统计量, 则

$$m \binom{n}{m} \tilde{U}_n = D_1 + \dots + D_n.$$

由 Minkowski 不等式, 得

$$m^r \binom{n}{m}^r E[|\tilde{U}_n|^r] \leq n^r E[|D_n|^r].$$

考虑  $E[|D_n|^r | X_n = y]$ , 在给定  $X_n = y$  的条件下,  $D_n$  除了一常数因子  $\binom{n-1}{m-1}$  外, 为一  $U$ -统计量, 其核为  $h(x_1, \dots, x_{m-1}) = \tilde{\varphi}(y, x_1, \dots, x_{m-1})$ , 由  $\tilde{\varphi}$  的定义知, 它显然满足条件

$$E[h(x, X_2, \dots, X_{m-1})] = 0, \text{ 对一切 } x.$$

故由归纳假设知, 存在只与  $m$  有关而与  $n, r, \varphi$  及  $X_1$  的分布无关的常数  $C_{m-1}^*$ , 使

$$E[|D_n|^r | X_n = y] \leq \binom{n-1}{m-1}^r C_{m-1}^* E[|\tilde{\varphi}(y, X_2, \dots, X_m)|^r] n^{2(1-r)}$$

以及

$$E[|D_n|^r | X_n = y] = \binom{n-1}{m-1}^r H_n(y) E[|\tilde{\varphi}(y, X_2, \dots, X_m)|^r] n^{2(1-r)},$$

其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(y) = 0$ . 与在  $m=2$  时一样, 不难得到

$$E[|\tilde{U}_n|^r] = o(n^{2(1-r)}), \quad (13)$$

且存在只与  $m$  有关的常数  $\tilde{C}_m$ , 使

$$E[|\tilde{U}_n|^r] \leq \tilde{C}_m E[|\tilde{\varphi}(X_1, \dots, X_m)|^r] n^{2(1-r)}. \quad (14)$$

现以  $U_n^*$  记以  $\phi(x, y)$  为核的  $U$ -统计量, 则有  $U_m = \tilde{U}_n + mU_n^*$ , 因而

$$|U_n|^r \leq 2^{r-1} |\tilde{U}_n|^r + 2^{r-1} m^r |U_n^*|^r. \quad (15)$$

注意核  $\phi$  满足条件

$$E[\phi(x, X_2)] = 0, \text{ 对一切 } x.$$

由 (13), (14) 式及已证的  $m = 2$  的情况, 利用 (15) 式立即得到  $E[|U_n|^r] = o(n^{2(1-r)})$ . 又因  $r \geq 1$ , 由 Minkowski 不等式及关于条件期望的 Jensen 不等式, 得

$$E[|\tilde{\varphi}(X_1, \dots, X_m)|^r] \leq 2^{r-1} E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] + \frac{m(m-1)}{2} E[|\phi(X_1, X_2)|^r],$$

$$E[|\phi(X_1, X_2)|^r] \leq E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r],$$

于是由 (14), (15) 式及已证的  $m = 2$  的情况, 知存在只与  $m$  有关的常数  $C_m$ , 使

$$E[|U_n|^r] \leq C_m E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] n^{2(1-r)},$$

这就完成了定理 1 后半部的归纳证明.

为证定理 1 的前半部, 不失普遍性, 设  $\theta = 0$ , 记

$$\phi_0(x) = E[\varphi(x, X_2, \dots, X_m)],$$

$$\varphi_0(x_1, \dots, x_m) = \varphi(x_1, \dots, x_m) - \sum_{i=1}^m \phi_0(x_i),$$

则易见  $\varphi_0$  满足条件 (2)、(5) 式. 因此, 若以  $U_n^0$  记以  $\varphi_0$  为核的  $U$ -统计量, 则由定理已证部分, 有

$$E[|U_n^0|^r] = o(n^{2(1-r)}), \quad (16)$$

$$E[|U_n^0|^r] \leq C_{m_0} E[|\varphi_0(X_1, \dots, X_m)|^r] n^{2(1-r)}, \quad (17)$$

但  $U_n = U_n^0 + \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n \phi_0(X_i)$ . 由于

$$E[\phi_0(X_1)] = 0, \quad E[|\phi_0(X_1)|^r] \leq E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] < \infty,$$

由引理 1, 得

$$E\left[\left|\frac{m}{n} \sum_{i=1}^n \phi_0(X_i)\right|^r\right] = o(n^{1-r}),$$

$$\begin{aligned} E\left[\left|\frac{m}{n} \sum_{i=1}^n \phi_0(X_i)\right|^r\right] &\leq \left(\frac{m}{n}\right)^r 2n E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] \\ &\leq 2m^2 E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] n^{1-r}. \end{aligned}$$

此式与 (16), (17) 式结合, 即得 (3), (4) 式. 定理 1 证毕.

定理 1 的证明方法可以用来讨论  $r \geq 2$  的情况, 结果如下:

**定理 2.** 设  $U_n$  为以  $\varphi$  为核的  $U$ -统计量,  $\varphi$  满足条件

$$E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] < \infty, \text{ 对某个 } r \geq 2. \quad (18)$$

又  $\theta$  的意义同前, 则存在只与  $m, r$  有关而与  $n, \varphi$  及  $X_1$  的分布无关的常数  $D_{m,r}$ , 使

$$E[|U_n - \theta|^r] \leq D_{m,r} E[|\varphi(X_1, \dots, X_m) - \theta|^r] n^{-r/2}, \quad (19)$$

又若除条件 (18) 式外,  $\varphi$  还满足条件 (5) 式, 则 (19) 式中的  $n^{-r/2}$  可改为  $n^{-r}$ .

证. 证明时, 需要下面的引理:

**引理 2.** 设变量  $X_1, \dots, X_n$  满足条件 (7) 式. 又记  $a = \max_{1 \leq i \leq n} E[|X_i|^r]$ , 此处  $r \geq 2$ ,

则存在只与  $r$  有关的常数  $K_r$ , 使

$$E[|X_1 + \cdots + X_n|^r] \leq K_r a n^{r/2}. \quad (20)$$

在  $X_1, \cdots, X_n$  为 iid. 的情况, 引理结论已由 Brillinger 在文献 [4] 中证明过. 对该证明作以下几点修改即可适用于此处: 1) 不失普遍性, 设  $a = 1$ ; 2) 在处理形如  $E[|u|^p |v|^q]$  的项 (用文献 [4] 中记号) 时, 使用 Hölder 不等式以得到文献 [4] 的 (1) 式; 3) 当  $n$  不为  $2^s$  的形状时, 设  $2^s < n < 2^{s+1}$ , 补  $2^{s+1} - n$  个零项于  $X_1 + \cdots + X_n$ .

现设  $\varphi$  满足 (18) 和 (5) 式. 先令  $m = 2$ , 仍如前一样, 将  $\binom{n}{2} U_n$  表为  $V_1 + \cdots + V_{n-1}$ .

由引理 2 得

$$E \left[ \left| \binom{n}{2} U_n \right|^r \right] \leq K_r E[|V_{n-1}|^r] n^{r/2},$$

同样由引理 2 有

$$E[|V_{n-1}|^r | X_n = y] \leq K_r (n-1)^{r/2} E[|\varphi(y, X_2)|^r].$$

结合此两式得 (注意  $\theta = 0$ ):

$$\begin{aligned} E[|U_n|^r] &\leq 2^r K_r^2 [n(n-1)]^{-r/2} E[|\varphi(X_1, X_2)|^r] \\ &\leq 4^r K_r^2 E[|\varphi(X_1, X_2)|^r] n^{-r}. \end{aligned}$$

这证明了定理 2 后一结论当  $m = 2$  的情况, 以下的证明与定理 1 类似, 因而从略.

本节结果可作如下的解释: 在非参数统计中, 用  $U_n$  来估计  $\theta$ . 本节结果表明, 只要核的  $r$  阶矩 ( $r \geq 1$ ) 存在, 则  $U_n$  为  $\theta$  的  $r$ -平均相合估计, 且  $E[|U_n - \theta|^r]$  趋于零的速度达到了 iid. 变量的样本均值情况下的同样数量级, 因而是无可改进的. 在此顺便提到: 当  $r \geq 2$  为偶整数时, 定理 2 的后一结论曾由 Grams 等在文献 [5] 中用组合方法证明过.

## 二、 $U$ -统计量的 a. e. 收敛

上节结果的另一重要意义在于: 在核的  $r$  阶矩存在的条件下,  $U_n$  a. e. 收敛于  $\theta$  的速度问题可得到彻底解决.

设  $X_1, X_2, \cdots$  为一串 iid. 变量,  $E(X_1) = a$ , 且存在  $r, 1 < r < 2$ , 使  $E[|X_1|^r] < \infty$ , 则由 Marcinkiewicz 定理有

$$\bar{X}_n - a = o(n^{-(1-\frac{1}{r})}), \text{ 当 } n \rightarrow \infty \quad \text{a. e.}, \quad (21)$$

此处  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \cdots + X_n)$ . 在无进一步的假定时, 指数  $1 - \frac{1}{r}$  不能再升高. 另一方面, 若存在  $r > 1$ , 使  $E[|X_1|^r] < \infty$ , 则 (Katz 和 Baum)

$$P \left\{ \sup_{K \leq n} |\bar{X}_K - a| \geq \varepsilon \right\} = O(n^{1-r}), \text{ 当 } n \rightarrow \infty, \quad (22)$$

(21) 和 (22) 式从两个不同的角度刻划了在  $r$  阶矩存在的条件下, iid. 变量的样本均值 a. e. 收敛于总体均值的速度. 自然地提出问题: 这个收敛速度对  $U$ -统计量一般是否仍成立 (样本均值为一种特殊的  $U$ -统计量)? 利用第一节中的结果, 我们肯定地回答了这个问题.

**定理 3.** 设  $U_n$  为以  $\varphi$  为核的  $U$ -统计量,  $\theta$  的意义同前, 又存在  $r, 1 < r < 2$ , 使

$$E[|\varphi(X_1, \cdots, X_m)|^r] < \infty,$$

则

$$U_n - \theta = o(n^{-(1-\frac{1}{r})}), \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ a.e.}, \quad (23)$$

若存在  $r > 1$ , 使  $E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] < \infty$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$P\left\{\sup_{K \geq n} |U_K - \theta| \geq \varepsilon\right\} = \begin{cases} o(n^{1-r}), & \text{当 } 1 < r < 2, \\ O(n^{1-r}), & \text{当 } r \geq 2. \end{cases} \quad (24)$$

证. 不失普遍性, 设  $\theta = 0$ . 先证 (23) 式. 记

$$\phi(x) = E[\varphi(x, X_2, \dots, X_m)],$$

并令

$$\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_m) = \varphi(x_1, \dots, x_m) - \sum_{i=1}^m \phi(x_i),$$

并以  $\tilde{U}_n$  记以  $\tilde{\varphi}$  为核的  $U$ -统计量.  $\tilde{\varphi}$  满足条件 (2) 和 (5) 式, 于是由定理 1 得  $E[|\tilde{U}_n|^r] = o(n^{2(1-r)})$ . 由于序列  $U_m, \tilde{U}_{m+1}, \tilde{U}_{m+2}, \dots$  构成一个逆半鞅<sup>[6]</sup>, 根据文献 [7] 引理 4, 得

$$\tilde{U}_n = o(n^{-2(1-\frac{1}{r})} \log n) = o(n^{-(1-\frac{1}{r})}) \quad \text{a.e.}, \text{ 当 } n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

又由  $\theta = 0$  知,  $E[\phi(x_1)] = 0$ , 而

$$E[|\phi(X_1)|^r] \leq E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] < \infty,$$

由前述 Marcinkiewicz 定理, 有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(X_i) = o(n^{-(1-\frac{1}{r})}) \quad \text{a.e.} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (26)$$

注意到  $U_n = \tilde{U}_n + \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n \phi(X_i)$ , 由 (25), (26) 式即得 (23) 式.

为证 (24) 式, 仍利用序列  $\tilde{U}_m, \tilde{U}_{m+1}, \tilde{U}_{m+2}, \dots$  为逆半鞅的事实. 由鞅论中周知结果<sup>[3]</sup>, 有

$$P\left\{\sup_{K \geq n} |\tilde{U}_K| \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-r} E[|\tilde{U}_n|^r], \quad (27)$$

对任何  $r \geq 1$ . 若  $E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] < \infty$ , 则根据定理 1, 2, 有

$$P\left\{\sup_{K \geq n} |\tilde{U}_K| \geq \varepsilon\right\} \leq \begin{cases} o(n^{1-r}), & \text{当 } 1 < r < 2, \\ O(n^{1-r}), & \text{当 } r \geq 2. \end{cases} \quad (28)$$

由 Katz 和 Baum 的结果得出:

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{K \geq n} \left|\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \phi(X_i)\right| \geq \varepsilon\right\} &\leq \varepsilon^{-r} E\left[\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(X_i)\right|^r\right] \\ &\leq \begin{cases} o(n^{1-r}), & \text{当 } 1 < r < 2, \\ O(n^{1-r}), & \text{当 } r \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

利用  $U_n = \tilde{U}_n + \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n \phi(X_i)$ , 由 (28), (29) 式立即得到 (24) 式. 定理 3 证毕.

1973 年, Grams 等<sup>[5]</sup>证明了 (24) 式当  $r \geq 2$  为偶整数的情况.

### 三、Von-Mises 统计量的极限性质

设  $X_1, X_2, \dots$  为一串 iid. 变量,  $\varphi(x_1, \dots, x_m)$  为  $x_1, \dots, x_m$  的对称函数. 以  $\varphi$  为核

的 Von-Mises 统计量定义为:

$$V_n = n^{-m} \sum_{\alpha_1=1}^n \cdots \sum_{\alpha_m=1}^n \varphi(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m}), \quad n \geq 1,$$

$V_n$  与以  $\varphi$  为核的  $U$ -统计量  $U_n$  有密切的关系. 因此, 在关于  $U$ -统计量的工作中常附带讨论到它的性质. 迄今为止得出的结果显示, 凡是对  $U_n$  成立的极限性质, 对  $V_n$  一般也成立. 本节就核的  $r$  阶矩 ( $r \geq 1$ ) 存在的情况, 来进一步发展这个论点.

下面的定理是沟通这两种统计量的大样本性质的桥梁.

**定理 4.** 设  $U_n, V_n$  分别为以  $\varphi$  为核的  $U$ -统计量及 Von-Mises 统计量. 若  $\varphi$  满足条件  $E[|\varphi(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m})|^r] < \infty$ , 对某个  $r \geq 1$ , 及  $\alpha_i = 1, \cdots, m, i = 1, \cdots, m$ , (30) 则  $V_n$  可表为:

$$V_n = U_n + \frac{a}{n} + W_n, \quad (31)$$

其中  $a$  为常数, 而  $W_n$  满足条件:

$$1) E[|W_n|^r] = \begin{cases} o(n^{1-2r}), & \text{当 } 1 \leq r < 2, \\ O(n^{-3r/2}), & \text{当 } r \geq 2. \end{cases} \quad (32)$$

$$2) W_n = \begin{cases} o(n^{-2+1/r}) \text{ a. c.}, & \text{当 } 1 \leq r < 2, \\ O(n^{-3/2}(\log n)^{1/2+\varepsilon}) \text{ a. c.}, & \text{当 } r \geq 2, \text{ 对任给 } \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (33)$$

证. 不失普遍性, 设  $\theta = E[\varphi(X_1, \cdots, X_m)] = 0$ . 由定义

$$\begin{aligned} V_n &= n^{-m} \left[ \sum_{c_1} \varphi(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m}) + \sum_{c_2} \varphi(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m}) \right] \\ &= m! n^{-m} \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_m \leq n} \varphi(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m}) + n^{-m} \sum_{c_2} \varphi(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m}) \\ &= \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] U_n + T_n, \end{aligned}$$

此处  $\sum_{c_1}$  表示  $V_n$  定义的和, 足标  $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$  两两不同的那一部分, 而  $\sum_{c_2}$  表其余部分. 由上式,

$$\tilde{W}_n = V_n - U_n = O\left(\frac{1}{n}\right) U_n + T_n, \quad (34)$$

将  $\sum_{c_2} \varphi(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m})$  作进一步的分解. 为此以  $C(i_1, \cdots, i_r)$  记  $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$  取值的这样一个集合, 其中  $m$  个足标  $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$  可分为  $r$  堆, 每堆分别含  $i_1, \cdots, i_r$  个足标. 在同一堆内各足标值相同, 在不同堆内的足标值不同, 此处  $i_j \geq 1, i_1 + \cdots + i_r = m$ . 不难看出, 若引进如下的核函数:

$$\varphi_{i_1 \cdots i_r}(x_1, \cdots, x_r) = \frac{1}{r!} \sum_D \varphi(x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_r}, \cdots, x_{\alpha_r}),$$

此处  $D$  表示求和的范围为  $1 \leq \alpha_j \leq r, j = 1, \cdots, r$ , 且  $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$  两两不同, 又  $x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_r}$  依次有  $i_1, \cdots, i_r$  个, 则将有

$$n^{-m} \sum_{C(i_1 \cdots i_r)} \varphi(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m}) = \frac{A_{i_1 \cdots i_r}}{n^{K(i_1, \cdots, i_r)}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] U_n(i_1, \cdots, i_r),$$

其中  $U_n(i_1, \dots, i_r)$  为以  $\varphi_{i_1, \dots, i_r}$  为核的  $U$ -统计量,  $A_{i_1, \dots, i_r}$  为由  $i_1, \dots, i_r$  决定的常数,  $K(i_1, \dots, i_r)$  为由  $i_1, \dots, i_r$  决定的自然数, 且易见

$$K(i_1, \dots, i_r) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i_1, \dots, i_r \text{ 中有一个为 } 2, \text{ 其余为 } 1 \\ > 1, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

故若记

$$E[\varphi(X_1, X_1, X_3, \dots, X_m)] = \theta_0, \quad A_{21 \dots 1} \theta_0 = a,$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{W}_n = O\left(\frac{1}{n}\right) U_n + \frac{a}{n} + \frac{A_{21 \dots 1}}{n} U_n^*(2, 1, \dots, 1) \\ + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{u_m} n^{-d_j} b_j U_n^{(j)}, \end{aligned} \quad (35)$$

此处对每个  $j$ ,  $U_n^{(j)}$  为一以某个  $\varphi_{i_1, \dots, i_r}$  为核的  $U$ -统计量,  $d_j$  为非负整数,  $b_j$  为可与  $m$  有关但与  $n$  无关的常数,  $u_m$  为只与  $m$  有关的自然数, 而  $U_n^*(2, 1, \dots, 1)$  为以  $\varphi_{21 \dots 1}(x_1, \dots, x_{m-1}) - \theta_0 = \varphi_0$  为核的  $U$ -统计量.

根据 (30) 式, 在 (35) 式右边所涉及的一切  $U$ -统计量, 其核的  $r$  阶矩皆有限, 且  $U_n$  和  $U_n^*(2, 1, \dots, 1)$  的均值皆为 0. 故由定理 3, 在  $1 \leq r < 2$  时, 有

$$\begin{aligned} O\left(\frac{1}{n}\right) U_n &= o(n^{-2+\frac{1}{r}}) \quad a. e., \\ \frac{1}{n} U_n^*(2, 1, \dots, 1) &= o(n^{-2+\frac{1}{r}}) \quad a. e., \end{aligned}$$

而

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{u_m} n^{-d_j} b_j U_n^{(j)} = O(n^{-2}) = o(n^{-2+1/r}) \quad a. e., \quad (36)$$

由此得到 (33) 式, 当  $1 \leq r < 2$  的部分, 若  $r \geq 2$ , 则因对任给  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\begin{aligned} U_n &= o(n^{-1/2}(\log n)^{1/2+\varepsilon}) \quad a. e., \\ U_n^*(2, 1, \dots, 1) &= o(n^{-1/2}(\log n)^{1/2+\varepsilon}) \quad a. e., \end{aligned}$$

故得出 (33) 式, 当  $r \geq 2$  的部分.

为证 (32) 式, 注意由 (34), (35) 式, 有

$$W_n = O\left(\frac{1}{n}\right) U_n + \frac{A_{21 \dots 1}}{n} U_n^*(2, 1, \dots, 1) + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{u_m} b_j n^{-d_j} U_n^{(j)}. \quad (37)$$

当  $1 \leq r < 2$  时, 由定理 1 得

$$E\left[\left|O\left(\frac{1}{n}\right) U_n\right|^r\right] = o(n^{1-2r}), \quad (38)$$

$$E\left[\left|\frac{1}{n} U_n^*(2, 1, \dots, 1)\right|^r\right] = o(n^{1-2r}). \quad (39)$$

又

$$E\left[\left|\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{u_m} b_j n^{-d_j} U_n^{(j)}\right|^r\right] = O(n^{-2r}). \quad (40)$$

由 (37)–(40) 式, 用 Minkowski 不等式, 得到 (32) 式当  $1 \leq r < 2$  的部分. 若  $r \geq 2$ , 则由



定理 2 得

$$E \left[ \left| O \left( \frac{1}{n} \right) U_n \right|^r \right] = O(n^{-3r/2}),$$

$$E \left[ \left| \frac{1}{n} U_n^*(2, 1, \dots, 1) \right|^r \right] = O(n^{-3r/2}),$$

此两式与 (40) 式结合, 得到 (32) 式当  $r \geq 2$  的部分. 定理 4 证毕.

注 1. 本定理的证明是基于将 Von-Mises 统计量为若干个  $U$ -统计量的线性组合的思想. 在本文写成后, 我们发现在 1977 年, Bonner 和 Kirschner 在文献 [8] 中曾用这个方法讨论过  $V_n$  与  $U_n$  的关系, 他们在实质上(形式略有不同)证明了 (33) 式, 当  $r = 1$  的情况. 此处一般结果的获得是因为有了第一节中的结果.

注 2. 从定理 4 证明的过程不难看出: 适当改变 (31) 式中常数  $a$  的值, 我们可以假定, (37) 式中的每个  $U_n^{(j)}$  有均值零. 这时由第一节中的结果可知

$$E \left[ \left| \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^m b_j n^{-d_j} U_n^{(j)} \right|^r \right] = \begin{cases} o(n^{1-3r}), & \text{当 } 1 \leq r < 2, \\ O(n^{-3r/2}), & \text{当 } r \geq 2. \end{cases} \quad (41)$$

下面我们利用定理 4 及其上述修正来研究  $V_n$  的极限性质.

**定理 5.** 设  $U_n$  和  $V_n$  分别为以  $\varphi$  为核的  $U$ -统计量和 Von-Mises 统计量, 则

- 1) 在假定 (30) 式之下, 定理 1, 2 的结论, 当将  $U_n$  改为  $V_n$  时, 仍保持成立.
- 2) 设  $\varphi$  满足条件 (2), 而且

$$E[|\varphi(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_m})|] < \infty \text{ 对任何 } \alpha_j = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m, \quad (42)$$

则定理 3 的 (23) 式, 当将  $U_n$  改为  $V_n$  时仍保持成立.

- 3) 固定  $r \geq 1$ . 设  $\varphi$  满足条件

$$E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^r] < \infty, \quad (43)$$

$$E[|\varphi(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_m})|^s] < \infty, \quad S = \begin{cases} \frac{1+r}{2}, & \text{当 } 1 \leq r < 3, \\ \frac{2r}{3}, & \text{当 } r \geq 3, \end{cases}$$

则定理 3 的 (24) 式, 当将  $U_n$  改为  $V_n$  时仍保持成立.

证. 1) 直接由定理 1, 2 和 4 得出. 根据假定 (42) 式, 在 (33) 式中取  $r = 1$ , 得

$$W_n = o(n^{-1}) = o(n^{-(1-\frac{1}{r})}) \quad a. e.,$$

由此, 利用 (31) 和 (23) 式(对  $U_n$  成立), 即推出 2) 为了用 (31) 式证明 (24) 式对  $V_n$  成立,

需要估计  $P \left\{ \sup_{k \geq n} |W_k| \geq \varepsilon \right\}$ . 为此先设  $r < 3$ , 有

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{k \geq n} |W_k| \geq \varepsilon \right\} &\leq \sum_{k=n}^{\infty} P\{|W_k| \geq \varepsilon/2\} \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{-s} \sum_{k=n}^{\infty} E[|W_k|^s] = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{1-2s}\right) \\ &= o(n^{2-2s}) = o(n^{1-r}). \end{aligned}$$

而当  $r \geq 3$  时, 有

$$P \left\{ \sup_{k \geq n} |W_k| \geq \varepsilon \right\} = O(n^{1-3r/2}) = O(n^{1-r}),$$

这与 (31) 和 (24) 式(对  $U_n$  成立)结合, 即证明了 3), 定理 5 证毕.

本节结果的另一有趣的应用是关于 Von-Mises 统计量的 Berry-Esseen 界限问题.

早在 1948 年, Hoeffding 就证明了关于  $U$ -统计量的中心极限定理. 为了以下的需要, 将其结果引述如下. 设  $U_n$  和  $\theta$  的定义如前, 记  $\phi(x) = E[\varphi(x, X_2, \dots, X_m)]$ , 并设  $\sigma^2 = \text{Var}[\phi(X_1)]$  非零有限, 则

$$\frac{\sqrt{n}(U_n - \theta)}{m\sigma} \xrightarrow{c} N(0, 1). \quad (44)$$

对  $V_n$  而言, 长期以来知道的事实是: 若条件 (30) 式当  $r = 2$  成立, 则当 (44) 式成立时, 将其中的  $U_n$  改为  $V_n$  仍保持有效. 1977 年 Bonner 等在文献 [8] 中将条件减轻为要求 (30) 式当  $r = 1$  时成立.

关于 (44) 式的收敛速度问题, 若干年来有不少统计学者研究过, 最近 Y. K. Chan<sup>[9]</sup> 等得到了这个问题的彻底解决, 他们在  $E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^3] < \infty$  的条件下, 得到了  $O(n^{-1/2})$  的数量级. 关于  $V_n$ , 相应的结果还不存在. 利用本文结果, 我们解决了这个问题, 结果如下:

**定理 6.** 设  $V_n$  为以  $\varphi$  为核的 Von-Mises 统计量, 假定  $\varphi$  满足条件 (42) 式, 以及

$$E[|\varphi(X_1, \dots, X_m)|^3] < \infty, \quad (45)$$

$$E[|\varphi(X_1, X_1, X_3, \dots, X_m)|^{3/2}] < \infty. \quad (46)$$

以  $F_n(x)$  记  $\frac{\sqrt{n}(V_n - \theta)}{m\sigma}$  的分布函数,  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数, 则

$$\|F_n - \Phi\| = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2}). \quad (47)$$

此处  $\theta$  和  $\sigma$  的意义同前, 且假定  $0 < \sigma^2 < \infty$ .

证. 以  $G_n(x)$  记  $\frac{\sqrt{n}(U_n - \theta)}{m\sigma}$  的分布函数, 此处  $U_n$  为以  $\varphi$  为核的  $U$ -统计量, 则由文献 [9], 有

$$\|G_n - \Phi\| = O(n^{-1/2}). \quad (48)$$

考虑 (31), (37) 式, 如前所说, 适当选择 (31) 式中的  $a$  后, (41) 式将成立.

取  $b = |a| + 1$ , 则由 (31) 式易见

$$\begin{aligned} F_n(x) - G_n(x + b/\sqrt{n}) &\leq P \left\{ |W_n| \geq \frac{m\sigma}{n} \right\} \\ &\leq P \left\{ |W_{n1}| \geq \frac{m\sigma}{2n} \right\} + P \left\{ |W_{n2}| \geq \frac{m\sigma}{2n} \right\}, \end{aligned} \quad (49)$$

其中  $W_{n1}$  为 (37) 式右边前两项之和, 而  $W_{n2}$  为 (37) 式右边第三项. 由假定 (45), (46) 式, 利用 (41) 式当  $r = 3/2$  的情况, 并注意  $E[|W_{n1}|^{3/2}] = o(n^{-2})$ , 即得

$$P \left\{ |W_{n1}| \geq \frac{m\sigma}{2n} \right\} \leq \left( \frac{2n}{m\sigma} \right)^{3/2} E[|W_{n1}|^{3/2}] = o(n^{-1/2}), \quad (50)$$

$$P\left\{|W_{n2}| \geq \frac{m\sigma}{2n}\right\} \leq \frac{2n}{m\sigma} E[|W_{n2}|] = o(n^{-1}). \quad (51)$$

于是,利用(48)–(51)式,并注意  $\Phi'(x)$  在全直线上有界,即得

$$\begin{aligned} F_n(x) - \Phi(x) &= [F_n(x) - G_n(x + b/\sqrt{n})] + [G_n(x + b/\sqrt{n}) \\ &\quad - \Phi(x + b/\sqrt{n})] + [\Phi(x + b/\sqrt{n}) - \Phi(x)] \\ &\leq O(n^{-1/2}) + O(n^{-1/2}) + O(n^{-1/2}) = O(n^{-1/2}), \end{aligned} \quad (52)$$

从  $F_n(x) - G_n(x - b/\sqrt{n})$  出发作类似的讨论,得

$$F_n(x) - \Phi(x) \geq O(n^{-1/2}), \quad (53)$$

由(52), (53)式即得(47)式. 定理6证毕.

本定理只在假定三阶矩有限的条件下达到了 Berry-Esseen 界限,而且,当  $\varphi(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_m})$  中的足标  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  有重复时,对矩的阶数的要求还可以降低. 对(47)式的成立来说,条件(42)和(45)在某种意义上是必要的. 至于条件(46)中的指数  $3/2$  是否尚可降低,则还有待进一步的研究.

### 参 考 文 献

- [1] Pyke, R. & Root, D. *Ann. Math. Statist.*, **39** (1968), 379.
- [2] Chatterji, S. D. *Ann. Math. Statist.*, **40** (1969), 1068.
- [3] Loeve, M., *Probability Theory*, Van Nostrand, 1960.
- [4] Brillinger, D., *Biometrika*, 1962, p. 574.
- [5] Grams, M. P. & Serfling, R. J., *Ann. Statist.*, **1** (1973), 153.
- [6] Berk, R. H., *Ann. Math. Statist.*, **37** (1966), 51.
- [7] Geertsema, J. C., *Ann. Math. Statist.*, **41** (1970), 1016.
- [8] Bonner, N. & Kirschner, H. P., *Ann. Statist.*, **5** (1977), 405.
- [9] Chan, Y. K. & Wierman J., *Ann. Prob.*, **6**(1968), 186.