Ricci 曲率以及度量球局部回卷体积有下界的 Riemann 流形

献给胡和生教授 90 华诞

戎小春^{1,2}

1. 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048;

2. Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08903, USA

E-mail: rong@math.rutgers.edu

收稿日期: 2017-11-10; 接受日期: 2018-03-30; 网络出版日期: 2018-04-20

首都师范大学引进人才科研支持 (批准号: 007175548600) 资助项目

摘要 本文是一篇关于 Ricci 曲率与固定半径度量球的局部回卷体积有下界流形 M 的近期研究综述. 所谓在点 $x \in M$ 处的度量球 $B_r(x)$ 的局部回卷体积, 是指 $B_r(x)$ 的 (不完备的) 万有覆叠上以基本点为中心、 r 为半径的度量球体积.

关键词 度量 Riemann 几何 Gromov-Hausdorff 收敛 Cheeger-Colding 理论 局部回卷体积

MSC (2010) 主题分类 53C20, 53C21, 53C23, 53C24

1 引言

当 n 维 Riemann 流形 M 满足某种曲率条件时, 对 M 的几何与拓扑结构联系的研究当中, 一个核心的问题是, 当 r 是一个固定的 (小) 正数 (可能依赖于 n , 但不依赖于流形) 时, 关于在点 p 处的以 r 为半径的度量球 $B_r(p) = \{x \in M \mid d(x, p) < r\}$ 的结构能说些什么? 注意这个问题在截面曲率两边有界 ($|\text{Sec}_M| \leq 1$) 的情形已经有比较令人满意的解答了: 存在一个正数 $\epsilon(n) > 0$, 若体积 $\text{vol}(B_1(p)) \geq \epsilon(n)$, 那么在对边界 $\partial B_1(p)$ 进行微小调整后, $B_1(p)$ 的微分拓扑形只有有限个可能, 其个数上限只依赖于 n ; 否则, 存在夹于 $B_{\frac{3}{4}}(p)$ 与 $B_1(p)$ 之间的开集 U 使得 U 有一个以拟零流形为纤维的纤维丛结构. 以上对 $B_1(p)$ 的基本结构的描述是了解满足 $|\text{Sec}_M| \leq 1$ 的 M 的整体几何与拓扑结构的关键 (参见文献 [1–8] 以及其中的参考文献).

众所周知 (仅) 在 $\text{Ric}_M \geq -(n-1)$ 条件下, 当给定任一个小正数 r 时, $B_r(p)$ 的结构远比 $|\text{Sec}_M| \leq 1$ 的情形要复杂; 特别地, 上述的任一个结构性描述在这里都不成立. 到目前为止, 唯一的基本结论是,

英文引用格式: Rong X C. Manifolds of Ricci curvature and local rewinding volume bounded below (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 791–806, doi: 10.1360/N012017-00243

存在 $\delta(n) > 0$ 使得 $B_{\delta(n)}(p)$ 的基本群 $\pi_1(B_{\delta(n)}(p))$ 是几乎为零的, 即存在有限指标的零子群 (参见文献 [9]).

因此, 基于 $B_r(x)$ 结构的复杂性开始研究时, 需要对 $B_r(x)$ 进行进一步限制. 一个自然的几何条件是度量球的体积. Bishop-Gromov 相对体积比较定理告诉我们, 当 $\text{Ric}_M \geq (n-1)H$ (H 是一个常数) 时, 关于 r 的体积比函数 $\frac{\text{vol}(B_r(p))}{\text{vol}(\mathbb{B}_r^H)}$ 是单调不增的, 当体积比为 1 时当且仅当开球 $B_r(p)$ 等距同构于 $\mathbb{B}_r^H$, 其中 $\mathbb{B}_r^H$ 表示单连通的 H -空间形式 (即完备的 n 维常截面曲率为 H 的流形) 的一个半径为 r 的度量球.

Bishop-Gromov 相对体积比较中的单调性和刚性是相当重要的; 经典的正 Ricci 曲率流形的结构定理是它们的直接推论: $\text{Ric}_M \geq n-1$ 的完备 n 维流形 M 的直径 $\text{diam}(M) \leq \pi$ (Meyers) 以及 “=” 成立当且仅当 M 等距于单位球 S_1^n (郑绍远). 相对体积比较中刚性的量化版已成为 Cheeger-Colding 理论中的基本几何工具之一. 这里强调量化版的刚性定理通常包含了两个重要的组成部分, 一个是它涵盖了刚性的结果, 另一个是它蕴含了拓扑的稳定性.

或许 Bishop-Gromov 相对体积比较定理最重要的应用是 Gromov 的预紧性定理: 任何一列 Ricci 曲率有一致下界的完备 n 维流形 M_i , $\text{Ric}_{M_i} \geq -(n-1)$, 总包含一个收敛的子列, $(M_k, p_k) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$, 其中 X 是一个长度空间 (任两点的距离可以由连接两点的线段长度任意逼近), 称其为 Ricci 极限空间, GH 表示在 Gromov-Hausdorff 度量下收敛.

在完备非紧的情形下, 非负 Ricci 曲率流形的一个重要的刚性结果是 Cheeger-Gromoll 分裂定理: 具有非负 Ricci 曲率的完备流形 M 分裂出一个 $\mathbb{R}$ 因子 (即等距于某个度量乘积 $\mathbb{R} \times N$), 当且仅当 M 包含了一直线 (参见文献 [10]).

Cheeger-Colding 理论 [11–18] 描述了 M_i 与 X 之间几何与拓扑结构的关联. 量化版的两个刚性定理可以认为是 Cheeger-Colding 理论的两个基础性几何工具: 极大体积刚性 (几乎体积环是几乎度量环, 见定理 2.7) 和量化的分裂刚性 (在 Ricci 曲率几乎非负时, 一个长极短测地线段的中点附近的单位球几乎分裂出 $\mathbb{R}$ 因子, 见定理 2.4).

基于在 20 世纪 90 年代发展起来的 Cheeger-Colding 理论, 对 $\text{Ric}_{M_i} \geq (n-1)H$ 的收敛列 $(M_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$ 的研究已经获得了许多进展, 但主要集中在非塌缩 (即存在 $v > 0$ 使得 $\text{vol}(B_1(p_i)) \geq v$) 的情形下, 这时称 X 为非塌缩的 Ricci 极限空间. 本文的主要目的是概述对 Ricci 曲率有下界, 并分别满足以下两种条件的塌缩流形研究的近期发展, 这两种条件分别是度量球的 Riemann 万有覆盖非塌缩 (见第 2 节) 或者具有几乎极大体积 (见第 3 节).

2 Cheeger-Colding 理论

Gromov 预紧性定理为研究 Ricci 曲率有一致下界的流形列的收敛与退化提供了一个平台, 而 Cheeger-Colding 理论 (参见文献 [14] 以及其中的参考文献) 为我们对 Ricci 曲率以及度量球的局部回卷体积有下界塌缩流形的研究提供了基本工具, 因此, 这里对其作一个简洁的介绍.

2.1 相对体积比较与 Ricci 极限空间

在 Ricci 曲率有下界流形的研究中, 最基本的工具是 Bishop-Gromov 相对体积比较定理 (参见文献 [19]).

定理 2.1 (相对体积比较) 设 M 是完备的 n 维流形且 $\text{Ric}_M \geq (n-1)H$ (H 是常数). 对任意的 $p \in M$, 体积比函数满足

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{\text{vol}(B_r(p))}{\text{vol}(\mathbb{B}_r^H)} \right\} \leq 0, \quad \frac{\text{vol}(B_R(p))}{\text{vol}(B_r(p))} \leq \frac{\text{vol}(\mathbb{B}_R^H)}{\text{vol}(\mathbb{B}_r^H)}, \quad 0 \leq r \leq R,$$

“=” 成立当且仅当开球 $B_R(p)$ 等距同构于 $\mathbb{B}_R^H$.

定理 2.1 中的单调性与刚性是非常重要的, 如引言里提到, 它们分别可以推出经典的 Meyers 定理和郑绍远的最大直径定理. 或许定理 2.1 的最重要应用是如下的定理:

定理 2.2 (预紧性) 任何一列有 Ricci 曲率一致下界的完备 n 维流形 (M_i, p_i) 包含一子列在 GH 拓扑下收敛.

给定 $n, v > 0$, 设 $\mathcal{M}(n, -1)$ 为满足 $(M_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$ 的 (X, p) 的集合, 其中 M_i 是 n 维完备 Riemann 流形且满足 $\text{Ric}_{M_i} \geq -(n-1)$. 不难看出 $\mathcal{M}(n, -1)$ 在 GH 拓扑下是闭的. 对任意的点 $q \in X$ 以及一列正数 $r_j \rightarrow 0$, 若 $(r_j^{-1}X, q)$ 收敛, 则称该极限为在 q 处的切锥, 记为 C_qX .

给定任一正数列 $r_j \rightarrow 0$, 可以由标准的对角线方法选取一个子列使得 $(r_k^{-1}X, q)$ 收敛. 设 $M_i \ni q_i \rightarrow q$, 对每个固定的 r_j , 选择 i_j 充分大, 使得 $r_j M_{i_j}$ 满足

$$d((r_j^{-1}M_{i_j}, q_{i_j}), (r_j^{-1}X, q)) < j^{-1}.$$

在 $(r_j^{-1}M_{i_j}, q_{i_j})$ 上应用定理 2.2, 可以得到一个收敛的子列

$$(r_{j_k}^{-1}M_{i_{j_k}}, q_{i_{j_k}}) \xrightarrow{\text{GH}} (C_qX, q^*) \xleftarrow{\text{GH}} (r_{j_k}^{-1}X, q).$$

推论 2.3 设 $X \in \mathcal{M}(n, -1)$, 给定任意的 $q \in X$ 和 $r_i \rightarrow 0$, 存在一个收敛子列

$$(r_k^{-1}X, q) \xrightarrow{\text{GH}} (C_qX, q^*).$$

注意到对于 $q \in X$, C_qX 可能依赖于 $\{r_k\}$ 的选取, 选取不同的 $\{r_k\}$ 可能得到有不同几何或拓扑的切锥. 如果 $\text{vol}(B_1(p_i)) \rightarrow 0$, 也就是 X 是一个塌缩的 Ricci 极限空间, 那么切锥 C_qX 可能不是度量锥 (对比定理 2.10), 甚至选取不同 $\{r_k\}$ 得到的切锥的维数也不相同 (参见文献 [12]). 切锥的这种不确定性反映了 M_i 和 Ricci 极限空间 X 局部结构的复杂性.

2.2 量化分裂刚性和量化扭积刚性

在 Ricci 极限空间的研究中, 基本的几何工具是在 Ricci 曲率条件下量化的刚性 (分裂刚性和扭积度量刚性), 分别见定理 2.4 和 2.7.

Cheeger-Gromoll 分裂定理断言: 设 M 是 n 维完备流形且满足 $\text{Ric}_M \geq 0$, 若 M 包含一直线, 则 M 会分裂出一个 $\mathbb{R}$ 因子. 当把 “ $\text{Ric}_M \geq 0$ ” 放宽为 “ $\text{Ric}_M \geq -(n-1)\delta$ ”, “一直线” 放宽为 “一 (长) 线段”, 那么结论 “分裂出一个 $\mathbb{R}$ 因子” 就弱化为 “ $B_R(p)$ 几乎分裂出一个 $\mathbb{R}$ 因子”. 精确的描述如下:

定理 2.4 (量化分裂定理) 设 M 是完备的 n 维流形且满足 $\text{Ric}_M \geq -(n-1)\delta$. 给定 $p, p_{\pm} \in M$, 若满足

$$E(p) = d(p, p_+) + d(p, p_-) - d(p_+, p_-) < \epsilon, \quad d(p, p_{\pm}) \geq L \gg R > 0,$$

则存在一个乘积度量空间 $\mathbb{R} \times X$ 使得

$$d_{\text{GH}}(B_R(p), B_R(x^*)) < \Psi(\epsilon, \delta, L^{-1} \mid n, R),$$

其中 $x^* \in \mathbb{R} \times X$, 并且当 n 和 R 固定且 $\epsilon, \delta, L^{-1} \rightarrow 0$ 时, 正函数 $\Psi(\epsilon, \delta, L^{-1} \mid n, R) \rightarrow 0$.

回顾 Cheeger-Gromoll 分裂定理的证明: 给定一直线 $\gamma(t) : (-\infty, \infty) \rightarrow M$, 定义两个到无穷远点的距离函数

$$b_{\pm}(x) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (d(x, \gamma(t)) - |t|).$$

证明的主要工作是说明, 在支撑的意义下 $b_{\pm}$ 的 Laplace 为 0 ($\Delta b_{\pm} = 0$), 根据极值原理, 则 $b_{\pm}$ 是光滑的. 又因为 $b_{\pm}$ 的梯度模长总为 1 ($|\nabla b_{\pm}| \equiv 1$), 结合 Riccati 方程, $0 \leq \Delta b_{\pm} + \text{tr}(\text{Hess}_{b_{\pm}}^2) \leq -\text{Ric}(\nabla b_{\pm}, \nabla b_{\pm}) \leq 0$ (其中 Hess 表示 Hesse 矩阵), 可知 $\text{Hess}_{b_{\pm}} \equiv 0$. 从而, $\nabla b_{\pm}$ 是 Killing 场, 那么, $b_{\pm}$ 的等值面就是 M 的一个分裂因子.

在定理 2.4 的证明中, 若假设类似 Busemann 函数, $b_{\pm}(x) = d(x, p_{\pm}) - d(p, p_{\pm}) : M \rightarrow \mathbb{R}$, 满足 $|\nabla b_{\pm}|$ 处处几乎为 1 以及 $|\text{Hess}_{b_{\pm}}|$ 处处几乎为 0, 那么不难得到所要的结论. 但事实上 $b_{\pm}$ 不满足这些好的分析条件, 因此, 这里使用了下面 Dirichlet 问题的解 $h_{\pm}$ 去逼近 $b_{\pm}$:

$$\begin{cases} \Delta h_{\pm} = 0, & \text{在 } B_{20R}(p), \\ h_{\pm} \equiv b_{\pm}, & \text{在 } \partial B_{20R}(p). \end{cases}$$

那么可以证明 $h_{\pm}$ 逐点接近 $b_{\pm}$, $|\nabla h_{\pm}| \leq 1 + \epsilon$ 和 $\int_{B_R(p)} |\text{Hess}_{h_{\pm}}|^2 \leq \epsilon$. 这些性质就足够证明映射 $\phi(x) = (d(x, X_0), x^*) : B_R(p) \rightarrow \mathbb{R} \times X_0$ 是 Ψ -GH 接近, 其中 x^* 表示 x 到 $X_0 = h_+^{-1}(h_+(p))$ 的投影.

推论 2.5 设 $(M_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p) \in \mathcal{M}(n, -1)$ 且满足 $\text{Ric}_{M_i} \geq -(n-1)\delta_i \rightarrow 0$. 如果 X 包含了一直线, 那么 X 就分裂一个 $\mathbb{R}$ 因子.

H -空间形式的度量是一个扭积 (warped product) 度量, 定理 2.1 中的极大体积刚性实际上是更一般的扭积度量体积刚性的特例. 设 (N, g_N) 是一个 $n-1$ 维 Riemann 流形, $\kappa : (a', b') \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的正函数, $(a', b') \times_{\kappa} N$ 是扭积函数为 κ 的扭积, 即它的度量张量是

$$g = dr^2 + \kappa^2(r)g_N. \quad (2.1)$$

对于 $a' < a < b < b'$, 设 $A_{a,b} = (a, b) \times N$. 根据计算, 在 $r^{-1}(a)$ 上, 有

$$\text{Ric}_g \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = -(n-1) \frac{\kappa''(a)}{\kappa(a)}, \quad \Delta r = (n-1) \frac{\kappa'(a)}{\kappa(a)}, \quad \frac{\text{vol}(A_{a,b})}{\text{vol}(r^{-1}(a))} = \frac{\int_a^b \kappa^{n-1}(r) dr}{\kappa^{n-1}(a)}. \quad (2.2)$$

事实上, (2.2) 唯一地刻画了 (2.1) 的扭积度量.

粗略地讲, 量化的扭积度量体积刚性是说, 如果 (2.2) 几乎成立, 则 $A_{a,b}$ 就 GH 接近一个扭积度量.

定理 2.6 (几乎体积扭积是几乎度量扭积^[11]) 设 M 是 n 维 Riemann 流形, r 是到一个 M 上紧子集的距离函数, $0 < \alpha' < \alpha$, $\alpha - \alpha' > 2\xi > 0$, $A_{a,b} = r^{-1}((a, b))$,

$$\mathcal{V}(\xi) = \inf \left\{ \frac{\text{vol}(B_{\xi}(q))}{\text{vol}(A_{a,b})} \mid \text{对所有满足 } B_{\xi}(q) \subset A_{a,b} \text{ 的 } q \in A_{a,b} \right\}.$$

如果 $A_{a,b}$ 是一个几乎体积扭积, 也就是 (2.2) 在 $A_{a,b}$ 上几乎成立,

$$\text{Ric}_M \geq -(n-1) \frac{\kappa''(a)}{\kappa(a)}, \quad \Delta r \leq (n-1) \frac{\kappa'(a)}{\kappa(a)}, \quad \frac{\text{vol}(A_{a,b})}{\text{vol}(r^{-1}(a))} \geq (1-\epsilon) \frac{\int_a^b \kappa^{n-1}(r) dr}{\kappa^{n-1}(a)},$$

则存在一个长度空间 Y , 它至多只有 $C(a, b, \kappa, \xi)$ 个连通分支 Y_i ,

$$\text{diam}(Y_i) \leq D(a, b, \kappa, \xi),$$

并使得

$$d_{\text{GH}}((A_{a+\alpha, b-\alpha}, d^{\alpha', \alpha}), ((a+\alpha, b-\alpha) \times_{\kappa} Y, \underline{d}^{\alpha', \alpha})) < \Psi(\epsilon \mid n, \kappa, a, b, \alpha', \xi, \mathcal{V}(\xi)),$$

其中 $d^{\alpha', \alpha}$ 表示 $A_{\alpha+\alpha', b-\alpha'}$ 的内蕴度量在 $A_{a+\alpha, b-\alpha}$ 上的限制, $\underline{d}^{\alpha', \alpha}$ 表示 $(a+\alpha', b-\alpha') \times_{\kappa} Y$ 的内蕴度量在 $(a+\alpha, b-\alpha) \times_{\kappa} Y$ 上的限制.

在定理 2.6 中, 如果 $\kappa(r)$ 是 H -空间形式的标准的扭积函数,

$$\kappa_H(r) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{H}r}{\sqrt{H}}, & H > 0, \\ r, & H = 0, \\ \frac{\sinh \sqrt{-H}r}{\sqrt{-H}}, & H < 0, \end{cases}$$

那么可以得到下面的定理:

定理 2.7 (几乎体积环是几乎度量环) 给定 $n > 0, H \leq 0, L > 2R > 0$, 若完备 n 维流形 M 以及 $p \in M$ 满足

$$\text{Ric}_M \geq (n-1)H, \quad \frac{\text{vol}(\partial B_{L-2R}(p))}{\text{vol}(\partial \underline{B}_{L-2R}^H)} \leq (1+\epsilon) \frac{\text{vol}(A_{L-2R, L+2R}(p))}{\text{vol}(\underline{A}_{L-2R, L+2R}^H)},$$

那么,

$$d_{\text{GH}}(A_{L-R, L+R}(p), (L-R, L+R) \times_{\kappa_H(r)} Y) < \Psi(\epsilon \mid n, L, R, H),$$

其中 Y 是一个长度空间 (可能不连通).

观察到, 如果 $f(r) = -\int_r^b \kappa(s)ds$, 那么 f 满足 $\text{Hess}_f = \kappa'(r)g$. 定理 2.7 (或更一般的定理 2.6) 的证明方法某种程度上与定理 2.4 的证明相似; 使用如下 Dirichlet 问题的解去逼近 f :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{f} = ne^u, & \text{在 } B_{L+10R}(q), \\ \tilde{f} = f, & \text{在 } \partial B_{L+10R}(q), \end{cases}$$

其中 $u(x) = |xp| - |pq|$, $q \in A_{L-R, L+R}(p)$.

定理 2.7 的一个特殊情形如下 (可能需要稍微移动中心点 p 才能得到):

定理 2.8 (几乎极大体积球是几乎空间形式球) 给定 $n, \rho, \epsilon > 0$, 如果完备 n 维流形 M 以及 $p \in M$ 满足

$$\text{Ric}_M \geq (n-1)H, \quad \frac{\text{vol}(B_{\rho}(p))}{\text{vol}(\underline{B}_{\rho}^H)} \geq 1 - \epsilon,$$

则 $d_{\text{GH}}(B_{\frac{\rho}{2}}(p), \underline{B}_{\frac{\rho}{2}}^H) < \Psi(\epsilon \mid n, \rho, H)$.

定理 2.7 的另一个应用是如下定理:

定理 2.9 (几乎体积锥是几乎度量锥) 设完备 n 维流形 M 满足 $\text{Ric}_M \geq -(n-1)\delta$. 如果 $B_R(p)$ 是几乎体积锥, 也就是满足如下体积条件:

$$\frac{\text{vol}(\partial B_R(p))}{\text{vol}(B_R(p))} \geq (1-\epsilon) \frac{\text{vol}(\partial \underline{B}_R^0)}{\text{vol}(\underline{B}_R^0)},$$

则 $d_{\text{GH}}(B_R(p), B_R(x^*)) < \Psi(\epsilon, \delta \mid n, R)$, 其中 x^* 是一个度量锥 $C(Z)$ 的顶点, 并且 Z 的直径

$$\text{diam}(Z) \leq \pi + \epsilon.$$

Cheeger 等^[13,18] 证明了下面的定理:

定理 2.10 (等距群是李群) 若 $X \in \mathcal{M}(n, -1)$, 那么 X 的等距群 $\text{Isom}(X)$ 是李群.

给定度量空间 X 、 $\text{Isom}(X)$ 的子群 H 、 $x \in X$ 和 $R > 0$, 设

$$D_{x,R}(H) = \sup_{z \in B_R(x)} \{d(z, h(z)), h \in H\}.$$

定理 2.10 的证明方法是说明 $\text{Isom}(X)$ 没有小子群, 即对 $\text{Isom}(X)$ 的任一系列子群 H_i , 任意给定 $x \in X$, $R > 0$, 若 $D_{x,R}(H_i) \rightarrow 0$, 则当 i 充分大时, $H_i = e$.

2.3 非塌缩的 Ricci 极限空间

给定 $n, v > 0$, 设 $\mathcal{M}(n, -1, v)$ 表示 $\mathcal{M}(n, -1)$ 中非塌缩的 Ricci 极限空间的集合, 即 $\mathcal{M}(n, -1, v)$ 是这样的 $X \in \mathcal{M}(n, -1)$ 的集合, 存在 $(M_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$ 且满足 $\text{vol}(B_1(p_i)) \geq v$.

我们从 X 是一个 Riemann 流形的特殊情形开始说起.

定理 2.11 设收敛序列 $M_i \xrightarrow{\text{GH}} M \in \mathcal{M}(n, -1, v)$. 若 M 是紧致的 Riemann 流形, 则对于充分大的 i , 存在 M_i 到 M 的微分同胚, 且该映射是 bi-Hölder 的.

一般来说, $X \in \mathcal{M}(n, -1, v)$ 不是 Riemann 流形. 如果不是, 则某点 $q \in X$ 处的切锥可能不是唯一的 (参见文献 [12]).

定理 2.12 (切锥是度量锥) 设 $X \in \mathcal{M}(n, -1, v)$, 则任意点 $q \in X$ 的任一个切锥都是 n 维的度量锥.

设 $M_i \ni q_i \rightarrow q$ 以及 $r_j \rightarrow 0$ 使得 $(r_j^{-1}M_{i_j}, q_{i_j}) \xrightarrow{\text{GH}} (C_q X, q^*)$. 如果 $C_q X$ 不是度量锥, 那么一定存在 $\epsilon > 0$ 使得 $d_{\text{GH}}(B_{r_j}(q), B_{r_j}(C(Z), z^*)) \geq \epsilon r_j$ 对所有的 $j \geq j(\epsilon)$ 成立, 其中 $C(Z)$ 是任意度量锥 (因为度量锥的极限总是度量锥), z^* 为 $C(Z)$ 的顶点.

因为 $(r_j^{-1}M_{i(j)}, q_{i(j)}) \xrightarrow{\text{GH}} (C_q X, q^*)$, 假设 $i(j(\epsilon))$ 满足对所有的 $l \geq 1$, 有

$$d_{\text{GH}}(B_{r_j}(r_j^{-1}M_{i(j(\epsilon)+l)}, q_{i(j(\epsilon)+l)}), B_{r_j}(C_q X, q^*)) < \frac{\epsilon}{2} r_j,$$

因此,

$$d_{\text{GH}}(B_{r_j}(q_{i(j(\epsilon)+l)}), B_{r_j}(C(Z), z^*)) \geq \frac{\epsilon}{2} r_j. \quad (2.3)$$

对于 $j(\epsilon), j(\epsilon) + 1, \dots, j(\epsilon) + k$, 选取 $i(j(\epsilon)), i(j(\epsilon) + 1), \dots, i(j(\epsilon) + k), \dots$ 使得 (2.3) 对所有的 $i(j) \geq \max\{i(j(\epsilon) + l)\}_{l=1}^k$ 成立. 根据定理 2.9, 对于 $i(j(\epsilon)), \dots, i(j(\epsilon) + k)$, $M_{i(j)}$ 离体积锥条件总是有一个固定大小的误差 $1 - \delta(\epsilon)$. 因为体积锥的条件等价于相对体积比较, 因此, 离几乎极大相对体积比较条件总是相差一个固定的误差.

选取一个子列后, 可以假设 r_j 满足 $2r_{j+1} < r_j$. 由上述知, 如下体积条件对于 $i(j) \geq \max\{i(j(\epsilon) + l)\}_{l=1}^k$ 成立:

$$\frac{\text{vol}(B_{r_j}(q_{i_j}))}{\text{vol}(\mathbb{B}_{r_j}^0)} > (1 + \delta) \frac{\text{vol}(B_{2r_j}(q_{i_j}))}{\text{vol}(\mathbb{B}_{2r_j}^0)},$$

则

$$\begin{aligned} 0 < c(n, v) &= \frac{v}{\text{vol}(\mathbb{B}_1^0)} \leq \frac{\text{vol}(B_1(q_{i(j(\epsilon)+k})))}{\text{vol}(\mathbb{B}_1^0)} \leq \frac{\text{vol}(B_{r(j(\epsilon))}(q_{i(j(\epsilon)+k})))}{\text{vol}(\mathbb{B}_{r(j(\epsilon))}^0)} \\ &\leq \frac{\text{vol}(B_{2r_{i(j(\epsilon)+1)}}(q_{i(j(\epsilon)+k})))}{\text{vol}(\mathbb{B}_{r_{i(j(\epsilon)+1)}}^0)} \leq (1 + \delta)^{-1} \frac{\text{vol}(B_{r_{i(j(\epsilon)+1)}}(q_{i(j(\epsilon)+k})))}{\text{vol}(\mathbb{B}_{r_{i(j(\epsilon)+1)}}^0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (1+\delta)^{-1} \frac{\text{vol}(B_{2r_{i(j(\epsilon)+2)}}(q_{i(j(\epsilon)+k})))}{\text{vol}(\mathbb{B}_{2r_{i(j(\epsilon)+2)}}^0)} \\ &\leq \dots \leq (1+\delta)^{-k} \frac{\text{vol}(B_{r_{i(j(\epsilon)+k)}}(q_{i(j(\epsilon)+k})))}{\text{vol}(\mathbb{B}_{r_{i(j(\epsilon)+k)}}^0)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

矛盾.

设 $X \in \mathcal{M}(n, -1, v)$, 称点 $q \in X$ 是正则的, 是指在 q 处的所有切锥都等距于 $\mathbb{R}^n$. 不是正则的点称为奇异的. 设 $\mathcal{S}^k$ 表示任意切锥都不能分裂出 $\mathbb{R}^{k+1}$ 因子的奇异点集合, 那么,

$$\mathcal{S}^0 \subset \mathcal{S}^1 \subset \dots \subset \mathcal{S}^{n-1} = \mathcal{S}.$$

设 $\mathcal{R} = X - \mathcal{S}$, 即 $\mathcal{R}$ 为正则点的集合.

定理 2.13 (正则点集/奇异点集估计^[12]) 设 $X \in \mathcal{M}(n, -1, v)$, 则

(1) $\mathcal{R}$ 是弱凸集 (即集合中任两点的距离可以由连接两点并包含在集合中的曲线的长度任意逼近), 因此也是道路连通的;

(2) Hausdorff 维数 $\dim_H(\mathcal{S}^k) \leq k$;

(3) $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{n-2}$.

定理 2.14 (体积收敛^[11, 17]) 设 $(M_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p) \in \mathcal{M}(n, -1, v)$, 对任意 $M \ni q_i \rightarrow q \in X$ 和任意的 $R > 0$, 有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}(B_R(q_i)) = \text{Haus}^n(B_R(q)).$$

定理 2.14 的一个推论是, X 上的 n 维 Hausdorff 测度 (Haus^n) 满足 Bishop-Gromov 相对体积比较.

定理 2.15 (Ricci 曲率两边有界^[11, 15]) 设 $(M_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p) \in \mathcal{M}(n, -1, v)$ 且满足 $|\text{Ric}_{M_i}| \leq n-1$, 则

(1) $\mathcal{R}$ 是凸的 $C^{1,\alpha}$ 流形;

(2) $\dim_H(\mathcal{S}) \leq n-4$.

3 度量球局部回卷体积有下界的 Ricci 极限空间结构

本节将探索度量球局部回卷体积有一致下界流形的 Ricci 极限空间的结构. 需要指出, 这些结构在一般的情形下可能并不存在 (如定理 3.3 和猜想 3.6).

定义 3.1 (度量球的局部回卷 (rewinding) 体积) 设 M 是完备流形, $\pi: (\widetilde{B_r(x)}, x^*) \rightarrow (B_r(x), x)$ 表示局部 (不完备) 的 Riemann 万有覆叠 (局部两字用于强调 x^* 不是 M 的整体万有复叠上的点). 称 $\text{vol}(B_r(x^*))$ 是 $B_r(x)$ 的局部回卷体积, 记作 $\widetilde{\text{vol}}(B_r(x)) = \text{vol}(B_r(x^*))$.

如果 $B_r(x)$ 是单连通的, 那么, $\widetilde{\text{vol}}(B_r(x)) = \text{vol}(B_r(x))$. 否则, $\widetilde{\text{vol}}(B_r(x)) > \text{vol}(B_r(x))$. 注意存在这样的流形: Riemann 万有覆叠塌缩而半径为某个小 r 的度量球的回卷体积却不塌缩, 如 Berger 的 3 维塌缩球. 注意, 我们将研究的塌缩流形类中不包含处处局部单连通的塌缩流形 (例如, $M = S_\epsilon^3 \times N$).

研究这类流形的部分原因是因为下面的定理 (参见文献 [1]):

引理 3.2 (度量球局部回卷体积估计) 存在常数 $\rho(n), v(n) > 0$, 使得对任意 $|\text{Sec}_M| \leq 1$ 的完备 n 维流形 M 的任意点 $x \in M$, 有 $\widetilde{\text{vol}}(B_{\rho(n)}(x)) \geq v(n)$.

通过考虑一系列塌缩的 $B_1(x_i)$ 可以看出引理 3.2 成立: 根据文献 [1] 知, $B_1(x)$ 包含了一个 k ($k \geq 1$) 维的拟幂零流形 $N \ni x$ 使得 $B_{\rho(n)}(x)$ 可以看作 N 上的圆盘 $D_{\rho}^{n-k}(n)$ 丛, 其中 $\rho(n)$ 是 N 的法向单射半径下界.

对固定的 $r > 0$, 条件 $\widetilde{\text{vol}}(B_r(x)) \geq v > 0$ 允许我们通过 $B_r(x)$ 的 Riemann 万有覆叠的等变 GH 收敛去分析 $B_r(x)$ 的结构:

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{B_r(x_i)}, x_i^*, \Lambda_i) & \xrightarrow{\text{GH}} & (\tilde{Y}, \tilde{x}, G) \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi \\ (B_r(x_i), x_i) & \xrightarrow{\text{GH}} & (B_r(x), x), \end{array} \quad (3.1)$$

其中 $\Lambda_i = \pi_1(B_r(x_i))$, G 是 Λ_i 的极限群, 它是 $\text{Isom}(\tilde{Y})$ 的闭子群.

对于度量球的局部回卷体积有一致下界的塌缩 Ricci 极限空间, 我们有定理 2.13 的类似性质.

定理 3.3¹⁾ 设 $(M_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p) \in \mathcal{M}(n, -1)$ 且满足对于任意的 $x_i \in M_i$, 有 $\widetilde{\text{vol}}(B_1(x_i)) \geq v > 0$, 那么 X 满足下列性质:

- (1) Hausdorff 维数 $k = \dim_H(X)$ 是整数;
- (2) 任何 $x \in X$ 的任意迭代切锥是 k 维度量锥;
- (3) 奇异集维数 $\dim_H(S) \leq k - 1$.

一个长度空间 X 称为极化的 (polar), 如果所有的迭代切锥 (iterated tangent cone) 的基点都是极点 (称 p 为极点 (pole) 是指, 给任一点 x , 都存在一条从 p 出发的射线通过 x). 根据文献 [13], 如果 $X \in \mathcal{M}(n, -1)$ 是 polar 的, 则 $\dim_H(X)$ 是整数, 因此, 定理 3.3(2) 包含了定理 3.3(1). 设 $r_j \rightarrow \infty$ 使得 $(r_j X, x) \rightarrow C_x X$. 过渡至一个子列, 不妨假设 $(r_j M_{i(j)}, x_{i(j)}) \xrightarrow{\text{GH}} (C_x X, x)$. 根据 (3.1), 有如下的等变收敛交换图:

$$\begin{array}{ccc} (r_j \widetilde{B_1(x_{i(j)})}, x_{i(j)}^*, \Lambda_{i(j)}) & \xrightarrow{\text{GH}} & (C_{\tilde{x}} \tilde{Y}, \tilde{x}, \hat{G}) \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi \\ (r_j B_1(x_{i(j)}), x_{i(j)}) & \xrightarrow{\text{GH}} & (C_x X, x). \end{array}$$

根据定理 2.12 和推论 2.5 知, $C_{\tilde{x}} \tilde{Y} = \mathbb{R}^k \times C(Z)$ 且 $C(Z)$ 不包含任一条直线. 不难看出 $\hat{G}$ 是 G_0 和 $G_{\tilde{x}}$ 生成子群的极限, 其中 G_0 是含单位元的连通分支, $G_{\tilde{x}}$ 是 G 在 $\tilde{x}$ 处的迷向子群. 定理 2.10 告诉我们 $\hat{G}$ 是李群, 根据文献 [9] 可知, $\hat{G}_0$ 是幂零的, 故 $\hat{G}_0$ 的作用是可交换的, 从而, $\hat{G}/\hat{G}_{\tilde{x}}$ 在 $C_{\tilde{x}} \tilde{Y}/\hat{G}_{\tilde{x}}$ 上的作用是平移, 因此, $C_x X = C_{\tilde{x}} \tilde{Y}/\hat{G}$ 是度量锥.

对任意 $v \in C_x X$, 我们可以假设 $z_{i(j)} \rightarrow v$. 对任意的 $\eta_k \rightarrow \infty$, 过渡至子列后, 可以得到

$$\begin{array}{ccc} (\eta_k r_{j(k)} \widetilde{B_1(x_{i(j(k))})}, x_{i(j(k))}^*, \Lambda_{i(j(k))}) & \xrightarrow{\text{GH}} & (\tilde{C}_{\tilde{v}}(C_{\tilde{x}} \tilde{Y}), \tilde{v}, \hat{G}') \\ \pi_{i(j(k))} \downarrow & & \downarrow \pi \\ (\eta_k r_{j(k)} B_1(x_{i(j(k))}), x_{i(j(k))}) & \xrightarrow{\text{GH}} & (C_v(C_x X), v). \end{array}$$

类似地, 可以证明 $C_v(C_x X)$ 是一个度量锥. 迭代这个步骤, 可以看到 X 是 polar 的. 注意到任意迭代切锥的维数 $k = n - \dim(G)$.

1) Rong X. Collapsed manifolds with local Ricci bounded covering geometry curvature. In preparation.

最后, 定理 3.3(3) 可以由如下事实看出: $\mathcal{S}$ 由两部分元素组成, 一部分是 (3.1) 中 $\tilde{Y}$ 上的奇异点的投影, 另一部分是 G 的非主轨道的投影.

下面讨论度量球的局部回卷体积非塌缩对局部基本群的限制.

首先建立定理 2.10 的量化版 (即 $\text{Isom}(X)$ 无小子群). 对 $\epsilon > 0$, 我们称 $\text{Isom}(X)$ 的子群 H 在 p 处的任意尺度下是 ϵ -小的, 是指对任意的 $r \in (0, 1]$ 都有 $D_{p,r}(H) < \epsilon r$.

定理 3.4 (量化的无小子群²⁾ 给定 $n, v > 0$, 存在常数 $\delta(n, v) > 0$ 使得, 若 $X \in \mathcal{M}(n, -1, v)$, 则 $\text{Isom}(X)$ 的任一非平凡子群 H 在 p 处对任意 $r \in (0, 1]$ 都不是 $\delta(n, v)$ -小的, 也就是 $D_{r,p}(H) \geq \delta(n, v)r$.

如果存在 $\delta_i \rightarrow 0$ 与一个矛盾序列, $(X_i, p_i) \in \mathcal{M}(n, -1, v)$, 以及等距群 H_i 的收敛 $(X_i, p_i, H_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p, H)$ 使得 $D_{r_i,p_i}(H_i) < \delta_i r_i$; 如果 $r_i \geq r_0 > 0$, 那么 $H = e$ (X 上的一个等距作用若是平凡的当且仅当它在一个开球上的作用是平凡的²⁾). 否则, 我们用 $(r_i^{-1}X_i, p_i, H_i)$ 去替代 (X_i, p_i, H_i) , 那么, $(r_i^{-1}X_i, p_i, H_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p, e)$. 不失一般性, 可以假设 $H_i = \langle h_i \rangle$. 根据 $H_i \rightarrow e$ 和 Haus^n 在 $\mathcal{M}(n, -1, v)$ 的连续性 (定理 2.14), 那么商空间的极限与原空间的极限相同, 可以得到

$$\begin{aligned} \text{Haus}^n(B_{\frac{1}{2}}(p)) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \text{Haus}^n(B_{\frac{1}{2}}(\bar{p}_i)) \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\text{Haus}^n(B_{\frac{1}{2}}(p_i)) + \text{Haus}^n(B_{\frac{1}{2}}(h_i(p_i)))] \\ &\leq \frac{1}{2} \lim_{i \rightarrow \infty} \text{Haus}^n(B_{\frac{1}{2}+\epsilon_i}(p_i)) = \frac{1}{2} \text{Haus}^n(B_{\frac{1}{2}}(p)), \end{aligned}$$

其中 $B_{\frac{1}{2}}(\bar{p}_i)$ 是商空间的距离球, 这是一个矛盾.

当把定理 3.4 中的 H 替换为几乎子群结论依然成立. 一个由自由等距元素组成的对称子集 $A \subset \text{Isom}(X)$ 称为在 $B_r(p)$ 上的 η -子群, 如果满足

$$\sup_{q \in B_r(p)} \left\{ \frac{d(A(q), A^2(q))}{\text{diam}(A(q))} \right\} \leq \eta.$$

显然, 一个 η -子群 A 是子群当且仅当 $\eta = 0$.

应用中, 我们需要一个比距离球上无几乎小子群更强的结论.

定义 3.5 (单点处的 η -子群) 设 X 是一个度量空间, $q \in X$, $r > 0$. 一个对称子集 $A \subset \text{Isom}(X)$ 称为在 q 处的 η -子群, 如果伸缩不变量

$$\frac{d(A(q), A^2(q))}{\text{diam}(A(q))} < \eta.$$

猜想 3.6 (单点处无几乎小子群) 给定 $n, \eta > 0$, 存在常数 $\epsilon(n, v), \eta(n, v) > 0$, 使得对 $X \in \mathcal{M}(n, -1, v)$, 在点 p 处的任意 η -子群 A 在任意尺度下都不是 $\epsilon(n, v)$ -小的, 也就是, 对所有的 $r \in (0, 1]$, 有 $D_{p,r}(A) \geq \epsilon(n, v)r$.

作出上述猜想的部分原因是, 比较满足 $\text{Sec}_M \geq -1$ 和 $\text{Ric}_M \geq -(n-1)$ 的 M 的一个很大不同点在于, 前者大尺度几何与小尺度几何有着紧密的联系 (如 Topogonov 比较定理), 而后者则几乎没有这些可见的联系, 然而, 我们相信在非塌缩的情形下, 某些联系是存在的, 猜想 3.6 正是作出了一种猜测. 倘若猜想 3.6 成立, 将可以建立一个关于伸缩的单调性 (见定理 3.8 和 3.9), 这将有许多的应用.

考虑一个非负 Ricci 曲率的完备非紧致流形, 存在已久的 Milnor 猜想认为 $\pi_1(M)$ 是有限生成的 (参见文献 [20]). 目前所得到的部分结果参见文献 [21–26].

2) Pan J, Rong X. Fundamental groups of manifolds with Ricci curvature bounded below and non-collapsing local coverings. In preparation.

定理 3.7²⁾ 设 M 是满足 $\text{Ric}_M \geq 0$ 的完备非紧致流形, 若对某些 $\epsilon, \eta > 0$, $\pi_1(M)$ 在 p 处没有 ϵ - 小的 η - 子群, 则 $\pi_1(M)$ 是有限生成的.

证明 Milnor 猜想的常用方法是反证法, 假设基本群存在无限个生成元, 则 Gromov 短生成元 (short generators) 的长度 $l_i \rightarrow \infty$, 从而得到一个无穷远锥 $l_i^{-1}M \rightarrow X$, 然后对 X 适当吹大 (blow up) 后对维数进行归纳 (参见文献 [27]). 为了实现这个方法, 我们需要下面的定理:

定理 3.8 (伸缩下的维数单调性²⁾) 设 $(M_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p) \in \mathcal{M}(n, -1)$ 且满足 $\widetilde{\text{vol}}(B_1(p_i)) \geq v > 0$. 设 $\epsilon, \eta > 0$ 使得 $\pi_1(M_i, p_i)$ 中由长度不超过 1 的回路生成的子群在 p_i 处没有 ϵ - 小的 η - 子群, 则对任意 $r_i \rightarrow 0$ 使得 $(r_i^{-1}M_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X', p')$, 有 $\dim(X') \geq \dim(X)$.

定理 3.9 (群在伸缩下的维数单调性²⁾) 设 $(M_i, p_i, \Gamma_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p, G)$ 且满足 $(X, p) \in \mathcal{M}(n, -1)$. 设 $\epsilon, \eta > 0$ 使得 Γ_i 没有 ϵ - 小的 η - 子群, 则对任意 $r_i \rightarrow 0$ 使得 $(r_i^{-1}M_i, p_i, \Gamma_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X', p', G)$, 有 $\dim(G') \leq \dim(G)$.

我们以猜想 3.6 的一个局部版本结束本节.

猜想 3.10 (单点无几乎小子群) 给定 $n, v > 0$, 存在常数 $\epsilon(n, v), \eta(n, v) > 0$ 使得, 如果一个完备的 n 维流形 M 满足

$$\text{Ric}_M \geq -(n-1), \quad \widetilde{\text{vol}}(B_1(p)) \geq v > 0,$$

则 $\pi_1(B_1(p), p)$ 在 p 处不包含 ϵ - 小的 η - 子群.

4 量化的极大度量球局部回卷体积刚性

以下为定理 2.1 中刚性结论的推论.

定理 4.1 (极大体积刚性) 紧致 n 维流形等距于单位球 S_1^n 当且仅当 M 满足

$$\text{Ric}_M \geq n-1, \quad \text{vol}(M) = \text{vol}(S_1^n).$$

一个自然的问题是, 当 $\text{vol}(M)$ 几乎极大时 M 是否微分同胚于 S_1^n ?

定理 4.2 (量化极大体积刚性) 给定 n , 存在常数 $\epsilon(n) > 0$ 使得对任意 $\epsilon \in (0, \epsilon(n))$, 如果紧致的 n 维流形 M 满足

$$\text{Ric}_M \geq n-1, \quad \text{vol}(M) \geq (1-\epsilon)\text{vol}(S_1^n),$$

则存在一个 M 到 S_1^n 的 $\Psi(\epsilon | n)$ - 等距的微分同胚.

定理 4.2 中的同胚首先由 Perelman 在文献 [28] 中得到, M 到 S_1^n 的 GH 接近由 Colding 在文献 [16] 中证明, 而微分同胚则在文献 [11] 中通过 Reifenberg 方法证明. 由于 $d_{\text{GH}}(M, S_1^n) = 0$ 意味着 M 等距于 S_1^n , 因此定理 4.2 包含了定理 4.1.

使用度量球局部回卷体积的概念, 我们将把定理 4.1 推广至包含所有的 H - 空间形式.

定理 4.3 (极大度量球局部回卷体积刚性) 给定 $\rho > 0$, 设 M 是满足 $\text{Ric}_M \geq (n-1)H$ 的完备 n 维流形, 则 M 等距于某个 H - 空间形式当且仅当对所有的 $x \in M$, 有

$$\widetilde{\text{vol}}(B_\rho(x)) = \text{vol}(\mathbb{B}_\rho^H).$$

定理 4.3 显然适用于所有的 H - 空间形式, 注意到定理 4.1 是 $H = 1$ 和 $\rho > \pi$ 的情形. 对比定理 4.2, 很自然的想法是尝试得到定理 4.3 的量化版本. 注意, 当 $H \leq 0$ 时, 必须对直径进行限制: 当 $H = 0$ 时, 给定任意的 $n, \rho, \epsilon > 0$, 一个有非常大半径的常曲率球面满足 $\text{Ric} > 0$ 以及度量球的局部回卷体积

几乎极大, 但是它不可能容许一个平坦的度量; 当 $H = -1$ 时, 给定任意 $n \geq 4$ 和 $\epsilon > 0$, 均存在一个紧致的 n 维流形满足 $-1 - \epsilon \leq \text{Sec}_M \leq -1 + \epsilon$, 该条件蕴含着局部回卷体积几乎极大 (参见文献 [29]).

猜想 4.4 (量化的极大度量球局部回卷体积刚性) 给定 $n, \rho, d > 0$, $H = 0, \pm 1$, 存在常数 $\epsilon_0 = \epsilon_0(n, \rho, d) > 0$ 使得对任意 $0 < \epsilon < \epsilon_0$, 若完备 n 维流形 M 满足

$$\text{Ric}_M \geq (n-1)H, \quad d \geq \text{diam}(M), \quad \widetilde{\text{vol}}(B_\rho(x)) \geq (1-\epsilon)\text{vol}(\mathbb{B}_\rho^H), \quad x \in M,$$

那么存在 M 到 H - 空间形式的一个 $\Psi(\epsilon | n, \rho, d)$ - 等距的微分同胚.

猜想 4.4 蕴含了 M 的 Riemann 万有覆叠是非塌缩的: 当 $H = -1$ 时, 任何紧致的 n 维双曲空间有只依赖于 n 的体积下界 (参见文献 [30]), 根据定理 2.14 可知 M 就是非塌缩的. 当 $H \neq -1$ 时, 由于一个塌缩的 H - 空间形式上的距离球有环丛结构, 因此, 距离球在整体万有覆叠上的原像被纤维的回路生成的子群展开了, 由猜想 4.4 知, 这个 H - 空间形式上可以赋予 M 的度量, 由这个塌缩结构不难想象 M 的万有覆叠是非塌缩的.

猜想 4.5 给定 $n, \rho > 0$, $H = 0, \pm 1$, 存在常数 $\epsilon(n, \rho), v(n, \rho) > 0$ 使得, 若完备 n 维流形满足

$$\text{Ric}_M \geq (n-1)H, \quad \widetilde{\text{vol}}(B_\rho(x)) \geq (1-\epsilon(n, \rho))\text{vol}(\mathbb{B}_\rho^H), \quad x \in M,$$

则 $\text{vol}(B_1(\tilde{p})) \geq v(n, \rho)$, 当 $H = 0$ 时要求 $\text{diam}(M) = 1$, 其中 $B_1(\tilde{p})$ 表示 M 的万有覆叠中的单位球.

下面由陈丽娜、胥世成和作者证明的结论说明猜想 4.5 蕴含了 4.4:

定理 4.6 (猜想 4.4 的弱化版本^[31]) 猜想 4.4 在附加以下的条件下成立: M 的 Riemann 万有覆叠空间非塌缩, 即存在 $\tilde{p} \in \tilde{M}$ 使得 $\text{vol}(B_1(\tilde{p})) \geq v > 0$, 此时 $\epsilon_0 = \epsilon_0(n, \rho, d, v)$.

现在简要介绍一下定理 4.6 的证明, 过程需要涉及几个不同领域的工具. 基本的工具之一是 Cheeger-Colding 理论 (参见文献 [11–14, 16, 17]), 当 $H = 1$ 时, Perelman 关于 Ricci 流的 pseudo-locality 定理³⁾ (参见文献 [32–34]) 也起了关键性的作用.

由定理 4.6 的一个矛盾序列开始, $M_i \xrightarrow{\text{GH}} X$, 其中对任意的 $x_i \in M_i$ 都有

$$\widetilde{\text{vol}}(B_\rho(x_i)) \geq (1-\epsilon_i)\text{vol}(\mathbb{B}_\rho^H), \quad \epsilon_i \rightarrow 0,$$

然后我们去分析 Riemann 万有覆叠的伴随等变收敛序列, 它符合下面的交换图 (参见文献 [35]):

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{M}_i, \tilde{p}_i, \Gamma_i) & \xrightarrow{\text{GH}} & (\tilde{X}, \tilde{p}, G) \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi \\ (M_i, p_i) & \xrightarrow{\text{GH}} & (X, p), \end{array} \quad (4.1)$$

其中 G 是 $\Gamma_i = \pi_1(M_i, p_i)$ 的极限群, 它是李群 (定理 2.10) 并且它的单位元所在的连通分支 G_0 是幂零的 (参见文献 [9]). 我们将证明 $\tilde{X}$ 与空间形式局部等距. 对任意的 $\tilde{x} \in \tilde{X}$, 设 $\tilde{x}_i \in \tilde{M}_i$ 使得 $\tilde{x}_i \rightarrow \tilde{x}$, 我们分析 (4.1) 的一个局部情形:

$$\begin{array}{ccc} (U_\rho^*, x_i^*, \Lambda_i) & \xrightarrow{\text{GH}} & (\tilde{Y}, x^*, K) \\ \tilde{\pi}_i^* \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi}^* \\ (\pi_i^{-1}(B_\rho(x_i)), \tilde{x}_i) & \xrightarrow{\text{GH}} & (Y, \tilde{x}) \subset (\tilde{X}, \tilde{x}), \end{array} \quad (4.2)$$

3) Bamler R, Wilking B. The Ricci flow on manifolds with almost non-negative curvature operators. Unpublished notes, 2016.

其中 $\Lambda_i = \pi_1(\pi_i^{-1}(B_\rho(x_i)), \tilde{x}_i)$. 根据定理 2.8 可知, $\widetilde{\text{vol}}(B_\rho(x_i)) \geq (1 - \epsilon_i)\text{vol}(\mathbb{B}_\rho^H)$ 蕴含着

$$d_{\text{GH}}(B_{\frac{\rho}{2}}(x_i^*), \mathbb{B}_{\frac{\rho}{2}}^H) < \Psi(\epsilon_i \mid n, \rho, d, v),$$

因此, $\tilde{Y}$ 与空间形式是局部等距的. 因为 $\tilde{M}_i$ 是不塌缩的, 因此, K 是离散群. 从 (4.2) 看出, 只需要证明 K 的作用是自由的, 那么在 $\tilde{x}$ 的一个小球就会等距于空间形式上的一个小球. 如果存在 $e \neq \gamma \in K$ 和 $q^* \in B_{\frac{\rho}{4}}(x^*)$ 使得 $\gamma(q^*) = q^*$, 在非塌缩的等变收敛下, 我们证明可以选择 γ 和 q^* 使得: 存在 $\gamma_i \in \Lambda$, 满足 $\gamma_i \rightarrow \gamma$, $q_i^* \rightarrow q^*$, γ_i 的阶数与 γ 的相等, 并且 γ_i 对 q_i^* 周围的移动 $\mu_i \rightarrow 0$ 是几乎极小的, 则有 $(\mu_i^{-1}U_\rho^*, q_i^*, \langle \gamma_i \rangle) \xrightarrow{\text{GH}} (\mathbb{R}^n, \tilde{q}, \langle \gamma' \rangle)$ ($\langle \gamma_i \rangle$ 表示 γ_i 生成的子群), 其中 γ' 必须固定 $\mathbb{R}^n$ 的某些点, 这与 γ_i 必须移动每个点固定的距离矛盾.

如果 G 是离散的, 类似上面可以得到 G 在 $\tilde{X}$ 上的作用是自由的, 从而, X 等距于一个 H -空间形式. 然后根据定理 2.11 就可以得到矛盾. 对于 $H = -1$, G 是离散的原因如下: 由 G_0 的幂零性 (参见文献 [35]) 和 $\tilde{X}/G$ 的紧性可以说明 G_0 内不包含椭圆型或者双曲型元素 (参见文献 [36]). 使用 (4.1), 我们可以在某 G_0 轨道里构造一测地线段, 从而 G_0 里不包含抛物型元素, 则有 $G_0 = e$.

对于 $H = 0$, $\tilde{X} = \mathbb{R}^k \times F$ 和 $\tilde{M}_i = \mathbb{R}^k \times N_i$ (Cheeger-Gromoll 分裂定理), 其中 F 是紧致平坦流形, N_i 是紧致单连通并且具有非负 Ricci 曲率的流形. 我们证明了 $\text{diam}(N_i)$ 是有一致上界的, 应用定理 2.11 将导致矛盾.

当 $H = 1$ 时, 设在 (4.1) 中存在 ϵ_i -等变的微分同胚 $\tilde{h}_i: (\tilde{M}_i, \Gamma_i) \rightarrow (S_1^n, G)$ (定理 2.11). 通过 $\tilde{h}_i$, 可以把 (M_i, Γ_i) 看作 Γ_i 在 S_1^n 上有一个自由的 ϵ_i -等距作用. 根据文献 [37], 当 i 充分大时, 存在单同态 $\phi_i: \Gamma_i \rightarrow G$. 我们证明了 $\phi_i(\Gamma_i)$ 在 S_1^n 上的作用是自由的. 目前为止, 我们可以运用取重心 (center of mass) 的技术去扰动 $\text{id}_{S_1^n}$ 而得到一个映射 $\tilde{f}_i: S^n \rightarrow S^n$ 使得 Γ_i 作用变换为 $\phi_i(\Gamma_i)$ 作用. 剩下还需要去证明 $\tilde{f}_i$ 是微分同胚, 就导致了矛盾. 通过文献 [38], 要证明 $\tilde{f}_i$ 是微分同胚的, 只需要证明 Γ_i 作用和 $\phi_i(\Gamma_i)$ 作用是 C^1 接近的. 为了得到 C^1 接近, 我们运用了 $\tilde{g}_i$ 的 Ricci 流: 根据 Perelman 的 pseudo-locality 定理 (参见文献 [34]) 和脚注 3) 中的距离估计, 我们证明了 $\tilde{g}_i(t)$ 与 S_1^n 上的 g^1 是 C^0 接近的, 并且在一定的放大尺度下也是局部 $C^{1,\alpha}$ 接近的. 由于 Γ_i 对于 $\tilde{g}_i(t)$ 的作用依然是等距的, 以上的正则性保证了所需要的 C^1 接近.

定理 4.7 ^[39] 猜想 4.5 在 $\text{Ric}_M \leq \Lambda$ 情形下成立, 此时 $v = v(n, \rho, \Lambda)$.

我们的办法是应用 Ricci 流. 我们证明了 Ricci 流存在一致的时间, 更重要的是在流动短时间后的度量有几乎常截面曲率 H , 由经典的 Riemann 几何结果可知几乎常截面曲率流形的万有覆叠的单射半径是有下界的, 从而不难得到所需要的结果.

第一步证明了 M 上的度量 g 满足 $|\text{Ric}_g - H|_{L^p(M)} < \epsilon$. 条件 $\Lambda \geq \text{Ric}_M \geq (n-1)H$ 和 $\widetilde{\text{vol}}(B_\rho(x)) \geq (1 - \epsilon)\text{vol}(\mathbb{B}_\rho^H)$ 蕴含着 $B_{\frac{\rho}{2}}(x^*)$ 的 $C^{1,\alpha}$ 半径有正下界. 因为通过放大矛盾序列

$$(s_i^{-1}B_\rho(x_i^*), x_i^*) \xrightarrow{\text{GH}} (\mathbb{R}^n, 0), \quad s_i \rightarrow 0,$$

我们可以应用文献 [21] 的论述而获得矛盾. 假设存在 $\delta > 0$ 和 $\epsilon_i \rightarrow 0$ 使得

$$|\text{Ric}_{B_\rho(x_i^*)} - H|_{L^p(B_\rho(x_i^*))} \geq \delta > 0.$$

根据定理 2.8, 我们可以假设 $B_\rho(x_i^*) \xrightarrow{\text{GH}} \mathbb{B}_\rho^H$, 由 Ricci 曲率在调和坐标系里的表达形式, $|\text{Ric}_{M_i}|$ 的有界性意味着相应的度量在 $L^{2,p}$ 范数下收敛, 矛盾. 利用标准的 packing 技巧, 我们证明了 M_i 在 L^p 的意义下是几乎 H -Einstein 的.

最后, 按照文献 [40] 的办法, 我们证明了流存在的一致时间, 而且重正规化 Ricci 流 (参见文献 [41]) 也满足

$$|\mathrm{Ric}_{g_i(t)} - H|_{L^p(M)} \rightarrow 0.$$

从而, $\tilde{g}_i(t) |_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_i^*)} C^\infty$ 收敛至一个 H -Einstein 度量, 且这个 Einstein 度量 C^∞ 接近于 $\underline{B}_{\frac{\rho}{2}}^H$, 可见 $g_i(t)$ 有几乎常截面曲率 H .

5 量化的极大体积熵刚性

设 M 是紧致 n 维流形. 对任意的 $\tilde{p} \in \tilde{M}$, 如下的极限:

$$h(M) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathrm{vol}(B_R(\tilde{p}))}{R}$$

总是存在的 (参见文献 [42]), 称为 M 的体积熵 (volume entropy), 它衡量了 Riemann 万有覆叠上度量球体积增长的指数速率. 如果重正规化至 $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)$, 那么 $\mathrm{vol}(B_R(\tilde{p})) \leq \mathrm{vol}(\underline{B}_R^{-1})$, 因此, $h(M) \leq n-1$. 注意到任意双曲流形 $\mathbb{H}^n/\Gamma$ 达到了最大的体积熵 $h(\mathbb{H}^n/\Gamma) = n-1$, Ledrappier 和 Wang 则得到了反向的结论:

定理 5.1 (极大体积熵刚性^[43]) 设 M 是紧致的 n 维流形满足 $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)$. 若 $h(M) = n-1$, 那么 M 等距于双曲流形.

由扭积度量刚性定理 (见定理 2.6) 观察到, 若 $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)$, 则 Riemann 万有覆叠 $\tilde{M}$ 等距于扭积 $\mathbb{R} \times_{\sinh t} N$ 当且仅当存在函数 $f: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\Delta f = n-1$ 和 $|\nabla f| \equiv 1$. 又因为 $\tilde{M}$ 的截面曲率是有界的, 从而, N 只能是 $\mathbb{R}^{n-1}$. 因此, 一个证明定理 5.1 的途径是构造 $\tilde{M}$ 上一个这样的函数. 根据文献 [22] 中的方法, $h(M) = n-1$ 意味着存在序列 $r_i \rightarrow \infty$, 使得对任意的 $R > 0$, 有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathrm{vol}(\partial B_{r_i+50R}(\tilde{p}))}{\mathrm{vol}(\partial B_{r_i-50R}(\tilde{p}))} = e^{100(n-1)R}. \quad (5.1)$$

选择 $\gamma_i \in \pi(M, p)$ 使得

$$B_R(\gamma_i(\tilde{p})) \subset A_{r_i-50R, r_i+50R}(\tilde{p}),$$

定义

$$b_i: B_R(\tilde{p}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_i(x) = d(\gamma_i(x), \tilde{p}) - d(\tilde{p}, \gamma_i(\tilde{p})).$$

然后 $b_R = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i$ 满足 $|\nabla b_R| = 1$ 和 $\Delta b_R = n-1$. 那么 $b = \lim_{R \rightarrow \infty} b_R: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 就是所要构造的函数.

下面的量化极大体积熵问题是在文献 [43, 44] 中提出的: 如果 n 维完备流形 M 满足 $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)$ 和 $\mathrm{diam}(M) \leq d$ 并具有几乎极大的体积熵, $h(M) \geq 1 - \epsilon$, 那么 M 是否会微分同胚于一个双曲空间? 注意到对直径的限制不能去掉 (参见文献 [29]). 在文献 [44] 中给出了截面曲率为负的情形的肯定回答.

在文献 [31] 中, 我们建立了量化极大体积熵的刚性:

定理 5.2 (量化极大体积熵刚性) 给定 $n, d > 0$, 存在 $\epsilon(n, d) > 0$ 使得对任意的 $0 < \epsilon < \epsilon(n, d)$, 如果完备 n 维流形 M 满足

$$\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1), \quad d \geq \mathrm{diam}(M), \quad h(M) \geq (n-1) - \epsilon,$$

那么存在一个 M 到双曲流形的 $\Psi(\epsilon | n, d)$ -等距的微分同胚.

假设存在满足定理 5.2 条件的反例 M_i (对 $\epsilon_i \rightarrow 0$), 但是 M_i 都不能容许任何双曲度量. 过渡至子列后, 我们得到伴随的等变交换图:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{M}_i, \tilde{p}_i, \Gamma_i) & \xrightarrow{\text{GH}} & (\tilde{X}, \tilde{p}, G) \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi \\ (M_i, p_i) & \xrightarrow{\text{GH}} & (X, p). \end{array}$$

我们将证明 $\tilde{X}$ 等距于 $\mathbb{H}^n$, G 是离散的并在 $\tilde{X}$ 上的作用是自由的, 则 $X = \mathbb{H}^n/\Gamma$ 就是一个双曲流形, 对充分大的 i , M_i 同胚于 $\mathbb{H}^n/\Gamma$ (定理 2.11), 矛盾.

首先, 类似于 (5.1), 我们有

$$\frac{\text{vol}(\partial B_{r_i+50R}(\tilde{p}_i))}{\text{vol}(\partial B_{r_i-50R}(\tilde{p}_i))} \geq (1 - \Psi(\epsilon_i | n, R, d)) \frac{\text{vol}(\partial \mathbb{B}_{r_i+50R}^{-1})}{\text{vol}(\partial \mathbb{B}_{r_i-50R}^{-1})}.$$

由于 $r_i \rightarrow \infty$, 不能直接应用定理 2.6 以得到 $A_{r_i-50R, r_i+50R}(\tilde{p}_i)$ 几乎是一个双曲扭积. 但借鉴于定理 2.6 证明的想法可以证明: 存在某个 $B_R(\tilde{q}_i) \subset A_{r_i-50R, r_i+50R}(\tilde{p}_i)$ 使得

$$d_{\text{GH}}(B_R(\tilde{q}_i), B_R(\tilde{x}_i)) < \Psi(\epsilon_i | n, d, R),$$

其中 $B_R(\tilde{x}_i)$ 是某双曲扭积空间的度量球. 当 $R \gg d$ 时, $\tilde{M}_i$ 在 $\tilde{p}_i$ 处的基本区域包含在 $B_{\frac{R}{2}}(\tilde{p}_i)$ 中, 存在 $\gamma_i \in \Gamma_i$ 使得 $B_{\frac{R}{2}}(\tilde{p}_i) \subset B_R(\gamma_i^{-1}(\tilde{q}_i))$, 则当 $i \rightarrow \infty$ 时, $B_{\frac{R}{2}}(\tilde{p})$ 就是双曲扭积度量球. 令 $R \rightarrow \infty$, 就得到了 $\tilde{X}$ 是双曲扭积 $\mathbb{R} \times_{\sinh t} Y$. 观察到 Y 等距于它的任一个切锥, 又由于 Y 的正则点集非空, 从而, 它必然等距于 $\mathbb{R}^{k-1}$.

接下来将证明 $h(M_i) \leq k-1$, 从而就可以断言 $k=n$. 首先假设 G 是离散的. 由文献 [35] 知, 存在 $\epsilon > 0$ 使得正规子群 $\Gamma_i(\epsilon) \rightarrow G_0 = e$, 以及 $\Gamma_i/\Gamma_i(\epsilon) \cong \bar{\Gamma}$ 不依赖于 i , 从而 $\Gamma_i(\epsilon)$ 是有限的. 由于 $\mathbb{H}^k/G$ 是紧致的, 从而,

$$h(M_i) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Gamma_i(R)|}{R} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln |\Gamma_i(\epsilon)|}{R} + \frac{\ln |\bar{\Gamma}(R)|}{R} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln |\bar{\Gamma}(R)|}{R} \leq k-1.$$

G 离散性的证明类似于定理 4.6 中的证明, 这里不再赘述.

最后说明 G 在 $\mathbb{H}^n$ 上的作用是自由的. 假设 $\gamma \in G$ 和 $\tilde{q} \in \mathbb{H}^n$ 使得 $\gamma(\tilde{q}) = \tilde{q}$. 不失一般性, 不妨假设阶数 $o(\gamma) < \infty$. 设 $\gamma_i \in \Gamma_i$ 使得 $\gamma_i \rightarrow \gamma$. 因为 M_i 是紧致的, 可以假设 γ_i 在 $\tilde{q}_i$ 的移动距离达到最小值, 那么, 若 $\tilde{q}_i \rightarrow \tilde{q}'$, 则 $\gamma(\tilde{q}') = \tilde{q}'$. 再次不失一般性, 假设 $\tilde{q}' = \tilde{q}$. 因为 $0 < \delta_i = d(\tilde{g}_i, \gamma_i(\tilde{q}_i)) \rightarrow 0$, 不难检验

$$(\delta_i^{-1} \tilde{M}_i, \tilde{q}_i, \langle \gamma_i \rangle) \xrightarrow{\text{GH}} (\mathbb{R}^n, \tilde{q}, \langle \gamma \rangle).$$

因为 $o(\gamma) < \infty$, 因此, γ 固定 $\mathbb{R}^n$ 里面的某些点, 这与任意的 $\tilde{x}_i \in \tilde{M}_i$ 都有 $d_{\delta_i^{-1} \tilde{M}_i}(\tilde{x}_i, \gamma_i(\tilde{x}_i)) \geq 1$ 矛盾.

致谢 这篇综述原版的语言是英文, 中文版本则由黄虹智翻译并与作者讨论修改而得, 在此对他的工作表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Cheeger J, Fukaya K, Gromov M. Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds. J Amer Math Soc, 1992, 5: 327–372

- 2 Cheeger J, Gromov M. Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded, I. *J Differential Geom*, 1986, 23: 309–346
- 3 Cheeger J, Gromov M. Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded, II. *J Differential Geom*, 1990, 32: 269–298
- 4 Cheeger J. Finiteness theorems for Riemannian manifolds. *Amer J Math*, 1970, 92: 61–75
- 5 Fukaya K. Collapsing Riemannian manifolds to ones of lower dimensions. *J Differential Geom*, 1987, 25: 139–156
- 6 Fukaya K. A boundary of the set of the Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters. *J Differential Geom*, 1988, 28: 1–21
- 7 Gromov M. Almost flat manifolds. *J Differential Geom*, 1978, 13: 231–241
- 8 Rong X. Convergence and collapsing theorems in Riemannian geometry. In: *Handbook of Geometric Analysis*. Beijing-Boston: Higher Education Press and International Press, 2010, 193–298
- 9 Kapovitch V, Wilking B. Structure of fundamental groups of manifolds with Ricci curvature bounded below. *ArXiv:1105.5955*, 2011
- 10 Cheeger J, Colding T H. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. *J Differential Geom*, 1971, 6: 119–128
- 11 Cheeger J, Colding T H. Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products. *Ann of Math (2)*, 1996, 144: 189–237
- 12 Cheeger J, Colding T H. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, I. *J Differential Geom*, 1997, 46: 406–480
- 13 Cheeger J, Colding T H. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, II. *J Differential Geom*, 2000, 54: 13–35
- 14 Cheeger J. *Degeneration of Riemannian Metrics under Ricci Curvature Bounds*. Pisa: Scuola Normale Superiore, 2001
- 15 Cheeger J, Naber A. Regularity of Einstein manifolds and the codimension 4 conjecture. *Ann of Math (2)*, 2015, 182: 1093–1165
- 16 Colding T H. Large manifolds with positive Ricci curvature. *Invent Math*, 1996, 124: 193–214
- 17 Colding T H. Ricci curvature and volume convergence. *Ann of Math (2)*, 1997, 145: 477–501
- 18 Colding T, Naber A. Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications. *Ann of Math (2)*, 2012, 176: 1173–1229
- 19 Petersen P. *Riemannian Geometry*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2006
- 20 Milnor J. A note on curvature and fundamental group. *J Differential Geom*, 1968, 2: 1–7
- 21 Anderson M T. Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds. *Invent Math*, 1990, 102: 429–445
- 22 Liu G. A short proof to the rigidity of volume entropy. *Math Res Lett*, 2011, 18: 151–153
- 23 Liu G. 3-Manifolds with nonnegative Ricci curvature. *Invent Math*, 2013, 193: 367–375
- 24 Pan J. A proof of Milnor conjecture in dimension 3. *J Reine Angew Math*, in press, 2018
- 25 Pan J. Nonnegative Ricci curvature, stability at infinity, and finite generation of fundamental groups. *ArXiv:1710.05498*, 2017
- 26 Sormani C. Nonnegative Ricci curvature, small linear diameter growth and finite generation of fundamental groups. *J Differential Geom*, 2000, 54: 547–559
- 27 Kapovitch V, Petrunin A, Tuschmann W. Nilpotency, almost nonnegative curvature, and the gradient flow on Alexandrov spaces. *Ann of Math (2)*, 2010, 171: 343–373
- 28 Perelman G. Manifolds of positive Ricci curvature with almost maximal volume. *J Amer Math Soc*, 1994, 7: 299–305
- 29 Gromov M, Thurston W. Pinching constants for hyperbolic manifolds. *Invent Math*, 1987, 89: 1–12
- 30 Heintze E. *Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung*. PhD Thesis. Bonn: Universität Bonn Habilitationsschrift, 1976
- 31 Chen L, Rong X, Xu S. Quantitative volume space form rigidity under lower Ricci curvature bound, I. *J Differential Geom*, in press, 2018
- 32 Schoen R. A lower bound for the first eigenvalue of a negatively curved manifold. *J Differential Geom*, 1982, 17: 233–238
- 33 Hamilton R. The formations of singularities in the Ricci flow. *Surv Differ Geom*, 1993, 2: 7–136
- 34 Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *ArXiv:math/0211159*, 2008
- 35 Fukaya K, Yamaguchi T. The fundamental groups of almost nonnegatively curved manifolds. *Ann of Math (2)*, 1992, 136: 253–333
- 36 Ratcliffe J. *Foundation of Hyperbolic Manifolds*. New York: Springer, 1994
- 37 Mazur M, Rong X, Wang Y. Margulis lemma for compact Lie groups. *Math Z*, 2007, 258: 395–406
- 38 Grove K, Karcher H. How to conjugate C^1 -close group actions. *Math Z*, 1973, 132: 11–20
- 39 Chen L, Rong X, Xu S. Quantitative volume space form rigidity under lower Ricci curvature bound, II. *Trans Amer*

- Math Soc, 2018, 370: 4509–4523
- 40 Dai X, Wei G, Ye R. Smoothing Riemannian metrics with Ricci curvature bounds. *Manuscripta Math*, 1996, 90: 49–61
- 41 Tian G, Wang B. On the structure of almost Einstein manifolds. *J Amer Math Soc*, 2015, 28: 1169–1209
- 42 Manning A. Topological entropy for geodesic flows. *Ann of Math* (2), 1979, 2: 567–573
- 43 Ledrappier F, Wang X. An integral formula for the volume entropy with applications to rigidity. *J Differential Geom*, 2010, 85: 461–478
- 44 Ledrappier F, Wang X. Pinching theorem for the volume entropy. [Http://users.math.msu.edu/users/xwang/pinching.pdf](http://users.math.msu.edu/users/xwang/pinching.pdf), 2011

Manifolds of Ricci curvature and local rewinding volume bounded below

Xiaochun Rong

Abstract This is a survey article on recent development in studying manifolds M of Ricci curvature and local rewinding volume of metric balls of a fixed radius bounded from below. The local rewinding volume of an r -metric ball at $x \in M$, $B_r(x)$, is the volume of the r -metric ball at the base point of the local (incomplete) Riemannian universal cover of $B_r(x)$.

Keywords metric Riemannian geometry, Gromov-Hausdorff convergence, Cheeger-Colding theory, local rewinding volume

MSC(2010) 53C20, 53C21, 53C23, 53C24

doi: 10.1360/N012017-00243