中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 11 期: 1441～1466
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

综 述

稳定向量丛模空间中的有理曲线

献给万哲先教授 90 华诞

刘敏[1], 孙笑涛[2*]

1. 青岛大学数学与统计学院, 青岛 266071;
2. 天津大学数学学院, 天津 300072
E-mail: liumin@amss.ac.cn, xiaotaosun@tju.edu.cn

收稿日期: 2016-12-31; 接受日期: 2017-07-27; 网络出版日期: 2017-10-16; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11401330) 资助项目

摘要 Fano 簇中有理曲线的研究是代数几何的重要课题之一, 本文对稳定向量丛模空间中有理曲线研究的现状做一个较全面的总结.

关键词 稳定向量丛的模空间 Hecke 曲线 分裂直线 极小有理曲线 小有理曲线 Chow 群
MSC (2010) 主题分类 14-02, 14H60, 14D20, 14F05, 14E

1 引言

设 C 是一条亏格为 $g \geqslant 2$ 的光滑射影曲线, $\mathcal{L}$ 是 C 上的一个次数为 d 的线丛. 令 $M := SU_C(r, \mathcal{L})$ 是 C 上秩为 r 且具有固定行列式 $\mathcal{L}$ 的稳定向量丛的模空间. 已知模空间 M 是一个光滑的拟射影 Fano 簇, 同时有 $\mathrm{Pic}(M) = \mathbb{Z} \cdot \Theta$, $-K_M = 2(r,d)\Theta$ (参见文献 [1,2]), 此处 Θ 是一个丰沛 (ample) 除子. 因此, 作为 Fano 簇, M 的指数 (index) 是 $2(r,d)$.

对任意一个 Fano 簇 X 中的一条有理曲线 $l \subset X$, 如果 l 满足 $-K_X \cdot l = \mathrm{index}(X)$, 则称此有理曲线为 X 中的一条直线; 如果 l 满足 $-K_X \cdot l = k \cdot \mathrm{index}(X)$, 则称此有理曲线的次数为 k. 对模空间 M 来说, 如上定义的有理曲线 $l \subset M$ 的次数为 $\deg(\Theta\mid_l)$. 因此, 所谓模空间 M 里的一条 k 次有理曲线, 是指一个非常值态射 $\phi : \mathbb{P}^1 \to M$ 满足 $\deg(\phi^*\Theta) = k$. Sun [3] 证明了, 任意一条有理曲线 $\phi : \mathbb{P}^1 \to M$ 都可以由 $C \times \mathbb{P}^1$ 上的一个向量丛 E 所定义, 并根据 E 在 $f : C \times \mathbb{P}^1 \to C$ 的一般纤维上的分裂型给出了有理曲线的一个次数公式 (2.1). 由此公式和 Hecke 曲线的构造方式, 他证明了当 $g \geqslant 3$ 时, 模空间 M 中任意过一般点的有理曲线 $\phi : \mathbb{P}^1 \to M$ 的次数至少是 $\frac{r}{(r,d)}$, 而且, 除了 $g = 3$、$r = 2$ 且 d 是偶数的情形外, 次数为 $\frac{r}{(r,d)}$ 当且仅当 ϕ 是 Hecke 曲线 (定理 3.1). 除了 $g = 3$、$r = 2$ 且 d 是偶数的情形外, 该定理回答了 Hwang 的一个问题 (问题 2.7). 对于 "$g = 3$、$r = 2$ 且 d 是偶数" 的情形, 文献 [4] 证明了, 对于 M 中的每一点 $[W]$, 都有过 $[W]$ 点的不同于 Hecke 曲线的直线通过 (定理 3.3). 这是对孙定理的补充, 同时也说明孙定理中的条件 "除了 $g = 3$、$r = 2$ 且 d 是偶数的情形外" 是必须的.

英文引用格式: Liu M, Sun X T. Rational curves on the moduli spaces of stable bundles (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1441–1466, doi: 10.1360/N012016-00247

© 2017《中国科学》杂志社

另一方面, 关于 Fano 簇上低次有理曲线的一个公开问题 (参见文献 [5, 问题 V1.13]) 是, Picard 数为 1 的任意 Fano 簇 X 上是否存在直线? 文献 [2, 第 2 节和引理 3.1] 暗示了模空间中直线的存在性. Sun [3] 构造了分裂型直线, 证明了当 $(r,d)=1$ 时 M 中仅有分裂型直线 (参见文献 [3, 定理 2]). 之后, 文献 [6] 对任意的 r 和任意的 d 确定了 M 中的全部直线 (定理 4.1), 并由此确定了 1 次态射 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 构成的簇 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)$ (定理 4.2) 和直线簇 $\mathfrak{L}(M)$ (推论 4.4). 模空间 M 在 $(r,d)<r$ 和 $(r,d)=r$ 时的几何结构不一样. 当 $(r,d)<r$ 时, 所有的直线都落在 M 的一个真闭子簇里; 但当 $(r,d)=r$ 时, M 的一般位置都可以被直线覆盖.

由孙定理可知, 如果 $g\geqslant 3$, 那么模空间 M 中过一般点的有理曲线的最小次数是 $\frac{r}{(r,d)}$ (即极小有理曲线的次数是 $\frac{r}{(r,d)}$). 由此可知, 次数小于 $\frac{r}{(r,d)}$ 的有理曲线 (当 $(r,d)\neq r$ 时存在) 称为小有理曲线, 一定落在一个真闭集里. 文献 [7] 证明了, 当 $(r,d)=1$ 时, 小有理曲线的轨迹包含 $r-1$ 个不可约分支 (命题 5.1). 文献 [8] 对于 $d=1$ 的情形研究了模空间 M 中的小有理曲线; 证明了模空间中的小有理曲线上的点所对应的向量丛都可由曲线 C 上的一组半稳定的 0 次向量丛 $V_1,\dots,V_{n-1}$ 和一个稳定的 1 次向量丛 V_n 扩张得到 (引理 5.2); 并证明了小有理曲线的轨迹是一个余维数至少是 $\mathrm{Min}\{\sum_{i=2}^{n}r_{i-1}(r_i-r_{i-1})(g-2)+r_{n-1}(r_n-r_{n-1}-1)\}$ 的闭子簇, 其中 $0<r_1<\cdots<r_n=r$ 遍历, 对某个小于 r 的正整数 n 和某 n 个整数 $\alpha_1>\cdots>\alpha_{n-1}>\alpha_n$, 满足不等式 $\sum_{i=1}^{n-1}r_i(\alpha_i-\alpha_{i+1})<r$ 的正整数组 (命题 5.3 和定理 5.4); 特别对 $r=3$ 的情形完全确定了 M 中的非直线的小有理曲线 (定理 5.4).

对模空间 M 中有理曲线空间的研究还比较少. 对于任意秩和次数的稳定向量丛的模空间, 文献 [6] 完全确定了 1 次有理曲线空间 (即直线空间) $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)$ (定理 4.2). 对于高次有理曲线空间, 目前我们只找到了关于秩为 2、次数为 1 的模空间的有理曲线空间的研究. 文献 [9] 研究了秩为 2 且具有固定行列式 $\mathcal{O}(x_0)$ $(x_0\in C)$ 的模空间中的 1 和 2 次曲线空间. 文献 [10] 研究了秩为 2、次数为 1 且具有固定行列式的模空间里任意 k $(k\geqslant 1)$ 次有理曲线空间 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1,M)$. 文献 [10] 通过对 E 的一般分裂型的研究, 找到了 M 中 k 次有理曲线空间的所有不可约分支 (定理 6.3), 特别地, 找到了这些分支的一个极大有理连通的纤维化 (定理 6.1).

文献 [11] 通过对模空间里 Hecke 曲线及其退化的研究, 计算了秩为 2 且具有固定行列式 $\mathcal{O}(x_0)$ $(x_0\in C)$ 的稳定向量丛模空间中的 1- 闭链 Chow 群 (定理 7.1). 之后, 文献 [12] 对秩为 2 且具有平凡行列式的向量丛模空间, 由 Abel-Jacobi 映射, 得到了模空间 1- 闭链 Chow 群的信息.

2 有理曲线的次数公式及分类

文献 [3] 证明了, 任意一条有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 都可以被 $C\times\mathbb{P}^1$ 上的一个向量丛 E 所定义 (引理 2.1), 并根据 E 在 $f:C\times\mathbb{P}^1\to C$ 的一般纤维上的分裂型给出了有理曲线 ϕ 的一个次数公式 (2.1).

2.1 有理曲线的次数公式

虽然一般情形下, $C\times M$ 上不存在泛丛 (Poincaré 丛), 但 $C\times M$ 上存在向量丛 $\mathcal{E}nd^0$ 和射影丛 $\mathcal{P}$ 使得对任意点 $[V]\in M$, 有 $\mathcal{E}nd^0\mid_{C\times\{[V]\}}=\mathcal{E}nd^0(V)$ 和 $\mathcal{P}\mid_{C\times\{[V]\}}=\mathbb{P}(V)$. 设 $\pi:C\times M\to M$ 是自然投射, 则 $T_M=R^1\pi_*(\mathcal{E}nd^0)$ (参见文献 [2]), 且因为 $\pi_*(\mathcal{E}nd^0)=0$, $T_M=R^1\pi_*(\mathcal{E}nd^0)$ 与基变换交换.

对任意有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$, 令 $X:=C\times\mathbb{P}^1$ 和 $\mathbb{E}=(\mathrm{id}_C\times\phi)^*\mathcal{E}nd^0$, 仍然记 $\pi:X=C\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ 为自然投射, 则 $\phi^*T_M=R^1\pi_*\mathbb{E}$. 由 Riemann-Roch 定理可得 $\deg\phi^*(-K_M)=\chi(R^1\pi_*\mathbb{E})-(r^2-1)(g-1)$.

由 Leray 谱序列和 $\chi(\mathbb{E}) = \deg(ch(\mathbb{E}) \cdot td(T_X))_2$ 可得

$$\chi(R^1\pi_*\mathbb{E}) = -\chi(\mathbb{E}) = c_2(\mathbb{E}) + (r^2-1)(g-1).$$

因此,

$$\deg\phi^*(-K_M) = c_2(\mathbb{E}).$$

引理 2.1 (参见文献 [3, 引理 2.1]) 存在 $X = C \times \mathbb{P}^1$ 上的一个向量丛 E 使得 $\mathcal{E}nd^0(E) = \mathbb{E}$, 且对任意 $t \in \mathbb{P}^1$, 有 $\phi(t) = E\,|_{C\times\{t\}}$.

因此,

$$\deg\phi^*(-K_M) = c_2(\mathcal{E}nd^0(E)) = 2rc_2(E) - (r-1)c_1(E)^2 =: \Delta(E).$$

令 $f: X \to C$ 和 $\pi: X \to \mathbb{P}^1$ 为自然投射, 曲线 $\phi: B = \mathbb{P}^1 \to M$ 由 X 上的向量丛 E 所定义. 设 E 在 $f: C \times \mathbb{P}^1 \to C$ 的一般纤维 X_ξ 上形如

$$E\,|_{X_\xi} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X_\xi}(\alpha_i)^{\oplus r_i}, \quad \alpha_1 > \cdots > \alpha_n.$$

这个 n- 元数组 $\alpha = (\alpha_1^{\oplus r_1}, \ldots, \alpha_n^{\oplus r_n})$ 称为 E 的一般分裂型 (the generic splitting type of E). 把 E 张量上 $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\alpha_n)$, 不失一般性, 可设 $\alpha_n = 0$. 任意这样的 E 有一个相对 Harder-Narasimhan 分解

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E,$$

其中商层 $F_i = E_i/E_{i-1}$ 是无挠的且其对应的一般分裂型是 $(\alpha_i^{\oplus r_i})$. 令 $F_i' = F_i \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. 在不引起混淆的情况下, 我们用 $\deg(F_i)$ (相对应地, $\deg(E_i)$) 表示 F_i (相对应地, E_i) 在 π 的一般纤维上的次数. 相应地, $\mu(E_i)$ (相对应地, $\mu(E)$) 表示 E_i (相对应地, E) 限制到 π 的一般纤维上的斜率, 则有 (参见文献 [3, (2.2)])

$$\deg\phi^*(\Theta) = \frac{1}{2(r,d)}\Delta(E) = \frac{r}{(r,d)}\left(\sum_{i=1}^{n} c_2(F_i') + \sum_{i=1}^{n-1}(\mu(E)-\mu(E_i))\mathrm{rk}E_i(\alpha_i - \alpha_{i+1})\right). \tag{2.1}$$

引理 2.2 (参见文献 [3, 引理 2.2]) 设 $\mathcal{E}$ 是直纹面 $f: X \to C$ 上任一个秩为 r 的、一般分裂型为 $(0^{\oplus r})$ 的无挠层, 则必有 $c_2(\mathcal{E}) \geqslant 0$, 且 $c_2(\mathcal{E}) = 0$ 的充分必要条件是存在 C 上的局部自由层 V 使得 $\mathcal{E} = f^*V$.

2.2 Hecke 型有理曲线

设有理曲线 $\phi: \mathbb{P}^1 \to M$ 是由 $X = C \times \mathbb{P}^1$ 上的向量丛 E 定义的, 如果 E 在 $f: X \to C$ 的一般纤维 $X_\xi = f^{-1}(\xi)$ 是半稳定的 (与 $\mathbb{P}^1$ 上某个合适线丛的拉回作张量, 我们可假设 E 在一般纤维上的限制形如 $\mathcal{O}_{X_\xi}^{\oplus r}$, 即 E 在 $f: X \to C$ 上具有一般分裂型 $(0^{\oplus r})$), 那么由文献 [3, 第 2 节] 的讨论可知, 存在 C 中的有限子集 S 和向量丛 V 使得 E 满足正合列

$$0 \to f^*V \to E \to \bigoplus_{p\in S} \mathcal{Q}_p \to 0,$$

其中 $\mathcal{Q}_p$ 是 $X_p = \{p\} \times \mathbb{P}^1$ 上的一个向量丛. 由这样的 E 定义的有理曲线称为 Hecke 型有理曲线 (参见文献 [13]). 特别地, 当 S 只含有一个点 $p \in C$ 且 $\mathcal{Q}_p = \mathcal{O}_{X_p}(-1)$ 时, 此时 E 满足正合列

$$0 \to f^*V \to E \to \mathcal{O}_{X_p}(-1) \to 0,$$

它定义了所谓的 Hecke 曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$.

注 2.3 Hecke 型有理曲线的次数显然都是 $\frac{r}{(r,d)}$ 的正整数倍.

Hecke 曲线是由 Narasimhan 和 Ramanan [14,15] 引入的, 他们研究了 Hecke 闭链的基本性质及秩为 2 的向量丛模空间中的 Hecke 曲线. 对于任意秩稳定向量丛模空间中 Hecke 曲线, 文献 [3,6,16–18] 都有介绍, 特别是文献 [6] 给出了一般的构造方式.

给定两个非负整数 k 和 l, 称一个秩为 r、次数为 d 的向量丛 W 为 (k,l)- 稳定的, 如果对 W 的任意真子丛 V, 有

$$\frac{\deg(V)+k}{\mathrm{rk}(V)}<\frac{\deg(W)+k-l}{\mathrm{rk}(W)}.$$

通常的稳定性等价于 $(0,0)$- 稳定的. 一个 (k,l)- 稳定向量丛的对偶是 (l,k)- 稳定的. (k,l)- 稳定性是一个开条件.

引理 2.4 [15] 如果 $g\geqslant 3$, 则 M 包含 $(0,1)$- 稳定和 $(1,0)$- 稳定的向量丛. 除了当 $g=3$、且 r 和 d 都是偶数的情形之外, M 都包含 $(1,1)$- 稳定向量丛.

引理 2.5 [15] 给定正合列 $0\to V\to W\to\mathcal{O}_p\to 0$, 其中 V 和 W 是曲线 C 上的向量丛, $\mathcal{O}_p$ 是点 $p\in C$ 处的摩天大厦层. 如果 W 是 (k,l)- 稳定的, 则 V 是 $(k,l-1)$- 稳定的.

下面假设 $g\geqslant 3$, 令 $U_C(r,d-1)$ 是秩为 r、次数为 $d-1$ 的稳定向量丛模空间, 则 $U_C(r,d-1)$ 包含 $(1,0)$- 稳定点, 记 $\mathfrak{D}\subset U_C(r,d-1)$ 是由 $(1,0)$- 稳定丛组成的开子集. 定义 $\psi:C\times\mathfrak{D}\to J^d(C)$ 为 $\psi(x,V)=\mathcal{O}_C(x)\otimes\det(V)$, 记

$$\mathfrak{R}_C:=\psi^{-1}(\mathcal{L})\subset C\times\mathfrak{D},$$

则 $\mathfrak{R}_C$ 中的点 (x,V) 满足: V 是 C 上的 $(1,0)$- 稳定丛, 且 $\det(V)=\mathcal{L}(-x)$. 自然投射 $\mathfrak{R}_C\to C$ 为一个纤维化, 其在点 $x\in C$ 处纤维是 $\mathfrak{D}\cap U_C(r,\mathcal{L}(-x))$. 令 $\mathcal{V}$ 是 $\mathfrak{R}_C$ 上的泛丛, $p:\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)\to\mathfrak{R}_C$ 为与其相伴的射影丛. 设 $p^*(\mathcal{V}^*)\to O_{\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)}(1)\to 0$ 是 1- 维泛商, 使得对 $\forall\,(x,V)\in\mathfrak{R}_C$ 有 $p^{-1}(x,V)=\mathbb{P}(V_x^*)$. 假设

$$\pi:C\times\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)\to\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)$$

是投射, $\Gamma\subset C\times\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)$ 是 $\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)\to\mathfrak{R}_C\to C$ 的图, 则 $\mathcal{E}$ 由下列正合列定义:

$$0\to\mathcal{E}^*\to\pi^*p^*(\mathcal{V}^*)\to O_\Gamma\otimes\pi^*O_{\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)}(1)\to 0,$$

此正合列取对偶可得

$$0\to\pi^*p^*\mathcal{V}\to\mathcal{E}\to O_\Gamma\otimes\pi^*O_{\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)}(-1)\to 0. \tag{2.2}$$

对 $\forall\,(x,V)\in\mathfrak{R}_C$, 有 $p^{-1}(x,V)=\mathbb{P}(V_x^*)$, 且 (2.2) 限制到 $\{x\}\times\mathbb{P}(V_x^*)$ 得正合列

$$0\to f^*V\to\mathcal{E}\to_{\{x\}\times\mathbb{P}(V_x^*)}\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_x^*)}(-1)\to 0, \tag{2.3}$$

其中 $f:C\times\mathbb{P}(V_x^*)\to C$ 是投射. 对任意点 $\xi=(x,V,V_x^*\to\Lambda\to 0)\in\mathbb{P}(V^*)$, (2.2) 可给出 C 上的正合列

$$0\longrightarrow V\xrightarrow{\iota}\mathcal{E}_\xi\longrightarrow\mathcal{O}_x\to 0$$

使得 $\mathrm{Ker}(\iota_x)=\Lambda^*\subset V_x$. 由 V 的 $(1,0)$- 稳定性可推出 $\mathcal{E}_\xi$ 是稳定向量丛. 因此, (2.2) 定义了一个态射

$$\Psi:\mathbb{P}(V^*)\to M. \tag{2.4}$$

对 $\forall\,(x,V)\in\mathfrak{R}_C$, Ψ 在 $p^{-1}(x,V)=\mathbb{P}(V_x^*)$ 上的限制记为 $\Psi_{(x,V)}$, 即

$$\Psi_{(x,V)}:\mathbb{P}(V_x^*)=p^{-1}(x,V)\to M. \tag{2.5}$$

定义 2.6 [6] $p:\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)\to\mathfrak{R}_C$ 纤维中直线在 $\{\Psi_{(x,V)}\}_{(x,V)\in\mathfrak{R}_C}$ 下的像称为 M 中的 Hecke 曲线.

由文献 [15, 引理 5.9] 可知, (2.5) 中的态射是闭浸入. 且由文献 [15, 命题 5.16] 易证

$$\Psi_{(x,V)}^*(-K_M)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_x^*)}(2r). \tag{2.6}$$

对任意 $(1,1)$- 稳定点 $[W]\in M$ 和 $(W_x\to\mathbb{C}\to 0)\in\mathbb{P}(W_x)$, 可由下式定义一个 $(1,0)$- 稳定丛 V:

$$0\longrightarrow V\xrightarrow{\alpha}W\longrightarrow {}_x\mathbb{C}\to 0,$$

则 $p^{-1}(x,[V])=\mathbb{P}(V_x^*)$ 在 M 中的像是过点 $[W]\in M$ 的射影空间, 且 $\mathbb{P}(V_x^*)$ 中过点 $[\mathrm{Ker}(\alpha_x)]\in\mathbb{P}(V_x^*)$ 的直线在 M 中的像是过点 $[W]\in M$ 的 Hecke 曲线, 它是次数为 $\frac{2r}{2(r,d)}=\frac{r}{(r,d)}$ 的有理曲线. Hwang [16] 因此提出如下问题.

问题 2.7 (参见文献 [16, 问题 1]) Hecke 曲线是否是过 M 一般点的极小有理曲线 (即次数最小)? 反之, 一条过 M 一般点的极小有理曲线是否必为 Hecke 曲线?

2.3 分裂型有理曲线

设有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是由 $X=C\times\mathbb{P}^1$ 上的向量丛 E 定义的, 如果 E 在 $f:X\to C$ 的一般纤维 $X_\xi=f^{-1}(\xi)$ 不是半稳定的, 则有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 称为分裂型有理曲线 (参见文献 [13]).

注意到, 如果 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是分裂型有理曲线, 设定义它的向量丛具有一般分裂型 $(\alpha_1^{\oplus r_1},\ldots,\alpha_n^{\oplus r_n})$, 则 $n\geqslant 2$. 特别地, 当 $n=2$ 时, 我们可以来构造可能存在的任意次数的分裂型有理曲线.

设 k 是一个正整数, $[W]\in M$. 假设存在子丛 $V_1\subset W$ 使得

$$r_1d-d_1r=k(r,d), \tag{2.7}$$

其中 $r_1=\mathrm{rank}V_1$, $d_1=\deg V_1$ 和 $d=\deg W$. 令 $V_2:=V/V_1$ 为商丛, 则 W 满足非平凡扩张

$$0\to V_1\to W\to V_2\to 0. \tag{2.8}$$

由文献 [2, 引理 2.3] 可知, 存在 C 上一族被 $P=\mathbb{P}Ext^1(V_2,V_1)$ 参数化的向量丛 $\{\mathcal{E}_p\}_{p\in P}$ 使得对每一个 $p\in P$, 向量丛 $\mathcal{E}_p$ 与由 p 点给出的 V_2 通过 V_1 的扩张是同构的. 设 l 是 $P=\mathbb{P}Ext^1(V_2,V_1)$ 中过点 p_0 的一条直线, 其中 p_0 是 P 中由 (2.8) 给出的点. 如果对每一点 $p\in l$, 向量丛 $\mathcal{E}_p$ 都是稳定的, 那么

$$\{\mathcal{E}_p\}_{p\in l}$$

将定义模空间 M 中一条次数为 k 的过点 $[W]\in SU_C(r,\mathcal{L})$ 的分裂型有理曲线. 特别地, 当 $k=1$ 时, 如此方式得到的分裂型有理曲线是一条直线, 称为分裂型直线.

对于分裂型直线, 文献 [6] 给出了一个整体的构造方法, 回顾如下:

对给定的 r 和 d, 设 $0<r_1,r_2<r$ 及 d_1 和 d_2 是满足等式

$$r_1+r_2=r,\quad d_1+d_2=d,$$

$$r_1d - d_1r = (r,d), \quad d_2r - r_2d = (r,d)$$

的整数. 令 $U_C(r_1,d_1)$ 和 $U_C(r_2,d_2)$ 分别是秩为 r_1 和 r_2、次数为 d_1 和 d_2 的稳定向量丛的模空间. 因为 $(r_1,d_1)=1$ 和 $(r_2,d_2)=1$, 所以, $C\times U_C(r_1,d_1)$ 和 $C\times U_C(r_2,d_2)$ 上分别存在泛丛 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$. 考虑态射

$$U_C(r_1,d_1)\times U_C(r_2,d_2) \xrightarrow{\det(\bullet)\times\det(\bullet)} J_C^{d_1}\times J_C^{d_2} \xrightarrow{(\bullet)\otimes(\bullet)} J_C^d,$$

令 $\mathcal{R}(r_1,d_1)$ 是它在点 $[\mathcal{L}]\in J_C^d$ 处的纤维. $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$ 由投射 $C\times\mathcal{R}(r_1,d_1)\to C\times U_C(r_i,d_i)$ $(i=1,2)$ 的拉回依然分别记作 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$. 令 $p: C\times\mathcal{R}(r_1,d_1)\to\mathcal{R}(r_1,d_1)$ 为自然投射且令

$$\mathcal{G} = R^1p_*(\mathcal{V}_2^*\otimes\mathcal{V}_1),$$

后者是秩为 $r_1r_2(g-1)+(r,d)$ 的局部自由层. 令

$$q: P(r_1,d_1)=\mathbb{P}(\mathcal{G})\to\mathcal{R}(r_1,d_1)$$

为参数化 $\mathcal{G}_t(t\in\mathcal{R}(r_1,d_1))$ 的 1- 维子空间的射影丛. 令 $f: C\times P(r_1,d_1)\to C$ 和 $\pi: C\times P(r_1,d_1)\to P(r_1,d_1)$ 为自然投射, 则存在 $C\times P(r_1,d_1)$ 上的泛扩张

$$0\to(\mathrm{id}\times q)^*\mathcal{V}_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{P(r_1,d_1)}(1)\to\mathcal{E}\to(\mathrm{id}\times q)^*\mathcal{V}_2\to 0 \tag{2.9}$$

使得对任意的点 $x=([V_1],[V_2],[e])\in P(r_1,d_1)$, 其中 $[V_i]\in U_C(r_i,d_i)$ 满足 $\det(V_1)\otimes\det(V_2)=\mathcal{L}$ 且 $[e]\subset H^1(C,V_2^*\otimes V_1)$ 是一条过原点的直线, 向量丛 $\mathcal{E}\mid_{C\times\{x\}}$ 是由扩张

$$0\to V_1\to V\to V_2\to 0$$

给出的向量丛 V 的同构类, 其中以上每一个扩张都是由直线 $[e]\subset H^1(C,V_2^*\otimes V_1)$ 的一个向量定义. 泛扩张 (2.9) 的存在性可由文献 [2, 引理 2.4] 得到.

由文献 [6, 引理 2.2] 和 [19] 可知, $C\times P(r_1,d_1)$ 上的泛扩张 (2.9) 中的向量丛 $\mathcal{E}$ 可定义态射

$$\Phi: P(r_1,d_1)\to U_C(r,\mathcal{L}), \tag{2.10}$$

其中 $U_C(r,\mathcal{L})$ 表示 C 上秩为 r 且具有固定行列式 $\mathcal{L}$ 的半稳定向量丛的模空间, 而稳定向量从的模空间 $M=SU_C(r,\mathcal{L})$ 是它的一个开子概型. 记 $P(r_1,d_1)^s=\Phi^{-1}(M)$, 则有

$$\Phi\mid_{P(r_1,d_1)^s}: P(r_1,d_1)^s\to SU_C(r,\mathcal{L})=M. \tag{2.11}$$

引理 2.8 (参见文献 [6, 引理 2.4]) 在任意的点 $\xi\in\mathcal{R}(r_1,d_1)$ 处的纤维 $P(r_1,d_1)^s_\xi = q^{-1}(\xi)\cap P(r_1,d_1)^s$ 上,

$$\Phi^s_\xi := \Phi\mid_{P(r_1,d_1)^s_\xi}: P(r_1,d_1)^s_\xi\to M$$

是其像上的正规化. 特别地, $q: P(r_1,d_1)^s\to\mathcal{R}(r_1,d_1)$ 的纤维里的直线在 Φ 下的像是模空间 M 里的直线.

3 极小有理曲线

3.1 孙定理

现在假设 $g \geqslant 3$ ($g=3$、$r=2$ 且 d 是偶数的情形除外), 如果有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1 \to M$ 过 M 的一般点, 那么对 $\mathbb{P}^1$ 上一般的点 $y \in \mathbb{P}^1$, $E_y = E|_{C\times\{y\}}$ 都是 $(1,1)$- 稳定的. 如果 E 在 $f: X = C\times\mathbb{P}^1 \to C$ 的一般纤维上不是半稳定的, 则在 (2.1) 中, 一定有 $n \geqslant 2$ 且

$$(\mu(E)-\mu(E_i))\mathrm{rk}E_i > 1. \tag{3.1}$$

由此可得

$$\deg\phi^*(\Theta) > \frac{r}{(r,d)}.$$

如果 E 在 $f: X = C\times\mathbb{P}^1 \to C$ 的一般纤维上是半稳定的, 将 E 张量上一个合适的线丛, 可设 E 在 f 的一般纤维上是平凡的. 由引理 2.2 可知, $c_2(E) \neq 0$ (否则存在 C 上的向量丛 V 使得 $E = f^*V$, 从而 $\phi(\mathbb{P}^1) = [V] \in M$ 是常值映射), 从而 $\deg\phi^*(\Theta) = \frac{r}{(r,d)}c_2(E) \geqslant \frac{r}{(r,d)}$, 且必然存在一条纤维 $X_t = f^{-1}(t)$ 使得 $E_t = E|_{X_t}$ 不是半稳定的. 设 $E_t \to \mathcal{O}_{X_t}(\beta)^{\oplus r_t} \to 0$ 是具有极小斜率的商丛, 且设

$$0 \to F \to E \to_{X_t} \mathcal{O}_{X_t}(\beta)^{\oplus r_t} \to 0 \tag{3.2}$$

是 E 在 $X_t \subset X$ 上沿着 $\mathcal{O}_{X_t}(\beta)^{\oplus r_t}$ 的初等变换. 由此正合列通过计算可得 (参见文献 [3, 引理 2.4])

$$c_1(F) = c_1(E) - r_tX_t, \quad c_2(F) = c_2(E) + r_t\beta. \tag{3.3}$$

若 $\deg\phi^*(\Theta) = \frac{r}{(r,d)}$, 则必有 $r_t = 1$, $\beta = -1$ 且 $c_2(F) = 0$. 对 F 应用引理 2.2 可知, 存在 C 上的向量丛 V 使得 $F = f^*V$. 因此, $\deg\phi^*(\Theta) = \frac{r}{(r,d)}$ 当且仅当 E 满足以下正合列:

$$0 \to f^*V \to E \to_{X_t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \to 0, \tag{3.4}$$

由此定义的有理曲线就是所谓的 Hecke 曲线. 由此可证孙定理:

定理 3.1 (参见文献 [3, 定理 1]) 如果 $g \geqslant 3$, 那么任何过 M 一般点的有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1 \to M$ 的次数至少为 $\frac{r}{(r,d)}$. 除了 $g=3$、$r=2$ 且 d 是偶数的情形, 过 M 一般点的有理曲线的次数为 $\frac{r}{(r,d)}$ 当且仅当它是一条 Hecke 曲线.

3.2 例外情形

除 $g=3$、$r=2$ 且 d 是偶数的情形外, 孙定理完全确定了模空间 M 中过一般点的极小有理曲线, 回答了 Hwang 的问题. 本小节研究当 $g=3$、$r=2$ 且 d 是偶数时, 模空间里的极小有理曲线的情形.

引理 3.2 (参见文献 [4, 引理 2.1]) 设 d 是一个偶数, $0 \to L_1 \to W \to L_2 \to 0$ 是一个非平凡扩张, 其中 L_1 和 L_2 分别是次数为 $\frac{d}{2}-1$ 和 $\frac{d}{2}+1$ 的线丛, 则

(i) W 是半稳定的;

(ii) W 不是稳定的当且仅当 $\exists x \in C$ 使得对应于 W 的元素 $\delta(W) \in H^1(C, L_2^{-1}\otimes L_1)$ 在以下映射的核中:

$$H^1(C, L_2^{-1}\otimes L_1) \to H^1(C, L_2^{-1}\otimes L_1\otimes L_x),$$

其中 $L_x = \mathcal{O}_C(x)$ 是由 x 定义的线丛. 在这种情形下, W 与 $L_2\otimes L_x^{-1} \oplus L_1\otimes L_x$ 是 S- 等价的.

设 W 是曲线 C 上的一个秩为 2 的向量丛, 令

$$m(W) := \max\{\deg(L) \mid L \subset W \text{ 是 } W \text{ 是的子线丛}\}. \tag{3.5}$$

定义 Segre 不变量为

$$s(W) := \deg(W) - 2m(W). \tag{3.6}$$

注意 $s(W) \equiv \deg(W) \pmod 2$ 且 W 是稳定的 (半稳定的) 当且仅当 $s(W) \geqslant 1$ ($s(W) \geqslant 0$). Nagata [20] 证明了

$$s(W) \leqslant g.$$

如果 $g = 3$、$r = 2$ 且 d 是偶数, 那么易证 $\forall [W] \in M$ 都有 $s(W) = 2$ (参见文献 [4, 引理 3.1]).

通常由 $[W] \mapsto s(W)$ 所定义的函数 $s : M \to \mathbb{Z}$ 是下半连续的, 由此根据 s 的值给出 M 的一个分层, 把它分成一些局部闭子集 M_s.

定理 3.3 (参见文献 [4, 定理 1.2 和 1.3]) 如果 $g = 3$、$r = 2$ 且 d 是偶数, 则对任意点 $[W] \in M$, 存在分裂型直线通过它.

如果 $g = 2$、$r = 2$ 且 d 是奇数, 则对任意点 $[W] \in M$, 存在分裂型直线通过它.

证明 如果 $g = 3$、$r = 2$ 且 d 是偶数, 则对任意点 $[W] \in M$ 有 $s(W) = 2$. 从而存在子线丛 $L_1 \subset W$ 满足 $\deg L_1 = \frac{d}{2} - 1$, 其中 $d = \deg\mathcal{L}$. 令 $L_2 := W/L_1$ 是商丛, 其次数为 $\frac{d}{2} + 1$. 易得

$$1 \times d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) \times 2 = 2 = (2, d).$$

令 $i : L_1 \to W$ 是自然单同态, 则

$$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\ i\ } W \longrightarrow L_2 \longrightarrow 0$$

是一个非平凡扩张 (否则, 我们有 $W \cong L_1 \oplus L_2$, 这与 W 的稳定性矛盾).

已知存在 C 上一族被 $P_{(L_1,L_2)} = \mathbb{P}Ext^1(L_2, L_1)$ 参数化的向量丛 $\mathcal{E}$ 使得对每一个点 $p \in P_{(L_1,L_2)}$, 有 $\mathcal{E}_p$ 与由 p 点给出的 L_2 通过 L_1 的扩张同构 (参见文献 [2, 引理 2.3]). 更确切地, 存在 $C \times P_{(L_1,L_2)}$ 上的一个泛扩张

$$0 \to f^*L_1 \otimes \pi^*\mathcal{O}_{P_{(L_1,L_2)}}(1) \to \mathcal{E} \to f^*L_2 \to 0, \tag{3.7}$$

其中 $f : C \times P_{(L_1,L_2)} \to C$ 和 $\pi : C \times P_{(L_1,L_2)} \to P_{(L_1,L_2)}$ 是投射. 因此, $\mathcal{E}$ 是一族秩为 2 的具有固定行列式 $\det(L_1) \otimes \det(L_2) \cong \mathcal{L}$ 的半稳定的向量丛 (引理 3.2). 因此, 泛扩张 (3.7) 可定义态射

$$\Phi_{(L_1,L_2)} :\ P_{(L_1,L_2)} \to U_C(2, \mathcal{L}), \tag{3.8}$$

其中 $U_C(2, \mathcal{L})$ 表示秩为 2 的具有固定行列式 $\mathcal{L}$ 的半稳定向量丛的模空间, 它是 M 的一个射影紧化.

计算易知 $P_{(L_1,L_2)}$ 是 3- 维射影空间. 由引理 3.2 知, $P_{(L_1,L_2)}$ 存在过点

$$q = [0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\ i\ } W \longrightarrow L_2 \longrightarrow 0]$$

的直线 l 使得 $\mathcal{E}_p$ (对每一点 $p \in l$) 是稳定的. 因此, $\Phi_{(L_1,L_2)}(l) \subset M = SU_C(2, \mathcal{L})$ 且

$$\Phi_{(L_1,L_2)} \mid_l : l \to M = SU_C(2, \mathcal{L}) \tag{3.9}$$

是一条过点 $[W] \in M$ 的分裂型的直线.

如果 $g = 2$、$r = 2$ 且 d 是奇数, 则对任意点 $[W] \in M$ 有 $s(W) = 1$. 类似可证对任意点 $[W] \in M$, 存在分裂型直线通过它. □

4 模空间里的直线

当 $(r,d)=1$ 时, Sun [3] 完全确定了模空间 M 里的直线, 证明了模空间里的直线都是分裂型直线 (参见文献 [3, 定理 2]). 随后, 文献 [6] 对任意秩为 r、次数为 d 的稳定向量丛模空间, 确定了其上的全部直线, 进而确定了簇 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)$ 和直线簇 $\mathfrak{L}_M$, 并研究了模空间中直线的几何. 本节保持 Hecke 曲线构造及直线构造中的记号.

4.1 模空间里的直线及直线簇

定理 4.1 (参见文献 [6, 定理 2.7]) (i) 当 $(r,d)\neq r$ 时, 模空间 M 里的所有直线都是分裂型直线, 即每一条直线都是 $q:P(r_1,d_1)\to\mathcal{R}(r_1,d_1)$ 纤维中某条直线在 Φ 下的像, 其中 $\{r_1,d_1\}$ 是某个满足

$$0<r_1<r,\quad r_1d-d_1r=(r,d)$$

的整数对.

(ii) 当 $(r,d)=r$ 时, 模空间 M 里的直线要么是分裂型直线, 要么是 Hecke 曲线.

证明 设有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是由 $X=C\times\mathbb{P}^1$ 上的向量丛 E 所定义的. 当 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是直线时, 由次数公式 (2.1) 可得

$$\frac{r}{(r,d)}\left(\sum_{i=1}^{n}c_2(F_i')+\sum_{i=1}^{n-1}(\mu(E)-\mu(E_i))\mathrm{rk}E_i(\alpha_i-\alpha_{i+1})\right)=1. \tag{4.1}$$

如果 $(r,d)\neq r$, 则有 $c_2(F_i')=0$ 且 $n=2$. 因此存在 C 上的向量丛 V_1 和 V_2 使得

$$0\to f^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\to E\to f^*V_2\to 0.$$

设 V_1 和 V_2 的秩分别为 r_1 和 r_2, V_1 和 V_2 的次数分别为 d_1 和 d_2, 则 $r_1+r_2=r$, $d_1+d_2=d$. 代入 (4.1) 可得

$$r_1d-d_1r_1=(r,d). \tag{4.2}$$

由文献 [6, 引理 2.2] 可知, V_1 和 V_2 是稳定的且 $\det(V_1)\otimes\det(V_2)=\mathcal{L}$. 因此 ϕ 可通过

$$\mathbb{P}^1\xrightarrow{\sigma}P(r_1,d_1)^s_\xi\xrightarrow{\Phi_\xi}M$$

分解, 其中 $\xi=(V_1,V_2)\in\mathcal{R}(r_1,r_2)$ 且 $\sigma^*\mathcal{O}_{P(r_1,d_1)^s_\xi}(1)=O_{\mathbb{P}^1}(1)$ (因此 σ 是一个浸入且 $\sigma(\mathbb{P}^1)$ 是 $P(r_1,d_1)_\xi=\mathbb{P}Ext^1(V_2,V_1)$ 中的一条直线). 这说明 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是一条分裂型直线.

如果 $(r,d)=r$, 则有 $c_2(F_i')=0$ 且 $n=2$, 或者有 $c_2(E)=1$ 且 $n=1$. 因此 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是一条分裂型直线, 或者它可由满足正合列

$$0\to f^*V\to E\to\mathcal{O}_{\{p\}\times\mathbb{P}^1}(-1)\to 0$$

的向量丛 E 所定义, 其中 $f:X=C\times\mathbb{P}^1\to C$ 和 $\pi:X=C\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ 为自然投射, V 是 C 上的一个向量丛, 此时 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是一条 Hecke 曲线. □

模空间里的直线簇指的是商 $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$. 为了确定 $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)$, 回顾 Hecke 曲线和分裂型直线的构造, 有

$$p:\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)\to\mathfrak{R}_C,\quad q:P(r_1,d_1)^s\to\mathcal{R}(r_1,d_1).$$

令 $\mathbb{P}^1_{\mathcal{R}(r_1,d_1)}=\mathbb{P}^1\times\mathcal{R}(r_1,d_1)$ 且令 $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1_{\mathcal{R}(r_1,d_1)},P(r_1,d_1)^s/\mathcal{R}(r_1,d_1))$ 是概型使得对任意的 $\mathcal{R}(r_1,d_1)$ 之上的概型 T,

$$\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1_{\mathcal{R}(r_1,d_1)},P(r_1,d_1)^s/\mathcal{R}(r_1,d_1))(T)$$

是由次数为 1 (关于 $\mathcal{O}_{P(r_1,d_1)}(1)$ 的次数) 的态射 $\mathbb{P}^1_{\mathcal{R}(r_1,d_1)}\times_{\mathcal{R}(r_1,d_1)}T\to P(r_1,d_1)^s\times_{\mathcal{R}(r_1,d_1)}T$ 组成的集合. 它是一个由像在 $q:P(r_1,d_1)^s\to\mathcal{R}(r_1,d_1)$ 的纤维里的 1 次映射 $\mathbb{P}^1\to P(r_1,d_1)^s$ 组成的簇. 类似可定义由像在 $p:\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)\to\mathfrak{R}_C$ 的纤维里的 1 次映射 $\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)$ 组成的簇

$$\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)):=\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1_{\mathfrak{R}_C},\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)_{\mathfrak{R}_C}).$$

令

$$\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}):=\bigsqcup_{\{r_1,d_2\}}\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1_{\mathcal{R}(r_1,d_1)},P(r_1,d_1)^s/\mathcal{R}(r_1,d_1))$$

是无交并, 其中 $\{r_1,d_2\}$ 遍历满足以下条件的整数对:

$$0<r_1<r,\quad r_1d-d_1r=(r,d).$$

定理 4.2 (参见文献 [6, 定理 3.1]) 设 $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)$ 是由 1 次态射 $\mathbb{P}^1\to M$ 组成的簇, 则

$$\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)\cong\begin{cases}\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}), & \text{如果 } (r,d)\neq r,\\ \mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P})\sqcup\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)), & \text{如果 } (r,d)=r.\end{cases}$$

证明 把一个 T- 态射

$$\mathbb{P}^1\times T\cong\mathbb{P}^1_{\mathcal{R}(r_1,d_1)}\times_{\mathcal{R}(r_1,d_1)}T\xrightarrow{\varphi_T}P(r_1,d_1)^s\times_{\mathcal{R}(r_1,d_1)}T$$

对应一个 T- 态射

$$\mathbb{P}^1\times T\xrightarrow{\varphi_T}P(r_1,d_1)^s\times_{\mathcal{R}(r_1,d_1)}T\longrightarrow P(r_1,d_1)^s\times T\xrightarrow{\Phi\times\mathrm{id}_T}M\times T,$$

这样得到一个典范态射 $\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P})\to\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)$. 当 $(r,d)\neq r$ 时, 由定理 4.1 可知以上态射是满射. 为了证明此态射也是单射, 设 $\xi_1,\xi_2\in\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P})$ 分别是由 $C\times\mathbb{P}^1$ 上的正合列

$$0\to f^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\to\mathcal{E}_1\to f^*V_2\to 0,$$
$$0\to f^*W_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\to\mathcal{E}_2\to f^*W_2\to 0$$

所定义的, 其中 $f:X=C\times\mathbb{P}^1\to C$ 和 $\pi:X=C\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ 是投射. 如果 ξ_1,ξ_2 在 $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)$ 中的像相同, 则存在 $\mathbb{P}^1$ 上的线丛 $\mathcal{N}$ 使得 $\mathcal{E}_1\cong\mathcal{E}_2\otimes\pi^*\mathcal{N}$. 若 $\deg\mathcal{N}\leqslant 0$, 则 $\mathrm{Hom}(f^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),f^*W_2\otimes\pi^*\mathcal{N})=0$, 从而 $f^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\hookrightarrow f^*W_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\otimes\pi^*\mathcal{N}$, 这说明 $V_1\hookrightarrow W_1\otimes H^0(\mathcal{N})$. 因此有 $\mathcal{N}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1},V_1\cong W_1$ 和 $V_2\cong W_2$, 这表明 $\xi_1=\xi_2$. 若 $\deg\mathcal{N}\geqslant 0$, 利用 $\mathcal{E}_2\cong\mathcal{E}_1$, 同样可证 $\xi_1=\xi_2$. 因此, 当 $(r,d)\neq r$ 时, $\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P})\to\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M)$ 是双射.

类似地, 当 $(r,d)=r$ 时, 由定理 4.1, 我们有满态射

$$\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P})\sqcup\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}(\mathcal{V}^*))\to\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1,M).$$

为了证明这是单射, 只需考虑 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{V}^*))$ 分别是由 $C \times \mathbb{P}^1$ 上的正合列

$$0 \to f^*V \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{O}_{\{x_1\}\times\mathbb{P}^1}(-1) \to 0,$$
$$0 \to f^*W \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{O}_{\{x_2\}\times\mathbb{P}^1}(-1) \to 0$$

所定义的, 其中 V 和 W 是 C 上秩为 r、次数为 $d-1$ 的稳定向量丛, $x_1, x_2 \in C$ 是两点. 如果 ξ_1 和 ξ_2 在 $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1, M)$ 中的像相同, 则存在 $\mathbb{P}^1$ 上的线丛 $\mathcal{N}$ 使得

$$\mathcal{E}_1 \cong \mathcal{E}_2 \otimes \pi^*\mathcal{N}, x_1 = x_2.$$

若 $\deg\mathcal{N} \leqslant 0$, 则

$$\mathrm{Hom}(f^*V, \mathcal{O}_{\{x_2\}\times\mathbb{P}^1}(-1) \otimes \pi^*\mathcal{N}) = 0.$$

同构 $\mathcal{E}_1 \cong \mathcal{E}_2 \otimes \pi^*\mathcal{N}$ 可诱导单射 $f^*V \hookrightarrow f^*W \otimes \pi^*\mathcal{N}$, 这说明 $\mathcal{N} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ 和 $V \cong W$, 因此, $\xi_1 = \xi_2$. 若 $\deg\mathcal{N} \geqslant 0$, 利用 $\mathcal{E}_2 \cong \mathcal{E}_1$, 则同样可证 $\xi_1 = \xi_2$.

为了证明以上态射是同构, 只需证 $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1, M)$ 是光滑的. 设 $\varphi : \mathbb{P}^1 \to M$ 是 $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1, M)$ 的一个点, 则由文献 [3, 引理 2.1] 知, φ 是由 $C \times \mathbb{P}^1$ 的一个满足 $\varphi^*T_M = R^1\pi_*\mathrm{Ad}(E)$ 的向量丛 E 定义的, 此处 $\mathrm{Ad}(E)$ 表示 E 的迹自由的自同态构成的层, 则 E 一定满足

$$0 \to f^*V_1 \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \to E \to f^*V_2 \to 0$$

或 $0 \to f^*V \to E \to \mathcal{O}_{\{x\}\times\mathbb{P}^1}(-1) \to 0$. 利用这些正合列, 我们可证明

$$H^1(\varphi^*T_M) = H^1(R^1\pi_*\mathrm{Ad}(E)) = 0.$$

因此, $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1, M)$ 是光滑的. □

由文献 [5, 定理 3.21] 知, 存在半正规簇 $\mathrm{Chow}_{1,1}(M)$ 参数化 1 维的且次数为 1 的有效闭链, 且其上伴随一个泛闭链 $\mathrm{Univ}_{1,1}(M) \to \mathrm{Chow}_{1,1}(M)$. 因为 $\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1, M)$ 是光滑的, 所以存在一个 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$-不变的态射

$$\mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1, M) \to \mathrm{Chow}_{1,1}(M).$$

令 $\mathfrak{L}_M \subset \mathrm{Chow}_{1,1}(M)$ 是它的像, 显然 $\mathfrak{L}_M$ 恰是 $\mathrm{Chow}_{1,1}(M)$ 的参数化具有有理分支的闭链的轨迹, 则由文献 [5, 命题 2.2] 知, $\mathfrak{L}_M \subset \mathrm{Chow}_{1,1}(M)$ 是一个闭子集.

定义 4.3 (参见文献 [6, 定义 3.2]) 闭子集 $\mathfrak{L}_M \subset \mathrm{Chow}_{1,1}(M)$ 赋予既约结构称为 M 里的直线簇. 由

$$\mathbb{L} := \mathrm{Univ}_{1,1}(M) \times_{\mathrm{Chow}_{1,1}(M)} \mathfrak{L}_M \to \mathfrak{L}_M$$

所诱导定义的泛闭链 $\mathbb{L} \subset M \times \mathfrak{L}_M$ 称为 M 里的泛直线.

令 $G(r_1, d_1) \to \mathcal{R}(r_1, d_1)$ 和 $\mathfrak{H} \to \mathfrak{R}_C$ 分别是 $P(r_1, d_1)^s$ 和 $\mathbb{P}(\mathcal{V}^*)$ 里直线的相对 Grassmannian 丛, 且令

$$\mathfrak{L}(r_1, d_1) \hookrightarrow P(r_1, d_1)^s \times_{\mathcal{R}(r_1,d_1)} G(r_1, d_1) \quad 和 \quad \mathfrak{L}(h) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{V}^*) \times_{\mathfrak{R}_C} \mathfrak{H}$$

是泛直线. 回顾态射

$$\Phi|_{P(r_1,d_1)^s} : P(r_1, d_1)^s \to M \quad 和 \quad \Psi : \mathbb{P}(\mathcal{V}^*) \to M, \tag{4.3}$$

它们可诱导态射

$$\mathfrak{L}(r_1,d_1)\xrightarrow{\Phi|_{P(r_1,d_1)^s}\times\mathrm{id}}M\times G(r_1,d_1)\quad 和\quad \mathfrak{L}(h)\xrightarrow{\Psi\times\mathrm{id}}M\times\mathfrak{H}.$$

则直线族 $\mathrm{Im}(\Phi\mid_{P(r_1,d_1)^s}\times\mathrm{id})\subset M\times G(r_1,d_1)$ 和 $\mathrm{Im}(\Psi\times\mathrm{id})\subset M\times\mathfrak{H}$ 定义了态射

$$\Upsilon_{r_1,d_1}:G(r_1,d_1)\to\mathfrak{L}(M)\quad 和\quad \theta:\mathfrak{H}\to\mathfrak{L}(M)\quad (如果\ (r,d)=r). \tag{4.4}$$

令 $\mathfrak{L}(M)_{r_1,d_1}:=\mathrm{Im}(\Upsilon_{r_1,d_1})$, $\mathfrak{H}_\theta:=\mathrm{Im}(\theta)$ 且令

$$G(M):=\bigsqcup_{r_1,d_1}G(r_1,d_1),\quad \mathfrak{J}(M):=\bigsqcup_{r_1,d_1}\mathfrak{L}(M)_{r_1,d_1}$$

是簇的无交并, 其中 $\{r_1,d_1\}$ 遍历满足 $0<r_1<r$, $r_1d-d_1r=(r,d)$ 的整数对.

推论 4.4 (参见文献 [6, 推论 3.3]) $\Upsilon_{r_1,d_1}:G(r_1,d_1)\to\mathfrak{L}(M)$ 是正规化的且 θ 诱导出 $\mathfrak{H}\cong\mathfrak{H}_\theta\subset\mathfrak{L}(M)$ (当 $(r,d)=r$ 时). 进一步有

$$\mathfrak{L}(M)=\begin{cases}\mathfrak{J}(M), & 如果\ (r,d)\neq r,\\ \mathfrak{J}(M)\sqcup\mathfrak{H}_\theta, & 如果\ (r,d)=r.\end{cases}$$

证明 由文献 [15] 对 Hecke 闭链的研究可得 $\mathfrak{H}\cong\mathfrak{H}_\theta$. 因为所有的 $G(r_1,d_1)$ 都是光滑簇, 要证其他结论, 只需证: 当 $(r,d)\neq r$ 时, $G(M)\to\mathfrak{L}(M)$ 是双射; 当 $(r,d)=r$ 时, $G(M)\sqcup\mathfrak{H}\to\mathfrak{L}(M)$ 是双射. 由定理 4.1 可知它们是满射. 与定理 4.2 进行相同讨论可证明它们是单射. □

4.2 模空间中直线的几何

文献 [15] 对态射 $\Psi:\mathbb{P}(V^*)\to M$ 作了深入研究, 由文献 [15, 引理 5.9] 知, 对任意点 $(x,V)\in\mathfrak{R}_C$, 态射 $\Psi_{(x,V)}:\mathbb{P}(V_x^*)=p^{-1}(x,V)\to M$ 是闭浸入. 对于态射 $\Phi\mid_{P(r_1,d_1)^s}:P(r_1,d_1)^s\to SU_C(r,\mathcal{L})=M$, 对任意点 $\xi\in\mathcal{R}:=\mathcal{R}(r_1,d_1)$, $\Phi_\xi^s:=\Phi\mid_{P(r_1,d_1)_\xi^s}:P(r_1,d_1)_\xi^s\to M$ 是否浸入? 令

$$\mathcal{D}=\{\xi=(V_1,V_2)\in\mathcal{R}\mid\mathrm{Hom}(V_1,V_2)\neq 0\}.$$

文献 [6] 证明了, 若 $\xi\in\mathcal{R}\setminus\mathcal{D}$, 则 Φ_ξ^s 是浸入.

回顾分裂型直线的构造过程, 记 $\mathcal{P}=P(r_1,d_1)$, $\mathcal{R}=\mathcal{R}(r_1,d_1)$. 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} C\times\mathcal{P} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{P}\\ {\scriptstyle 1\times q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q}\\ C\times\mathcal{R} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{R}\end{array}$$

和正合列

$$0\to(1\times q)^*\mathcal{V}_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{P(r_1,d_1)}(1)\to\mathcal{E}\to(1\times q)^*\mathcal{V}_2\to 0,$$

此正合列可诱导态射 $\Phi:\mathcal{P}\to U_C(r,\mathcal{L})$. 令 $\mathrm{Ad}(\mathcal{E})$ 表示 $\mathcal{E}$ 的迹自由的自同态构成的层, $\Delta(\mathcal{E})\subset\mathrm{Ad}(\mathcal{E})$ 是保持以上正合列的自同态构成的子层, 则有

$$0\to\Delta(E)\to\mathrm{Ad}(\mathcal{E})\to(1\times q)^*(\mathcal{V}_1^*\otimes\mathcal{V}_2)\otimes\pi^*\mathcal{O}_{P(r_1,d_1)}(-1)\to 0. \tag{4.5}$$

由文献 [6, 引理 4.2] 可知, $\pi_*(\mathcal{V}_1^*\otimes\mathcal{V}_2)=0$, 因此, 序列 (4.5) 可诱导出

$$0\to R^1\pi_*\Delta(E)\to R^1\pi_*\mathrm{Ad}(\mathcal{E})\to q^*R^1\pi_*(\mathcal{V}_1^*\otimes\mathcal{V}_2)\otimes\mathcal{O}_{P(r_1,d_1)}(-1)\to 0. \tag{4.6}$$

仿照文献 [15, 引理 6.6] 的证明过程可证, 无穷小形变映射 $T_{\mathcal{P}}\to R^1\pi_*\Delta(E)$ 是同构且由序列 (4.6) 可诱导序列 (参见文献 [6, 引理 4.4])

$$0\longrightarrow T_{\mathcal{P}}\xrightarrow{d\Phi_\xi}\Phi^*T_{U_C(r,\mathcal{L})}\longrightarrow q^*R^1\pi_*(\mathcal{V}_1^*\otimes\mathcal{V}_2)\otimes\mathcal{O}_{P(r_1,d_1)}(-1)\longrightarrow 0.$$

命题 4.5 (参见文献 [6, 命题 4.6]) 对任意 $\xi\in\mathcal{R}\setminus(\mathcal{R}\cap\mathcal{D})$, 态射 $\Phi_\xi^s:=\Phi\mid_{\mathcal{P}_\xi^s}:\mathcal{P}_\xi^s\to M$ 是浸入的. 对任意两个不同的点 $\xi_1,\xi_2\in\mathcal{R}$, $\Phi_{\xi_1}^s(\mathcal{P}_{\xi_1}^s)$ 与 $\Phi_{\xi_2}^s(\mathcal{P}_{\xi_2}^s)$ 的交是 0 维的, 即是一个有限集.

证明 $\xi\in\mathcal{R}-(\mathcal{R}\cap\mathcal{D})$ 意味着 $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)=0$, 这说明 Φ_ξ 和 $d\Phi_\xi$ 都是单射, 因此 Φ_ξ 是浸入的. 从而 Φ_ξ^s 也是浸入的.

设 $\xi_1=(V_1,V_2)\in\mathcal{R}$ 和 $\xi_2=(W_1,W_2)\in\mathcal{R}$ 是任意两个不同的点. 固定同构 $\mathbb{P}=\mathcal{P}_{\xi_1}\cong\mathcal{P}_{\xi_2}$, 且把泛扩张拉回到 $C\times\mathbb{P}$ 上,

$$0\to p_1^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\to\mathcal{E}_1\to p_1^*V_2\to 0,$$
$$0\to p_1^*W_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\to\mathcal{E}_2\to p_1^*W_2\to 0,$$

其中 $p_1:C\times\mathbb{P}\to C$, $\pi:C\times\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ 是投射. 如果交 $\Phi_{\xi_1}(\mathcal{P}_{\xi_1}^s)\cap\Phi_{\xi_2}(\mathcal{P}_{\xi_2})$ 有正维数, 则存在非奇异的射影曲线 $Y\to\mathbb{P}$ 使得以上正合列在 $C\times Y$ 上的拉回

$$0\to p_1^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_Y(1)\to\mathcal{E}_1\to p_1^*V_2\to 0,$$
$$0\to p_1^*W_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_Y(1)\to\mathcal{E}_2\to p_1^*W_2\to 0$$

定义相同的态射 $Y\to U_C(r,\mathcal{L})$. 因此存在 Y 上的线丛 $\mathcal{N}$ 使得 $\mathcal{E}_1\cong\mathcal{E}_2\otimes\pi^*\mathcal{N}$. 若 $\deg(\mathcal{N})\leqslant 0$, 则

$$\mathrm{Hom}(p_1^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_Y(1),p_1^*W_2\otimes\pi^*\mathcal{N})=0$$

且 $\mathcal{E}_1\cong\mathcal{E}_2\otimes\pi^*\mathcal{N}$ 可诱导单射

$$p_1^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_Y(1)\to p_1^*W_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_Y(1)\otimes\pi^*\mathcal{N},$$

这表明有单射 $V_1\to W_1\otimes H^0(\mathcal{N})$. 因此 $\mathcal{N}=\mathcal{O}_Y$, $V_1\cong W_1$ 和 $V_2\cong W_2$, 这与 $\xi_1\neq\xi_2$ 矛盾. 若 $\deg(\mathcal{N})\geqslant 0$, 则利用 $\mathcal{E}_1\cong\mathcal{E}_2\otimes\pi^*\mathcal{N}^{-1}$, 同样可得矛盾. 因此交 $\Phi_{\xi_1}(\mathcal{P}_{\xi_1}^s)\cap\Phi_{\xi_2}(\mathcal{P}_{\xi_2})$ 是零维的. □

在文献 [6] 的最后提出了如下的问题:

问题 4.6 (参见文献 [6, 问题 4.7]) 模空间 M 里的任意两条直线是否至多只有一个交点?

5 模空间中的小有理曲线

由孙定理可知, 如果 $g\geqslant 3$ 时, 模空间 M 中过一般点的有理曲线的最小次数是 $\frac{r}{(r,d)}$ (即极小有理曲线的次数是 $\frac{r}{(r,d)}$). 由此可知, 次数小于 $\frac{r}{(r,d)}$ 的有理曲线 (当 $(r,d)\neq r$ 时存在) 称为小有理曲线, 一定落在一个真闭集中.

如果 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是模空间 M 中的一条小有理曲线, 设 E 是定义它的向量丛, 则有

$$\frac{r}{(r,d)}\left(\sum_{i=1}^{n}c_2(F_i')+\sum_{i=1}^{n-1}(\mu(E)-\mu(E_i))\mathrm{rk}E_i(\alpha_i-\alpha_{i+1})\right)<\frac{r}{(r,d)}. \tag{5.1}$$

由此必然有 $n\geqslant 2$, $c_2(F_i')=0$. 从而存在 C 上的向量丛 V_i 使得 $F_i'=f^*V_i$ (引理 2.2). 因此,

$$F_i=f^*V_i\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i),$$

从而 E 可由一系列扩张得到

$$\begin{aligned}&0\to f^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_1)\to E_2\to f^*V_2\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_2)\to 0,\\&0\to E_2\to E_3\to f^*V_3\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_3)\to 0,\\&\vdots\\&0\to E_{n-1}\to E_n=E\to f^*V_n\to 0.\end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1 $g\geqslant 4$, $(r,d)=1$ 时的情形

文献 [7] 研究了当 $g\geqslant 4$, $(r,d)=1$ 时, 模空间里的小有理曲线, 证明了模空间 M 里小有理曲线的轨迹包含 $r-1$ 个不可约分支. 本小节都假设 $g\geqslant 4$, $(r,d)=1$.

设正整数 ε 满足 $0<\varepsilon<r$, 令

$$\begin{aligned}R_\varepsilon=\{&[W]\in M=SU_C(r,\mathcal{L})\mid \text{存在子丛 } V_1\subset W \text{ 满足 } r_1d-rd_1=\varepsilon,\\&\text{其中 } r_1 \text{ 和 } d_1 \text{ 分别表示 } V_1 \text{ 的秩和次数}\}.\end{aligned}$$

显然次数为 ε 的分裂型有理曲线一定落在子集 R_ε 中. 文献 [7] 证明了次数为 ε 的分裂型有理曲线在不可约的非空子集 R_ε 中稠密 (参见文献 [7, 引理 2.7] 和 [21, 命题 1.6]), 而且若 $0<i\neq j<r$, 则 R_i 与 R_j 互不包含 (参见文献 [7, 命题 3.4]). 设 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是模空间 M 中的一条 ε 次的小有理曲线. 设 E 是定义它的向量丛, 则 E 可由一系列扩张 (5.2) 得到. 设 V_1 的秩和次数分别为 r_1 和 d_1, 则此时次数公式为

$$(r_1d-rd_1)(\alpha_1-\alpha_2)+r\sum_{i=2}^{n-1}(\mu(E)-\mu(E_i)\mathrm{rk}E_i(\alpha_i-\alpha_{i+1}))=\varepsilon. \tag{5.3}$$

由此可得

$$(r_1d-rd_1)\leqslant\varepsilon.$$

而有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 中的每一点都以 V_1 作为其子丛, 因此,

$$\phi(\mathbb{P}^1)\subset R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_\varepsilon. \tag{5.4}$$

从而有下面的命题:

命题 5.1 (参见文献 [7, 命题 4.2(3)]) 假设 $g\geqslant 4$, $(r,d)=1$, $0<\varepsilon<r$. 模空间 M 中次数小于等于 ε 的小有理曲线的轨迹有 ε 个不可约分支, 这 ε 个不可约分支的闭包是 $R_1,R_2,\ldots,R_\varepsilon$.

5.2 $d=1$ 的情形

定义小有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 的向量丛 E 满足一系列的扩张 (5.2). 当 $d=1$ 时, 易验证如下引理:

引理 5.2 (参见文献 [8, 引理 2.1]) (1) 对所有的 $1\leqslant i\leqslant n-1$, E_i 都是 C 上由 $\mathbb{P}^1$ 参数化的 0 次半稳定丛族.

(2) 对所有的 $1\leqslant i\leqslant n-1$, V_i 都是 0 次半稳定丛; V_n 是 1 次稳定丛.

当 $d=1$ 时, 小有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 的次数公式为

$$\deg(\phi^*(\Theta))=\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{rk}(E_i)(\alpha_i-\alpha_{i+1}). \tag{5.5}$$

令 n 是一个小于或等于 r 的正整数, 固定 n 个正整数 $r_1<\cdots<r_{n-1}<r_n=r$ 使得对某 n 个整数 $\alpha_1>\cdots>\alpha_{n-1}>\alpha_n$ 满足不等式

$$\sum_{i=1}^{n-1}r_i(\alpha_i-\alpha_{i+1})<r. \tag{5.6}$$

令 $d_1=\cdots=d_{n-1}=0$ 和 $d_n=1$, 定义 $M=SU_C(r,\mathcal{L})$ 的一个子集 $S_{r_1,\ldots,r_n}$ 为

$$\begin{aligned}S_{r_1,\ldots,r_n}:=\Big\{&[E]\in M\mid E\text{ 有一个分解 }0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=E\text{ 使得对任意的}1\leqslant i\leqslant n,\\&\frac{E_i}{E_{i-1}}\text{ 是秩为 }r_i-r_{i-1}\text{、次数为 }d_i-d_{i-1}\text{ 向量丛}\Big\}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

由上文的描叙可知, 所有的小有理曲线都落在子集

$$S=\bigcup_{r_1<\cdots<r_n=r}S_{r_1,\ldots,r_n}$$

里, 其中 $r_1<\cdots<r_n=r$ 遍历所有满足不等式 (5.6) 的正整数组.

命题 5.3 (i) $S_{r_1,\ldots,r_n}$ 是 M 里的 Zariski- 闭子集, 因此可以将其看作 M 的一个既约闭子概型.

(ii) 存在一个概型 Σ 和存在 $C\times\Sigma$ 上的一个秩为 r 的向量丛 $\mathbb{E}$ 带有一个分解

$$0\subset\mathbb{E}_1\subset\cdots\subset\mathbb{E}_{n-1}\subset\mathbb{E}_n=\mathbb{E}$$

使得 $\mathbb{E}_i/\mathbb{E}_{i-1}$ 是秩为 r_i-r_{i-1} 的向量丛, 且对任意 $\sigma\in\Sigma$, $\mathbb{E}_i/\mathbb{E}_{i-1}$ 在 $C\times\{\sigma\}$ 上的限制的次数为 d_i-d_{i-1}.

证明 由模空间的构造知, M 可看作是一个商概型的子概型 R 模一个既约群 G 得到的良好商. 存在 $C\times R$ 上的一个向量丛 $\mathbb{E}'$, 其在 $C\times\{q\}$ 上的限制恰是由 q 在 M 的像所代表的向量丛. $\mathbb{E}'$ 在闭包 $C\times\overline{R}$ 上延伸所得的凝聚层依然记为 $\mathbb{E}'$.

下面递减归纳地定义代数簇 $\{Q_i\}$ 和在 $C\times Q_i$ 上的向量丛 $\{\mathbb{E}'_i\}_{n\geqslant i\geqslant 1}$.

令 $Q_n=\overline{R}$, $\mathbb{E}'_n=\mathbb{E}'$. 对任意的 $1<i\leqslant n$, 假设 Q_i 和 $C\times Q_i$ 上的向量丛 $\mathbb{E}'_i$ 已经定义了. 令 Q_{i-1} 为相对商概型 $\mathrm{Quot}_{C\times Q_i/Q_i}(\mathbb{E}'_i)$ 的一个闭子概型, Q_{i-1} 参数化 $\mathbb{E}'_i$ 限制在每条纤维 $C\times\{q\}$ 上的秩为 r_i-r_{i-1}、次数为 d_i-d_{i-1} 的商丛. 已知存在 $C\times Q_i\times_{Q_i}Q_{i-1}=C\times Q_{i-1}$ 上的泛商丛

$$\mathbb{E}'_i\otimes\mathcal{O}_{C\times Q_{i-1}}\to\mathcal{V}_i\to 0.$$

令 $\mathbb{E}'_{i-1} = \mathrm{Ker}(\mathbb{E}'_i \otimes \mathcal{O}_{C\times Q_{i-1}} \to \mathcal{V}_i)$. 投射合成 $Q_1 \to Q_2 \to \cdots \to Q_{n-1} \to Q_n = \overline{R}$ 的像和 R 的交 $\widetilde{S}$ 是闭子集且是 G- 不变的. 因此 $\widetilde{S}$ 在 M 中的像, 即 $S_{r_1,\ldots,r_n}$, 是 M 的闭子集.

令 $\Sigma = R \times_{\overline{R}} Q_1$, $\mathbb{E}_i$ 是 $\mathbb{E}'_i$ 到 $C \times \Sigma = (C \times Q_i) \times_{Q_i} \Sigma$ 上的拉回, 则易证由此定义的 Σ 和 $\mathbb{E}_i$ 具有所需性质.

令 W 是对应于 $S_{r_1,\ldots,r_n}$ 的某个分支一般点 $[W] \in M$ 的向量丛, 则 W 有分解

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset W_n = W,$$

使得对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$, $V_i := W_i/W_{i-1}$ 是秩为 $r_i - r_{i-1}$、次数为 $d_i - d_{i-1}$ 的向量丛. 令

$$a_n := \dim\, U_C(r_n - r_{n-1}, 1) + \mathrm{ext}^1(V_n, W_{n-1}) - 1,$$

且令

$$a_i := \dim\, U_C(r_i - r_{i-1}, 0) + \mathrm{ext}^1(V_i, W_{i-1}) - 1, \quad 1 < i < n.$$

则

$$\dim\, S_{r_1,\ldots,r_n} \leqslant \dim\, U_C(r_1, 0) + a_2 + \cdots + a_n - g. \tag{5.8}$$

因为 $\mu(V_n) > \mu(W_{n-1})$, 所以 $\mathrm{Hom}(V_n, W_{n-1}) = 0$,

$$\mathrm{ext}^1(V_n, W_{n-1}) = -\chi(V_n^* \otimes W_{n-1}) = (r_n - r_{n-1})r_{n-1}(g-1) + r_{n-1},$$

因此,

$$a_n = r_n(r_n - r_{n-1})(g-1) + r_{n-1}.$$

对于半稳定的向量丛 V, 只要 $\mathrm{rk}V + \deg V \geqslant 0$, 则有 $h^1(V) \leqslant \mathrm{rk}V \cdot g$ (参见文献 [8, 引理 2.3]). 由此, 对 $2 \leqslant i \leqslant n-1$, 有

$$a_i \leqslant r_i(r_i - r_{i-1})(g-1) + r_{i-1}(r_i - r_{i-1}),$$

从而,

$$\begin{aligned}\dim\, U_C(r_{i-1}, 0) + a_i &\leqslant r_{i-1}^2(g-1) + 1 + r_i(r_i - r_{i-1})(g-1) + r_{i-1}(r_i - r_{i-1}) \\ &= \dim\, U_C(r_i, 0) - r_{i-1}(r_i - r_{i-1})(g-2).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\dim\, S_{r_1,\ldots,r_n} &\leqslant \dim U_C(r_1, 0) + a_2 + \cdots + a_n - g \\ &\leqslant \cdots \leqslant \dim\, U_C(r_{n-1}, 0) - \sum_{i=2}^{n-1} r_{i-1}(r_i - r_{i-1})(g-2) + a_n - g \\ &= (r_n^2 - 1)(g-1) - \left(\sum_{i=2}^{n} r_{i-1}(r_i - r_{i-1})(g-2) + r_{n-1}(r_n - r_{n-1} - 1)\right).\end{aligned}$$

故有

$$\mathrm{Codim}\, S_{r_1,\ldots,r_n} \geqslant \sum_{i=2}^{n} r_{i-1}(r_i - r_{i-1})(g-2) + r_{n-1}(r_n - r_{n-1} - 1). \tag{5.9}$$

命题证毕. □

定理 5.4 (参见文献 [8, 定理 2.4]) 模空间 M 里的所有小有理曲线都落在闭子簇

$$S=\bigcup_{0<r_1<\cdots<r_n=r} S_{r_1,\ldots,r_n}$$

中, 此闭子簇的余维数至少是

$$\min_{0<r_1<\cdots<r_n=r}\left\{\sum_{i=2}^{n} r_{i-1}(r_i-r_{i-1})(g-2)+r_{n-1}(r_n-r_{n-1}-1)\right\},$$

其中 $0<r_1<\cdots<r_n=r$ 和 $0<r_1<\cdots<r_n=r$ 遍历所有满足不等式 (5.6) 的正整数组.

特别当 $r=3, d=1$ 时, 模空间的小有理曲线是分裂型直线或 2 次小有理曲线. 设 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 是 2 次小有理曲线, E 是定义此小有理曲线的向量丛, 则有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{rk}E_i(\alpha_i-\alpha_{i+1})=2, \tag{5.10}$$

从而 E 必满足以下条件之一:

(I) 向量丛 E 满足正合列

$$0\to f^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)\to E\to f^*V_2\to 0,$$

其中 V_1 和 V_2 分别是秩为 1 和 2、次数为 0 和 1 的向量丛.

(II) 向量丛 E 满足正合列

$$0\to f^*V_1\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\to E\to f^*V_2\to 0,$$

其中 V_1 和 V_2 分别是秩为 2 和 1、次数为 0 和 1 的向量丛.

由此可完全确定模空间 $M=SU_C(3,\mathcal{L})$ $(\deg(\mathcal{L})=1)$ 中的 2 次小有理曲线. 令 J_C 是 C 的 Jacobi 簇, $U_C(2,1)$ 是 C 上秩为 2、次数为 1 的稳定向量丛的模空间. 令 $\mathcal{R}\subset J_C\times U_C(2,1)$ 是由满足 $\xi\otimes\det(V_2)\cong\mathcal{L}$ 的 $([\xi],[V_2])$ 构成的子簇. 可构造射影丛 $q:\mathcal{P}\to\mathcal{R}$ 使得, 对任意 $([\xi],[V_2])\in\mathcal{R}$, 有 $q^{-1}(([\xi],[V_2]))\cong\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(V_2,\xi)$. 令 $SU_C(2,0)$ 是 $U_C(2,0)$ 中稳定丛构成的开子集, 且令 J_C^1 是 C 上 1 次线丛的模空间. 令 $\mathcal{R}'\subset SU_C(2,0)\times J_C^1$ 是由满足 $\det(V_1)\otimes\xi'\cong\mathcal{L}$ 的 $([V_1],[\xi'])$ 构成的闭子簇. 通过 Hecke 变换, 可构造簇 $\mathbb{P}(\mathcal{V}^\vee)^s$ 参数化一族秩为 2、次数为 0 稳定向量丛, 且到 $SU_C(2,0)$ 有满射. 令 $T=(\mathbb{P}(\mathcal{V}^\vee)^s\times J_C^1)\times_{SU_C(2,0)\times J_C^1}\mathcal{R}'$, 则有满态射 $\theta':T\to\mathcal{R}'$. 我们也可构造射影丛 $q':\mathcal{P}'\to T$ 使得对任意 $([V_1],[\xi'])\in\mathcal{R}'$ 和任意 $t\in\theta'^{-1}([V_1],[\xi'])$, 有 $q'^{-1}(t)\cong\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(\xi',V_1)$. 我们有下面的定理:

定理 5.5 (参见文献 [8, 定理 1.1]) 存在态射 $\Phi:\mathcal{P}\to M$ 和 $\Psi:\mathcal{P}'\to M$ 使得由以下方式得到的有理曲线都是小有理曲线且任何 2 次小有理曲线 $\phi:\mathbb{P}^1\to M$ 也一定可由以下方式得到:

(i) 它是 q 的某个纤维里 2 次有理曲线 (在 Φ 映射下) 的像;

(ii) 它是 q 的某个纤维里直线的二重覆盖 (在 Φ 映射下) 的像;

(iii) 它是 $\mathcal{P}$ 里一条不在 q 的任何一条纤维里的且其映成某个 $U_C(2,\mathcal{L}')$ 里的一条直线的直线 (在 Φ 映射下) 的像;

(iv) 它是 q' 的纤维里的直线 (在 Ψ 映射下) 的像.

6 模空间 $M = SU_C(2, \mathcal{L})$ 的 k 次有理曲线空间 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$

假设 $M = SU_C(2, \mathcal{L})$ 是秩为 2 且具有固定行列式 $\mathcal{L}$ 的稳定向量丛的模空间, 其中 $\deg\mathcal{L} = 1$. 由文献 [22] 知, M 是有理簇从而是有理连通簇. 一个问题是, 有理连通簇的有理曲线空间本身是否是有理连通的?

极大有理连通纤维化 (maximal rationally connected fibration, MRC) (参见文献 [5]) 可用来估计一个簇 Z 离有理连通簇有多远. 它是指一个有理映射 $\psi : Z \dashrightarrow X$ 使得其一般纤维是有理连通的且 X 不是 uniruled. 光滑射影簇的 $\mathrm{MRC}(Z, \psi)$ 存在且在相差一个双有理变换下是唯一的.

文献 [10] 通过对 E 的一般分裂型的研究, 找到了 M 中 k 次有理曲线空间的所有不可约分支, 特别地, 找到了这些分支的一个极大有理连通纤维化.

6.1 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 中不可约子簇 $\mathcal{M}(a, e)$ 的构造

文献 [10] 对每一对遍历

$$\left\{(a, e) \;\middle|\; k \geqslant a \geqslant \frac{k}{2}, \frac{k-a}{2a-k} \geqslant e > 0\right\} \cup \{(k, 0)\} \tag{6.1}$$

的整数 (a, e) 构造了 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 的不可约子簇 $\mathcal{M}(a, e)$. 由于篇幅所限, 我们只对 $a \geqslant \frac{k}{2}$, $e = \frac{k-a}{2a-k}$ 情形回顾不可约子簇 $\mathcal{M}(a, e)$ 的构造. 给定 $L \in \mathrm{Pic}^{-e}(C)$, 考虑非平凡扩张

$$0 \to L \to E \to L^{-1} \otimes \mathcal{L} \to 0, \tag{6.2}$$

令

$$V_L = \mathrm{Ext}^1(L^{-1} \otimes \mathcal{L}, L), \tag{6.3}$$

则非平凡扩张 (6.2) 的同构类可被射影空间 $\mathbb{P}(V_L)$ 参数化. 令

$$Z_L = \{[0 \to L \to E \to L^{-1} \otimes \mathcal{L} \to 0] \mid E \text{ 不是稳定向量丛}\}$$

是 $\mathbb{P}(V_L)$ 的一个闭子簇. 当 L 遍历 $\mathrm{Pic}^{-e}(C)$ 中所有线丛时, 设 $\mathcal{V}$ 是 $C \times \mathrm{Pic}^{-e}(C)$ 上的一个泛丛. 令

$$\mathcal{S} = R^1\pi_{\mathrm{Pic}^{-e}(C)*}\mathcal{H}om(\mathcal{V}^{-1} \otimes \pi_C^*\mathcal{L}, \mathcal{V}),$$

其中 $\pi_{\mathrm{Pic}^{-e}(C)} : C \times \mathrm{Pic}^{-e}(C) \to \mathrm{Pic}^{-e}(C)$, $\pi_C : C \times \mathrm{Pic}^{-e}(C) \to C$ 是投射. 令 $\mathbb{P}(\mathcal{S})$ 是 $\mathcal{S}$ 的射影丛,

$$p : \mathbb{P}(\mathcal{S}) \to \mathrm{Pic}^{-e}(C)$$

是投射, 则存在 $C \times \mathbb{P}(\mathcal{S})$ 上的泛扩张

$$0 \to p^*\mathcal{V} \otimes O_{\mathbb{P}(\mathcal{S})}(1) \to \mathcal{G} \to p^*(\mathcal{V}^{-1}) \otimes \mathcal{L} \to 0. \tag{6.4}$$

令 $Z = \{(L, [0 \to L \to E \to L^{-1} \otimes \mathcal{L} \to 0]) \mid L \in \mathrm{Pic}^{-e}(C), E \text{ 不是稳定向量丛}\}$ 是 $\mathbb{P}(\mathcal{S})$ 的一个闭子簇, 则泛扩张 (6.4) 诱导态射

$$\kappa : \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z \to M. \tag{6.5}$$

对任意 $L \in \mathrm{Pic}^{-e}(C)$, 有 $p^{-1}(L) \cong \mathbb{P}(V_L)$, $p^{-1}(L) \cap Z \cong Z_L$. 记 $\kappa_L := \kappa\,|_{p^{-1}(L)\setminus Z_L}$, 则有态射

$$\kappa_L : \mathbb{P}(V_L) \setminus Z_L \to M. \tag{6.6}$$

易证 p 的纤维中每一条 $2a-k$ 次有理曲线的像都是模空间 M 中的 k 次有理曲线 (利用孙的次数公式 (2.1) 很容易计算). 令 $\mathrm{Hom}_{2a-k}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z)$ 表示由 p 的纤维中的 $2a-k$ 次有理曲线所构成的相对 Hilbert 概型, 则有典范态射

$$\pi_{(a,e)} : \mathrm{Hom}_{2a-k}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z) \to \mathrm{Pic}^{-e}(C). \tag{6.7}$$

态射 $\kappa : \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z \to M$ 可诱导态射

$$\psi_{(a,e)} : \mathrm{Hom}_{2a-k}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z) \to \mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M). \tag{6.8}$$

令 $\mathcal{M}(a,e)$ 表示 $\psi_{(a,e)}$ 的像.

特别地, 当 $k = 2e+1$ 是奇数时, 此时 $a = e+1$, $2a-k = 1$, ψ 的像 $\mathcal{M}(e+1,e)$ 有更精确的信息. 对任意 $L \in \mathrm{Pic}^{-e}(C)$, 计算可得 $\mathrm{dim} Z_L = 2e+g$ 且 Z_L 在 $P(V_L)$ 中的余维数至少是 g. 此时 p 的纤维中每一条直线的像都是模空间 M 中的 k 次有理曲线, 因此, 态射 $\psi_{(e+1,e)}$ 是

$$\psi_{(e+1,e)} : \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z) \to \mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M). \tag{6.9}$$

$\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z)$ 是一个光滑的不可约簇, 且它的维数是

$$\mathrm{dim}(\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}))) = g + 2(2e+g-1) + 1 = 2k+3g-3. \tag{6.10}$$

与第 4.2 小节中证明 $\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}) \to \mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1, M)$ 是单射的方法一样, 可证明 $\psi_{(e+1,e)}$ 是单射, 因此, $\psi_{(e+1,e)}$ 的像 $\mathcal{M}(e+1,e)$ 的闭包双有理同构于 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z)$, 它是 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 的一个不可约闭子簇,

$$\mathrm{dim}\mathcal{M}(e+1,e) = 2k+3g-3. \tag{6.11}$$

6.2 $\mathbf{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 中不可约子簇 M_E 的构造

当 $k = 2e$ 是偶数时, 取 $D \in \mathrm{Sym}^e(C)$, $\mathcal{E} \in SU_C(2, \mathcal{L}(-D))$. 令 $V_{D,\mathcal{E}} := \mathrm{Ext}^1(O_D, \mathcal{E})$, 则

$$\mathrm{dim} V_{D,\mathcal{E}} = 2e.$$

考虑非平凡扩张

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to O_D \to 0, \tag{6.12}$$

它的同构类可被射影空间 $\mathbb{P}(V_{D,\mathcal{E}})$ 参数化. 令

$$Z_{D,\mathcal{E}} = \{[0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to O_D \to 0] \mid \mathcal{E}' \text{ 不是稳定向量丛}\}$$

是 $\mathbb{P}(V_{D,\mathcal{E}})$ 的一个闭子簇. 对于一般的稳定向量丛 $\mathcal{E} \in SU_C(2, \mathcal{L}(-D))$, $Z_{D,\mathcal{E}}$ 在 $\mathbb{P}(V_{D,\mathcal{E}})$ 中余维数是 2 (参见文献 [10, 引理 3.1,3.2]). 令

$$\eta_{D,\mathcal{E}} : \mathbb{P}(V_{D,\mathcal{E}}) \setminus Z_{D,\mathcal{E}} \to M \tag{6.13}$$

是把与扩张 (6.12) 的相关点映成 $\mathcal{E}'$ 的同构类对应的 M 中的点. 通过计算 (参见文献 [10, 引理 A.1]) 可知, $\mathbb{P}(V_{D,\mathcal{E}})$ 的任一条直线在 $\eta_{D,\mathcal{E}}$ 下的像是 M 中的一条 k 次有理曲线. 当 $D \in \mathrm{Sym}^e(C)$, $\mathcal{E} \in SU_C(2, \mathcal{L}(-D))$ 变动时, 与 Hecke 曲线的整体构造类似, 我们可构造如下.

令 M_{1-e} 表示曲线 C 上的秩为 2、次数为 $1-e$ 的半稳定向量丛的模空间, 且令 $M^s_{1-e} \subset M_{1-e}$ 为稳定轨迹. 概型 M_{1-e} 是一个光滑的拟射影簇 $\overline{M}_{1-e}$ 的通过代数群 $\mathrm{PGL}(r)$ 作用的几何商. 令 $\tau : \overline{M}_{1-e} \to M_{1-e}$ 是商映射, 且令 $\overline{M}^s_{1-e} = \tau^{-1}(M^s_{1-e})$. 定义

$$\theta : \mathrm{Pic}^{1-e}(C) \to \mathrm{Pic}^e(C), \quad L \mapsto L \otimes \mathcal{L},$$

$\det : M_{1-e} \to \mathrm{Pic}^{1-e}(C)$ 是取行列式映射. 利用合成 $\theta \circ (\det) \circ \tau : \overline{M}^s_{1-e} \to \mathrm{Pic}^e(C)$, 定义

$$\mathfrak{S} = \overline{M}^s_{1-e} \times_{\mathrm{Pic}^e(C)} \mathrm{Sym}^e(C). \tag{6.14}$$

令 $\mathcal{D} \subset \mathfrak{S} \times C$ 是 $\mathrm{Sym}^e(C) \times C$ 的泛概型的拉回, $\mathcal{V}$ 是 $\overline{M}_{1-e} \times C$ 上的一个泛丛,

$$p : W = \mathbb{P}(\mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{S}\times C|\mathfrak{S}}(O_{\mathcal{D}}, \mathcal{V})) \to \mathfrak{S}$$

是射影丛, 则有 $W \times C$ 上的泛扩张

$$0 \to p^*\mathcal{V} \otimes O_W(1) \to \mathfrak{J} \to p^*O_{\mathcal{D}} \to 0. \tag{6.15}$$

令 $\mathcal{Z}$ 是 W 中不是局部自由的扩张或不是稳定的扩张的轨迹, 则 (6.15) 可定义态射

$$\eta : W \setminus \mathcal{Z} \to M. \tag{6.16}$$

令 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W \setminus \mathcal{Z})$ 表示由 $p : W \to \mathfrak{S}$ 的纤维中 1 次有理曲线所成的相对 Hilbert 概型. 存在典范态射

$$\sigma : \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W \setminus \mathcal{Z}) \to \mathfrak{S}, \tag{6.17}$$

其纤维是簇 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(V_{D,\mathcal{E}}) \setminus Z_{D,\mathcal{E}})$. 令 $N = \mathrm{dimPGL}(r) + e - 1$, 则

$$\dim(\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W)) = \dim\mathfrak{S} + (4e-1) = (2k+3g-3) + N.$$

态射 $\eta : W \setminus \mathcal{Z} \to M$ 诱导出态射

$$\phi : \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W \setminus \mathcal{Z}) \to \mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M).$$

令 M_E 是 ϕ 的像.

6.3 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 中不可约分支

如果 X 是一个光滑射影簇且 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ 是一个态射, $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ 的不可约分支的维数有一个下界 (参见文献 [23, 定理 2.6])

$$\chi(\mathbb{P}^1, f^*T_X) = \deg(f^*T_X) + \dim(X).$$

称此维数为 $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ 在点 f 处的期望维数 (expected dimension). 由形变理论 (参见文献 [23, 命题 2.4]) 知, $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ 在点 f 处的切空间为 $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$. 如果 $H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X) = 0$, 则称点 f 是畅通的 (unobstructed).

定理 6.1 (参见文献 [10, 定理 1.3]) 对任意 $k \geqslant 1$, 存在 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 的一个良好 (nice) 不可约分支 $\mathcal{M}$ 满足:

(i) 它有期望维数 $2k+3g-3$ 且其一般点是畅通的;

(ii) $\mathcal{M}$ 的 MRC 纤维化可由 C 的 Jacobi 簇 $J(C)$ 给出 $\mathcal{M} \dashrightarrow J(C)$.

证明 当 $k=2e+1$ 是奇数时, 令 $\mathcal{M}$ 为 $\psi_{(e+1,e)}: \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z) \to \mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 的像 $M(e+1,e)$ 的闭包. $\mathcal{M}$ 是双有理同构于 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z)$ 的 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 的不可约的 $2k+3g-3$ 维闭子簇. 对于一般点 $f: \mathbb{P}^1 \to M \in \mathcal{M}$, 定义 f 的向量丛的一般分裂型为 $(e+1,e)$, 由文献 [10, 引理 A.2] 知 $H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_M)=0$, 从而 f 是畅通的. 这就证明了 (i). 因为典范态射 $\pi_{(e+1,e)}: \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z) \to \mathrm{Pic}^{-e}(C)$ 是有理的, 所以, 它给出了 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z)$ 的一个 MRC 纤维化. 而 $\mathcal{M}$ 是与 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus Z)$ 双有理同构的, 这就证明了 (ii).

当 $k=2e$ 是偶数时, 令 $\mathcal{M}$ 是 $\phi: \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W \setminus \mathcal{Z}) \to \mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 像 M_E 的闭包. 设 $h: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(V_{D,\mathcal{E}}) \setminus Z_{D,\mathcal{E}}$, $h': \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(V_{D',\mathcal{E}'}) \setminus Z_{D',\mathcal{E}'} \in \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W \setminus \mathcal{Z})$ 使得 $\phi(h)=\phi(h')$, 即 $\eta_{D,\mathcal{E}} \circ h = \eta_{D',\mathcal{E}'} \circ h'$. 由 (6.15), h 和 h' 分别由 $\mathbb{P}^1 \times C$ 上的以下正合列所定义:

$$0 \to \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{O}(1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_D \to 0, \tag{6.18}$$

$$0 \to \mathcal{E}' \boxtimes \mathcal{O}(1) \to \mathcal{F}' \to \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_{D'} \to 0. \tag{6.19}$$

与定理 4.2 中证明 $\mathbf{Hom}_1^r(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathcal{V}^*)) \to \mathbf{Hom}_1(\mathbb{P}^1, M)$ 是单射的讨论类似, 可得 $D=D'$, $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$, $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$. 因为 $\mathcal{E}$ 是稳定向量丛, 所以有 $\mathrm{End}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{C}^*$, 因此扩张 (6.18) 和 (6.19) 在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_D)$ 作用于 $V_{D,\mathcal{E}}$ 的同一轨道里. 从而, h 和 h' 在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_D)$ 作用于 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(V_{D,\mathcal{E}}))$ 的同一轨道里. 由此 ϕ 的一般纤维是 N 维的. 从而, ϕ 的像的闭包 $\mathcal{M}$ 是 $2k+3g-3$ 维的. 对于一般点 $(f: \mathbb{P}^1 \to M) \in \mathcal{M}$, 同样利用文献 [10, 引理 A.2] 可证 f 是畅通的, 这就证明了 (i). 对于 (ii), 考虑 $\pi: \mathfrak{S} \to \mathrm{Pic}^e(C)$ 与典范态射 $\sigma: \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W \setminus \mathcal{Z}) \to \mathfrak{S}$ 的合成

$$\theta: \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W \setminus \mathcal{Z}) \to \mathrm{Pic}^e(C).$$

注意到 π 的纤维是有理连通的, $p: W \to \mathfrak{S}$ 是一个射影丛, 典范态射 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W) \to \mathfrak{S}$ 是局部平凡的, 其纤维是 $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^r)$, 其中 $r=\mathrm{dim} V_{D,\mathcal{E}}-1=2e-1$. 从而 θ 的纤维是有理的, 特别地, 是有理连通的. 考虑态射 $\phi: \mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, W \setminus \mathcal{Z}) \to \mathcal{M}$. 因为 ϕ 的一般纤维是有理的, 从而 θ 诱导一个映射 $\mathcal{M} \dashrightarrow \mathrm{Pic}^e(C)$, 这就给出了 $\mathcal{M}$ 的一个 MRC 纤维化. □

注 6.2 由证明过程可以看出, 如果 k 是奇数, 那么良好分支是 $\overline{\mathcal{M}(\frac{k+1}{2}, \frac{k-1}{2})}$; 如果 k 是偶数, 那么良好分支不是任何一个 $\overline{\mathcal{M}(a,e)}$ (参见文献 [10, 定理 1.5]).

另外, 文献 [10] 还建立了 $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, M)$ 的不可约分支与 $C \times \mathbb{P}^1$ 上的某个秩为 2 的向量丛的模空间的一一对应, 并利用这个对应证明了以下定理.

定理 6.3 (参见文献 [10, 定理 1.4,1.5]) 对任意遍历

$$\left\{(a,e) \;\middle|\; k \geqslant a \geqslant \frac{k}{2}, \frac{k-a}{2a-k} \geqslant e > 0\right\} \cup \{(k,0)\} \tag{6.20}$$

的整数对 (a,e), 都存在 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 的不可约子簇 $\mathcal{M}(a,e)$ 使得其闭包 $\overline{\mathcal{M}(a,e)}$ 是 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 的不可约分支当且仅当其维数至少是期望维数 $2k+3g-3$. 这些不可约分支和良好不可约分支是 $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{P}^1, M)$ 的所有不可约分支.

7 秩 2 稳定向量丛模空间中的 1- 闭链

设 C 是一条亏格为 $g \geqslant 3$ 的光滑复射影曲线, 固定一点 $x_0 \in C$, 且设 M_{x_0} 是秩为 2 且具有固定行列式 $O_C(x_0)$ 的稳定向量丛的模空间, 则 M_{x_0} 是 $3g-3$ 维的光滑 Fano 簇. J 表示曲线 C 的 Jacobi 簇, 是曲线 C 上 0 次线丛的同构类集.

对任意代数簇 Y, 用 $\mathrm{CH}_i(Y)$ 表示 Y 上 i- 闭链的有理等价类的 Chow 群, 且用 $\mathrm{CH}_i(Y)_{\mathrm{hom}}$ 表示同调于 0 的闭链的子群. 由 Abel-Jacobi 定理可知,

$$\mathrm{CH}_0(C)_{\mathrm{hom}} \cong J.$$

用 $\mathrm{CH}_i^{\mathbb{Q}}(Y)$ 和 $\mathrm{CH}_i^{\mathbb{Q}}(Y)_{\mathrm{hom}}$ 表示有理系数的 Chow 群. 因为 M_{x_0} 是有理连通的, 所以,

$$\mathrm{CH}_0^{\mathbb{Q}}(M_{x_0}) \cong \mathbb{Q}.$$

因为 $\dim(M_{x_0}) = 3g-3$ 和 $\mathrm{Pic}(M_{x_0}) \cong \mathbb{Z}$, 所以,

$$\mathrm{CH}_{3g-4}^{\mathbb{Q}}(M_{x_0}) \cong \mathbb{Q}.$$

文献 [11] 通过对模空间 M_{x_0} 中 Hecke 曲线及其退化情形的研究计算了 $\mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0})$.

定理 7.1 (参见文献 [11, 主要定理]) 存在典范同构 $\mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0}) \cong \mathrm{CH}_0^{\mathbb{Q}}(J)$.

证明思路 (1) 由模空间 M_{x_0} 中直线和 M_{x_0} 中线性子簇的研究结果得到一个自然群同态

$$\chi : \mathrm{CH}_0(J) \to \mathrm{CH}_1(M_{x_0}).$$

(2) 通过对模空间 M_{x_0} 中 Hecke 曲线及其退化情形的研究证明同态 χ 模挠子群后是满射, 即有满射

$$\chi^{\mathbb{Q}} : \mathrm{CH}_0^{\mathbb{Q}}(J) \to \mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0}).$$

(3) 根据 $\mathrm{CH}_0(J)$ 上的 Bloch 分解 I^{*2} 和 Abel-Jacobi 映射及第 (2) 步结果可推出同构

$$\mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0}) \cong \mathrm{CH}_0^{\mathbb{Q}}(J).$$

证毕. □

7.1 模空间 M_{x_0} 上的直线

通过对模空间直线的研究, 我们知道 M_{x_0} 中任意直线上的点所对应的向量丛一定可由两个线丛扩张得到. 给定 $L \in J$, 令 $D_L := \{[E] \in M_{x_0} \mid E$ 包含一个与 L 同构的子线丛$\}$, 则 D_L 中的每一点都对应于 $L^{-1}(x_0)$ 通过 L 的一个扩张. 因此,

$$D_L \cong \mathbb{P}H^1(C, L^2(-x_0)).$$

令 $\mathcal{D} = \mathbb{P}(R^1(\pi_J)_*\mathcal{H}om(\mathcal{P}^{-1} \otimes \pi_C^* O_X(x_0), \mathcal{P}))$, $\pi : \mathcal{D} \to J$ 是投射, 其中 $\pi_C : C \times J \to C$, $\pi_J : C \times J \to J$ 是投射, $\mathcal{P}$ 是 $C \times J$ 上的泛丛, 则存在 $C \times \mathcal{D}$ 被 D 参数化的向量丛族 $\{\mathcal{E}_d\}_{d \in \mathcal{D}}$ 满足每一个 $\mathcal{E}_d$ 都是秩为 2 且具有固定行列式 $O_C(x_0)$ 的稳定向量丛 (参见文献 [2, 引理 2.4] 和 [3, 引理 3.1]), 由此可定义态射

$$\phi : \mathcal{D} \to M_{x_0}.$$

注意, 对任意 $L \in J$, 有

$$\pi^{-1}(L) \cong D_L.$$

令 $\rho : \mathcal{G} \to J$ 是相关的 Grassmannian 丛, 其纤维 $\rho^{-1}(L)$ 是 D_L 上的直线的 Grassmannian. 令 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{D}$ 在 J 之上的直线泛族, $p : \mathcal{U} \to \mathcal{D}$ 和 $q : \mathcal{U} \to \mathcal{G}$ 是相关联的态射, 则 $\mathcal{G}$ 双正则于 M_{x_0} 的直线的 Hilbert 概型, 且存在自然浸入 $i : \mathcal{U} \to \mathcal{G} \times M_{x_0}$, 把 $\mathcal{U}$ 可看作 M_{x_0} 的直线的泛族 (参见文献 [9, 定理 8]). 令

$$\psi := \phi \circ p : \mathcal{U} \to M_{x_0}.$$

注意 $\dim\mathcal{G} = 3g-4$ 和 $\mathcal{U}$ 在 $\mathcal{G} \times M_{x_0}$ 中的余维数是 $3g-4$. 可证如下命题:

命题 7.2 (参见文献 [11, 命题 2]) 基本类 $[\mathcal{U}] \in H^{6g-9}(\mathcal{G} \times M_{x_0}, \mathbb{Z})$ 的双次数为 $(1, 6g-9)$ 的 Kunneth 分支诱导出同构

$$[\mathcal{U}]^{1,6g-9} : H^{6g-8}(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \to H^{6g-8}(M_{x_0}, \mathbb{Z}).$$

7.2 Hecke 曲线及其退化

给定 $y \in C$, 令 M_{y-x_0} 是 C 上秩为 2 且具有固定行列式 $O(y-x_0)$ 的半稳定向量丛模空间, $M^s_{y-x_0} \subset M_{y-x_0}$ 是稳定点构成的开子集. 选取 $[E] \in M^s_{y-x_0}$ 和点 $\zeta \in \mathbb{P}(E_y)$. 令 $\zeta : E \to \mathcal{O}_y$ 是 ζ 的收缩, 且令 $\varepsilon(E,\zeta) = \ker(\zeta)$, 则有 $0 \to \varepsilon(E,\zeta) \to E \to \mathcal{O}_y \to 0$. 设 $\varepsilon(E,\zeta)^*$ 是 $\varepsilon(E,\zeta)$ 的对偶, 则

$$[\varepsilon(E,\zeta)] \in M_{-x_0} \quad 且 \quad [\varepsilon(E,\zeta)^*] \in M_{x_0}.$$

随着 ζ 在 $\mathbb{P}(E_y)$ 上变动, 向量丛族 $\{\varepsilon(E,\zeta)^*\}_{\zeta \in \mathbb{P}(E_y)}$ 定义了 M_{x_0} 上的一条有理曲线, 如此定义的有理曲线是 Hecke 曲线. 因此 $M^s_{y-x_0}$ 的每一点都给出 M_{x_0} 上的一条有理曲线, 从而定义了一个态射

$$\varphi_y : M^s_{y-x_0} \to \mathrm{CH}_1(M_{x_0}).$$

令 $\mathcal{H}_y$ 是 φ_y 的像的闭包. 因为对于 $(1,1)$- 稳定点 $[F] \in M_{x_0}$ 和给定的点 $y \in C$, 都有过点 $[F]$ 的 Hecke 曲线, 因此 $\mathcal{H}_y$ 中的元素可以扫出 M_{x_0} 的一个开子集. 下面来研究对应于 $\mathcal{H}_y \setminus \varphi_y(M^s_{y-x_0})$ 中点的 M_{x_0} 的 1- 闭链. 补集 $\mathcal{K}_{y-x_0} := M_{y-x_0} \setminus M^s_{y-x_0} = \{[L \oplus L^{-1}(y-x_0)] \mid L \in J\}$ 是射影簇 M_{y-x_0} 的奇异轨迹. 令 $\mathcal{K}^0_{y-x_0}$ 是 $\mathcal{K}_{y-x_0}$ 的光滑轨迹, 则

$$\mathcal{K}^0_{y-x_0} = \{[L \oplus L^{-1}(y-x_0)] \mid L^2 \ncong \mathcal{O}_X(y-x_0)\}.$$

$\mathcal{K}_{y-x_0}$ 与 J 的 Kummer 簇同构且其奇异轨迹包含有限多个节点. 关注 $\varphi_y : M^s_{y-x_0} \to \mathcal{H}_y$ 在 $\mathcal{K}^0_{y-x_0}$ 中点的附近的行为, 则有下面的命题:

命题 7.3 (参见文献 [11, 命题 9]) 固定点 $y \in C$. 给定 $L \in J$ 满足 $L^2 \ncong \mathcal{O}_X(y-x_0)$, 令

$$l = [L \oplus L^{-1}(y-x_0)]$$

是 $\mathcal{K}^0_{y-x_0}$ 中对应的点, 则存在 l 在 M_{y-x_0} 的一个解析邻域 U 使得

(i) $\varphi_y|_U : U \setminus \mathcal{K}_{y-x_0} \to \mathcal{H}_y$ 有一个解析延拓 $\widetilde{\varphi_y} : \widetilde{U} \to \mathcal{H}_y$, 其中 $\widetilde{U}$ 是 U 沿着 $U \cap \mathcal{K}_{y-x_0}$ 的爆破;

(ii) 位于 l 之上的任意点 $\xi \in \widetilde{U}$, $\widetilde{\varphi_y}(\xi) \in \mathcal{H}_y$ 对应于 M_{x_0} 中的一个 1- 闭链, 此闭链是 D_L 中的一条直线与 $D_{L(x_0-y)}$ 中的一条直线的和.

由以上命题可知, 对任意满足 $L^2 \ncong \mathcal{O}_X(y-x_0)$ 的 $L \in J$, 存在 $\mathcal{H}_y$ 中的点对应于 M_{x_0} 中的一个 1- 闭链, 此闭链是 D_L 中的一条直线与 $D_{L(x_0-y)}$ 中的一条直线的和. 因为 H_y 是完备的且直线族的极限也是直线, 所以通过取极限可得以下命题.

命题 7.4 (参见文献 [11, 命题 5]) 对每一个 $y \in C$ 和每一个 $L \in J$, 存在 $\mathcal{H}_y$ 中的点对应于 M_{x_0} 中的一个 1- 闭链, 此闭链包含 D_L 中的一条直线和 $D_{L(x_0-y)}$ 中的一条直线.

7.3 定理 7.1 的证明

众所周知, 对任意 $y \in C$, $\mathcal{H}_y$ 中的元素可以扫出 M_{x_0} 的一个开子集, 由文献 [5, 推论 IV.4.14] 可知, M_{x_0} 中任意两点都可被 $\mathcal{H}_y$ 中的 Hecke 曲线的连通链连接起来. 因此再由文献 [5, 命题 IV.3.13.3] 有以下命题.

命题 7.5 (参见文献 [11, 命题 7]) 固定任一点 $y \in C$, Chow 群 $\mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0})$ 可由不可约的既约 1- 闭链生成, 这些 1- 闭链都是 $\mathcal{H}_y$ 的元素的不可约分支.

保持前两节的符号, $\rho : \mathcal{G} \to J$ 是 M_{x_0} 中直线的 Hilbert 概型, $q : \mathcal{U} \to \mathcal{G}$ 和 $\psi : \mathcal{U} \to M_{x_0}$ 是相关的泛族态射, 则泛族给出一个自然同态

$$\widehat{\chi} : \mathrm{CH}_0(\mathcal{G}) \to \mathrm{CH}_1(M_{x_0}), \quad g \mapsto \psi(q^{-1}(g)).$$

因为 ρ 是 Grassmannian 丛, 所以有同构

$$\rho_* : \mathrm{CH}_0(\mathcal{G}) \cong \mathrm{CH}_0(J),$$

从而诱导出一个同态

$$\chi := \widehat{\chi} \circ \rho_*^{-1} : \mathrm{CH}_0(J) \to \mathrm{CH}_1(M_{x_0}). \tag{7.1}$$

命题 7.6 同态 χ 模挠子群后是满射, 即 $\chi^{\mathbb{Q}} : \mathrm{CH}_0^{\mathbb{Q}}(J) \to \mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0})$ 是满射.

证明 由命题 7.5 知, Chow 群 $\mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0})$ 可由不可约的既约 1- 闭链生成, 这些 1- 闭链都是 $\mathcal{H}_y$ 的元素的不可约分支. 因为 $\mathcal{H}_y$ 中的元素都是 2 次的, 所以其元素或是 2 次不可约有理曲线或是两条直线的和. 由命题 7.4 知, 确实存在 $\mathcal{H}_y$ 的元素是两条直线的和. 因为 $\mathcal{H}_y$ 是由 φ_y 从有理连通簇 $M_{y-x_0^s}$ 映过来的像的闭包, 所以 $\mathcal{H}_y$ 也是有理连通的. 因此 $\mathcal{H}_y$ 的每个不可约元有理等价于两条直线构成的 1- 闭链. 从而 $\mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0})$ 可由直线的闭链类生成, 这就证明了 $\chi^{\mathbb{Q}}$ 是满射. □

我们回顾一下关于 Abel 簇的 0-th Chow 群的 Bloch 分解 (内容来自文献 [24]). 对 $a \in A$, 用 $\{a\}$ 表示其在 $\mathrm{CH}_0(A)$ 中的类. 设 $I \subset \mathrm{CH}_0(A)$ 是子群 $I := \mathrm{CH}_0(A)_{\mathrm{hom}}$. 设 $I^{*2} \subset I$ 是 I 的 Pontryagin 平方, 即 I^{*2} 是由形如 $\{a+b\}-\{a\}-\{b\}-\{o\}$ $(a, b \in A)$ 的闭链生成的子群, 其中用加法表示 A 的群运算, 用 o 表示 A 的单位元. 由文献 [24, 第 II 部分引理 11.28] 知, 存在典范同构 $I/I^{*2} \cong A$. 令 $A = J$ 是 C 的 Jacobi 簇, $I = \mathrm{CH}_0(J)_{\mathrm{hom}}$, 则 $I/I^{*2} \cong J$. 通过计算可得以下关键命题.

命题 7.7 (参见文献 [11, 命题 9]) $I^{*2} \subset \mathrm{Ker}(\chi)$.

因此映射 $\chi\,|_{\mathrm{CH}_0(J)_{\mathrm{hom}}} : \mathrm{CH}_0(J)_{\mathrm{hom}} \to \mathrm{CH}_1(M_{x_0})_{\mathrm{hom}}$ 可诱导一个群同态

$$\overline{\chi} : \mathrm{CH}_0(X)_{\mathrm{hom}} = J = I/I^{*2} \to \mathrm{CH}_1(M_{x_0})_{\mathrm{hom}}. \tag{7.2}$$

对任意非奇异的代数簇 Y, 记 $J^{2k-1}(Y) \cong H^{2k-1}(Y, \mathbb{R})/H^{2k-1}(Y, \mathbb{Z})$ 为 Y 的中间 Jacobian.

命题 7.8 (参见文献 [11, 命题 10]) 设 $\gamma : \mathrm{CH}_1(M_{x_0})_{\mathrm{hom}} \to J^{6g-9}(M_{x_0})$ 是 Abel-Jacobi 映射, 则合成

$$\gamma \circ \overline{\chi} : J \to J^{6g-9}(M_{x_0}) \tag{7.3}$$

是一个同构.

证明 映射 $\rho : \mathcal{G} \to J$ 可看作 $\mathcal{G}$ 的 Albanese 映射, 则由 Albanese 映射的泛性质知, 映射 $\gamma \circ \overline{\chi}$ 恰是由泛族 $\mathcal{U} \to \mathcal{G}$ 诱导出的映射和 Abel-Jacobi 映射. 因此, 由文献 [24, 第 I 部分定理 12.17] 可知, 态射 $\gamma \circ \overline{\chi}$ 是由基本类 $[\mathcal{U}] \in H^{6g-9}(\mathcal{G} \times M_{x_0}, \mathbb{Z})$ 给出的 Hodge 结构态射

$$H^{6g-8}(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \to H^{6g-8}(M_{x_0}, \mathbb{Z})$$

所诱导的. 由命题 7.2 知这是一个同构. □

由以上命题可知,

$$\overline{\chi}^{\mathbb{Q}} : \mathrm{CH}_0^{\mathbb{Q}}(X)_{\mathrm{hom}} = J = I/I^{*2} \to \mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0})_{\mathrm{hom}}$$

是一个单射. 再由 $H_0(X, \mathbb{Q}) \cong H^2(M_{x_0}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ 和命题 7.6 得到同构

$$\mathrm{CH}_1^{\mathbb{Q}}(M_{x_0}) \cong \mathrm{CH}_0^{\mathbb{Q}}(X). \tag{7.4}$$

注 7.9 Iyer [12] 对于具有秩为 2 的平凡行列式的向量丛的模空间, 证明了由 Abel-Jacobi 映射可以诱导出同构

$$\mathrm{CH}_1(SU_C(2, O_C))_{\mathrm{hom}} \otimes \mathbb{Q} \cong J \otimes \mathbb{Q},$$
$$\mathrm{CH}_1(U_C(2, O_C))_{\mathrm{hom}} \otimes \mathbb{Q} \cong J \otimes \mathbb{Q}.$$

参考文献

1 Drezet J M, Narasimhan M S. Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semistables sur les courbes algébriques. Invent Math, 1989, 97: 53–94
2 Ramanan S. The moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve. Math Ann, 1973, 200: 69–84
3 Sun X T. Minimal rational curves on the moduli spaces of stable bundles. Math Ann, 2005, 331: 925–937
4 Liu M. Remarks on minimal rational curves on moduli spaces of stable bundles. C R Math Acad Sci Paris, 2016, 354: 1013–1017
5 Kollár J. Rational Curves on Algebraic Varieties. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 3. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1999
6 Mok N M, Sun X T. Remarks on lines and minimal rational curves. Sci China Ser A, 2009, 52: 617–630
7 Choe I. Loci of rational curves of small degree on the moduli space of vector bundles. Bull Korean Math Soc, 2011, 48: 377–386
8 Liu M. Small rational curves on the moduli space of stable bundles. Internat J Math, 2012, 23: 1–15
9 Kilaru S. Rational curves on moduli spaces of vector bundles. Proc Indian Acad Sci Math Sci, 1998, 108: 217–226
10 Castravet A M. Rational families of vector bundles on curves. Internat J Math, 2004, 15: 13–45
11 Choe I, Hwang J M. Chow group of 1-cycles on the moduli space of vector bundles of rank 2 over a curve. Math Z, 2006, 253: 281–293
12 Iyer J N. The Abel-Jacobi isomorphism on one cycles on the moduli space of vector bundles with trivial determinant on a curve. ArXiv:0904.1499, 2009
13 Sun X T. Elliptic curves in moduli spaces of stable bundles. Pure Appl Math Q, 2011, 7: 1761–1783
14 Narasimhan M S, Ramanan S. Deformations of the moduli space of vector bundles over an algebraic curve. Ann of Math (2), 1975, 101: 391–417

15 Narasimhan M S, Ramanan S. Geometry of Hecke cycles I. In: C.P.Ramanujam-atribute. New York: Springer-Verlag, 1978: 291–345
16 Hwang J M. Hecke curves on the moduli space of vector bundles over an algebraic curve. In: Proceedings of the Symposium Algebraic Geometry in East Asia. Kyoto: World Scientific, 2001, 155–164
17 Hwang J M. Tangent vectors to Hecke curves on the moduli space of rank 2 bundles over an algebraic curve. Duke Math J, 2000, 101: 179–187
18 Hwang J M, Ramanan S. Hecke curves and Hitchin discriminant. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2004, 37: 801–817
19 Mok N M, Sun X T. Erratum to: Remarks on lines and minimal rational curves. Sci China Math, 2014, 57: 1992–1992
20 Nagata M. On self intersection number of vector bundles of rank 2 on a Rieman surface. Nagoya Math J, 1970, 37: 191–196
21 Russo B, Bigas M T. On a conjecture of Lange. J Algebraic Geom, 1999, 8: 483–496
22 Newstead P E. Rationality of moduli spaces of stable bundles. Math Ann, 1975, 215: 251–268
23 Debarre O. Higher-Dimensional Algebraic Geometry. New York: Springer-Verlag, 2001
24 Voisin C. Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I, II. Cambridge studies in advanced mathematics, vols. 76 and 77. Cambridge: Cambridge University Press, 2003

Rational curves on the moduli spaces of stable bundles

LIU Min & SUN XiaoTao

Abstract In this paper, we give an account of rational curves in moduli spaces of stable vector bundles on a smooth curve.

Keywords **moduli space of stable bundles, Hecke curves, lines of split type, minimal rational curves, small rational curves, Chow group**

MSC(2010) **14-02, 14H60, 14D20, 14F05, 14E**

doi: 10.1360/N012016-00247